Haro v. Buttlar

Einführung in die Grundlagen der Kernphysik



Haro v. Buttlar · Einführung in die Grundlagen der Kernphysik

Einführung in die Grundlagen der Kernphysik

von

Prof. Dr. Haro v. Buttlar

Darmstadt

Mit 106 Abbildungen



Akademische Verlagsgesellschaft · Frankfurt am Main

1964

Printed in Germany

Wenn für dich eine Sache schwer zu bewältigen ist,
darfst du nicht gleich denken,
sie sei für Menschen unmöglich;
du mußt vielmehr glauben,
wenn überhaupt etwas für den Menschen möglich ist
und in seinem Bereich liegt,
daß es auch für dich erreichbar sei.

MARC AUREL

Vorwort

Den Anstoß zu diesem Buch haben die Studenten in den Vorlesungen und Seminaren über Kernphysik am hiesigen Institut gegeben, die wiederholt darauf hinwiesen, daß es kein deutsches Textbuch über Kernphysik gibt, das die Lücke zwischen der qualitativen Einführung und dem von hohem Niveau dargestellten Lehrbuch über theoretische Kernphysik ausfüllt. So habe ich mich bemüht, die Grundlagen der Kernphysik mit Mitteln darzustellen, die den Physikstudenten an einer deutschen Hochschule nicht überfordern. Jeweils werden nur die gröbsten Näherungen vorgeführt, diese aber so vollständig wie möglich im Rahmen des beschränkten Umfanges des Buches.

Die Eigenschaften der „nackten" Kerne werden aus einfachen Modellvorstellungen entwickelt, auf die im einzelnen komplizierten Abweichungen des Verhaltens der wirklichen Kerne wird nur summarisch eingegangen. Ebenso werden nur die einfachsten Theorien der Wechselwirkung zweier Teilchen (Kerne bzw. Strahlung) behandelt. Es soll dabei gezeigt werden, daß man mit verhältnismäßig einfachen Annahmen schon eine Vielzahl von Kerneigenschaften und Reaktionsabläufen verstehen kann.

Für die aufgezeigten Zusammenhänge ist im allgemeinen der Beweisgang vollständig angegeben, so daß er ohne Zusatzliteratur nachvollzogen werden kann; die Phrase „wie man leicht zeigen kann" wurde möglichst vermieden. In Fällen, bei denen Sprünge in der Beweiskette nicht zu vermeiden waren, sind Literaturzitate oder der Vermerk „hier ohne Beweis" eingefügt.

Manche Herleitungen oder Anmerkungen sind beim ersten Durcharbeiten des Buches nicht verständlich; diese wurden in Kleindruck gesetzt; ebenfalls solche Passagen, die den Hauptgedankengang unterbrechen.

Teil A des Buches umfaßt das Material einer Vorlesung „Einführung in die Kernphysik", wie sie an der Technischen Hochschule Darmstadt für Physikstudenten vor dem Vorexamen gehalten wird. Hier sind solche Phänomene dargestellt, die ohne Quantenmechanik verständlich sind.

Ein kurzer Teil B bringt die im folgenden gebrauchten Grundlagen der Quantenmechanik; dabei wird der Stoff einer im allgemeinen nach dem Vorexamen gebotenen Vorlesung über dieses Gebiet zusammengefaßt und auf die Bedürfnisse der Kernphysik zugeschnitten.

In Teil C wird die Quantenmechanik auf die Kernteilchen angewandt. Das Material entspricht einer zweisemestrigen Vorlesung über „Kernphysik" für Studenten nach dem Vorexamen. Allerdings sind die experimentellen

Methoden, die gewöhnlich ebenfalls in einer solchen Vorlesung diskutiert werden, mit der Begründung herausgelassen, daß sie sich im Zuge der technischen Entwicklung fast jährlich ändern, während die theoretischen Erkenntnisse von längerer Dauer sind. Außerdem herrscht kein Mangel an Informationsmöglichkeit über die experimentellen Verfahren.

Jedem Kapitel sind einige Übungsaufgaben, auch schwierigerer Natur, beigefügt. Damit erhält der Student die Möglichkeit, sich in eigener Aktivität den Stoff anzueignen und sein Verständnis zu überprüfen.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. P. BRIX, dem Direktor des hiesigen Institutes, von dessen Erfahrungen ich viel profitieren konnte. Ich danke den Herren Dr. D. QUITMANN und A. GOLDMANN für ihre wertvollen kritischen Kommentare während der Abfassung des Manuskripts und Frl. U. SCHROER für ihre Hilfe bei der Zeichnung der Figuren.

Darmstadt, Sommer 1964 HARO V. BUTTLAR

Inhaltsverzeichnis

Teil A

I. Stoßproblem (klassisch) 1
§ 1. Kartesische, Zylinder- und Kugelkoordinaten 1
a) Kartesische Koordinaten (x, y, z) 1
b) Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) 2
c) Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) 4
§ 2. Labor-, Schwerpunkts- und Relativsystem. Das klassische Stoßproblem 5
a) Laborsystem 5
b) Schwerpunktssystem 5
c) Relativsystem 9

II. Zentralkraftproblem (klassisch) 14
§ 3. KEPLERsche Gesetze 14
a) Herleitung der KEPLERschen Gesetze 14
b) Energiebetrachtung 18
§ 4. RUTHERFORDsche Streuformel und Wirkungsquerschnitt 19
a) Herleitung der RUTHERFORDschen Streuformel 19
b) Diskussion der Streuformel 21
c) Allgemeines über Wirkungsquerschnitte 23
§ 5. BOHR-SOMMERFELDsches Atommodell 25

III. Bindungsenergie der Atomkerne 30
§ 6. Bindungsenergie und Massendefekt 30
§ 7. Energiediagramme 33

IV. Kinematik der Kernreaktionen 37
§ 8. Energie- und Impulserhaltung 37
a) Relativistische Energie-Impuls-Beziehungen 37
b) Anwendung auf Kernreaktionen 39
§ 9. Reaktionen nichtrelativistischer Teilchen (Q-Gleichung) 41
§ 10. Reaktionen relativistischer Teilchen 47
a) COMPTON-Streuung von Lichtquanten 47
b) Streuung schneller Elektronen an Atomkernen 49

V. Kernzerfälle 50
§ 11. Energiebetrachtungen 51
a) γ-Zerfall und innere Konversion 51
b) β^--Zerfall 53
c) β^+-Zerfall und Elektroneneinfang 56
d) α-Zerfall 58
e) Andere Zerfälle 59
§ 12. Radioaktives Zerfallsgesetz 59
a) Zerfallskonstante und Halbwertszeit 59
b) Dualer Zerfall 61
c) Säkulares Gleichgewicht 63
d) Aktivität 64
e) Zählstatistik 64

VI. Tröpfchenmodell des Atomkerns 67
§ 13. WEIZSÄCKERsche Formel 67
a) Kondensationsterm 67
b) Oberflächenterm 67
c) Elektrische Abstoßung der Protonen 68
d) Symmetrieterm 70
e) Paarungsenergieterm 72
§ 14. Anwendung auf Q-Werte von Kernreaktionen 76
a) Paarungsenergie aus (d, α)-Reaktionen 76
b) COULOMB-Abstoßung der Protonen aus dem β^+-Zerfall von Spiegelkernen 78
§ 15. Kernspaltung 79
§ 16. Grenzen des Tröpfchenmodells, Hinweis auf „magische Zahlen" 84
VII. Elementare Neutronenphysik 86
§ 17. Streuung und Bremsung von langsamen Neutronen 87
a) Streuung 87
b) Bremsung 89
§ 18. Neutronenfluß im homogenen Bremsmedium, Kettenreaktion 94
a) Energieabhängigkeit des Neutronenflusses 94
b) Kettenreaktion 96
c) Reaktorkonstanten 98
§ 19. Neutronendiffusion, kritische Reaktorgröße 101
a) Diffusionsgleichung für thermische Neutronen 101
b) Beispiele 104
c) Berücksichtigung der Neutronen im Abbremsbereich 107
Übungen zu Teil A 111

Teil B

VIII. SCHRÖDINGER-Gleichung ohne Spin 116
§ 20. Lichtwellen und DE-BROGLIE-Wellen 117
§ 21. Separation der SCHRÖDINGER-Gleichung 120
a) Separation der Zeit 120
b) Separation der Winkelkoordinaten 121
c) Die Radialgleichung 124
§ 22. Lösung der Radialgleichung in einfachen Fällen 125
a) Allgemeine Betrachtungen 125
b) Asymptotische Lösungen 127
c) Lösung für $U_{(r)} = U_0 = \text{const}$. 128
d) Lösung für $U_{(r)} = -V_0 + \gamma^2 r^2$ 136
§ 23. Physikalische Größen als quantenmechanische Operatoren 139
a) Operatoren 139
b) Erwartungswert 141
c) Eigenfunktionen und Eigenwerte 142
d) Allgemeine Zusammenhänge 142
§ 24. Erhaltungssätze 151
IX. Drehimpuls und Spin 157
§ 25. Eigenwerte und Eigenfunktionen von Bahndrehimpuls, Spin und Gesamtdrehimpuls 158
a) Bahndrehimpuls 158

b) Gesamtdrehimpuls 159
c) Spin 164
§ 26. Kopplung zweier Drehimpulse 167
Übungen zu Teil B 175

Teil C

X. Kernspin und Kernmomente 177
§ 27. Charakteristische Eigenschaften der Kernzustände 177
§ 28. Magnetisches Kerndipolmoment 181
§ 29. Einfluß von Kernspin und magnetischem Kernmoment auf die Hyperfeinstruktur von Spektrallinien 188
§ 30. Elektrisches Kernquadrupolmoment 198
a) Klassische Rechnung 198
b) Quantenmechanischer Rechenansatz 206

XI. Einteilchen-Schalenmodell des Atomkerns 209
§ 31. Spin-Bahn-Kopplung 209
§ 32. Einteilchen-Schalenmodell mit Parabelpotential 212
§ 33. Einteilchen-Schalenmodell mit Rechteckpotential 219
§ 34. Ladungsverteilung des Kerns, Vergleich mit Experimenten 222
a) Definition des Radius der elektrischen Ladungsverteilung 222
b) Elastische Elektronenstreuung 232
c) Müonenatome 239
d) Isotopieverschiebung von Spektrallinien 241

XII. Zweinukleonenproblem (quantenmechanisch) 242
§ 35. Elementare Theorie des Deuterons 243
§ 36. Streuung von Neutronen an Protonen bei geringer Einfallsenergie . . . 245
a) Allgemeines über den quantenmechanischen Streuquerschnitt . . . 245
b) Neutron-Proton-Streuung bei $l=0$ 250
§ 37. Ansätze für die Wechselwirkung zweier Nukleonen 253
a) Impulsabhängigkeit 254
b) Ladungsabhängigkeit 254
c) Spinabhängigkeit 256
d) Ortsabhängigkeit 258
§ 38. Magnetisches Dipolmoment und elektrisches Quadrupolmoment des Deuterons 262
a) Magnetisches Dipolmoment des Deuterons 262
b) Elektrisches Quadrupolmoment des Deuterons 264

XIII. Wirkungsquerschnitte von Kernreaktionen 266
§ 39. Erhaltungssätze 268
a) Baryonenzahl 269
b) Elektrische Ladung 269
c) Leptonenzahl 269
d) Energie und Impuls 269
e) Drehimpuls 270
f) Parität 270
g) Isospin 273
§ 40. Wirkungsquerschnitte für Streuung und Reaktionen 273
§ 41. Spezialfall $l=0$ für Neutronen im Compoundkernmodell 278

§ 42. Breit-Wigner-Formeln 291
a) Herleitung und Diskussion der Formeln 291
b) Beispiele 295
§ 43. Gemittelter Wirkungsquerschnitt, Optisches Modell 301
a) Gemittelter Wirkungsquerschnitt 302
b) Optisches Potential 304
§ 44. Abschätzung des Wirkungsquerschnitts aus dem Wechselwirkungsansatz. Das Reziprozitätstheorem 309
a) Wirkungsquerschnitt und Linienbreite 309
b) Abschätzung der Wirkungsquerschnitte bei kleinen Einfallsenergien . 312
c) Resonanzgebiet (schematische Übersicht) 317
d) Umkehrreaktion 321
§ 45. Statistische Theorie und Kernverdampfung 323
§ 46. Besonderheiten bei Reaktionen mit geladenen Teilchen 329
a) Von Protonen induzierte Reaktionen 329
b) Von Deuteronen induzierte Reaktionen 333
c) Von α-Teilchen induzierte Reaktionen 337
§ 47. Kernphotoeffekt 338
a) Summenregeln 338
b) Photospaltung des Deuterons 345
XIV. Spontaner Kernzerfall, Spin und Parität angeregter Kernzustände 350
§ 48. Elementare Theorie des α-Zerfalls 351
§ 49. Multipolentwicklung des Strahlungsfeldes und γ-Zerfall 357
a) Multipoldarstellung der Lösungen der Maxwell-Gleichungen . . . 358
b) Übergangswahrscheinlichkeit bei spontaner γ-Emission 367
c) Innere Konversion 375
d) Winkelkorrelationen bei aufeinanderfolgenden γ-Übergängen . . . 376
§ 50. Spektrum und fT-Wert beim β-Zerfall 380
a) Zerfallswahrscheinlichkeit 380
b) Nichterhaltung der Parität 381
c) β-Spektrum und fT-Wert 383
d) Elektroneneinfang 389
XV. Über Kernmodelle 390
§ 51. Grundzüge des Kollektivmodells der Atomkerne 391
a) Oberflächenschwingungen kugelsymmetrischer Kerne 391
b) Rotationen eines deformierten Kerns 397
§ 52. Zusammenfassung und Gegenüberstellung der Kernmodelle 403
Übungen zu Teil C 407

Anhang

Zur Quantenmechanischen Störungsrechnung 415
a) Zeitunabhängiger Störoperator H_1 415
b) Zeitabhängiger Störoperator H_1 416
Weiterführende Literatur 418
Sachverzeichnis 423

TEIL A

I. Stoßproblem (klassisch)

Als Vorstufe zum Studium der Physik der Atomkerne eignet sich eine Betrachtung der klassischen Zweiteilchenmechanik. Diese beschreibt z. B. die Bewegungsgesetze, die die Verhältnisse beim Stoß zweier Billardkugeln wiedergeben. Es wird später gezeigt (§24), daß die dabei wichtigen Erhaltungssätze von Energie und Impuls auch in der Mechanik atomarer Teilchen (Quantenmechanik) gültig bleiben, so daß die hier abgeleiteten Zusammenhänge in der Kernphysik ihre Gültigkeit behalten. Im ersten Kapitel wird die klassische Mechanik kurz wiederholt und gleichzeitig die in den folgenden Kapiteln benötigte Nomenklatur eingeführt. Dazu behandeln wir in §1 die Koordinatensysteme, in denen man die physikalischen Vorgänge am zweckmäßigsten darstellt. In §2 wollen wir uns mit dem klassischen Stoßproblem beschäftigen.

§1. Kartesische, Zylinder- und Kugelkoordinaten

Die Beschreibung der räumlichen Bewegung von Massenpunkten („Teilchen“) verlangt ein Koordinatensystem, das den physikalischen Gegebenheiten möglichst gut angepaßt ist. Wenn es sich um ein einzelnes Teilchen handelt, kommen in unserem Zusammenhang kartesische Koordinaten, Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten in Frage. Zweiteilchenprobleme (wie z.B. den Stoß zweier Teilchen) kann man darüber hinaus im Laborsystem, im Schwerpunktssystem oder im Relativsystem beschreiben (§2). Während der Koordinatennullpunkt im Laborsystem ruht, fällt er im Schwerpunktssystem mit dem bewegten Schwerpunkt und im Relativsystem mit dem Ort eines der bewegten Teilchen zusammen.

Wir wollen zunächst die als bekannt vorausgesetzten Grundgrößen der klassischen Mechanik eines Teilchens in kartesischen Koordinaten, Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten darstellen.

a) Kartesische Koordinaten (x, y, z)

Der *Ortsvektor* $\vec{r}$ des Teilchens hat die Komponenten x, y, z, die von der Zeit t abhängen. Bezeichnet man mit $\vec{i}, \vec{j}$ und $\vec{k}$ die Einheitsvektoren

in x-, y- und z-Richtung, so ist (s. Fig. 1.1)

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Die *Geschwindigkeit* $\vec{v}$ wird dargestellt als

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k};$$

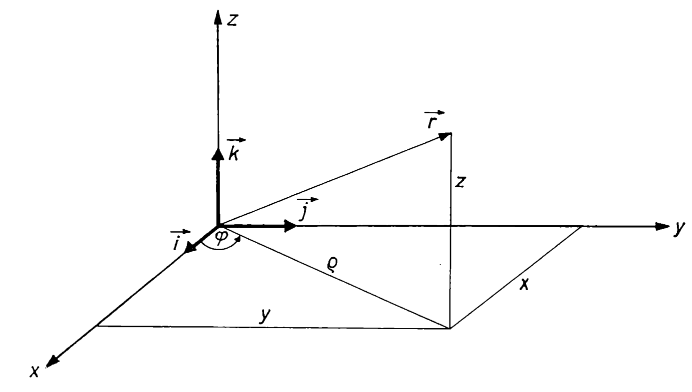


Fig. 1.1. Ortsvektor und Einheitsvektoren im kartesischen Koordinatensystem

die *Beschleunigung* $\vec{b}$ als

$$\vec{b} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}.$$

Die *kinetische Energie KE* ist definiert als

$$KE = \tfrac{1}{2} m v^2 = \tfrac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),$$

der *Impuls* $\vec{p}$ als

$$\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$$

und der *Bahndrehimpuls* $\vec{L}$ als

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v} = m \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}. \qquad (1.1)$$

b) Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z)

In der x-y-Ebene werden der Fahrstrahl ρ und der Azimutwinkel φ definiert durch die Beziehungen (s. Fig. 1.1):

$$x = \rho\cos\varphi; \quad y = \rho\sin\varphi; \quad \text{außerdem} \quad z = z.$$

Damit wird

$$\vec{r} = \rho(\vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi) + z\vec{k}$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\rho}(\vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi) + \rho\,\dot{\varphi}(-\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi) + \dot{z}\vec{k}.$$

Durch die Einführung neuer Einheitsvektoren in der x-y-Ebene (s. Fig. 1.2)

$$\vec{e}_\rho = \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi;$$

$$\dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\varphi}(-\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi) = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{e}_\varphi = -\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi;$$

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = \dot{\varphi}(-\vec{i}\cos\varphi - \vec{j}\sin\varphi) = -\dot{\varphi}\,\vec{e}_\rho$$

folgt:

Ortsvektor:

$$\vec{r} = \rho\,\vec{e}_\rho + z\,\vec{k},$$

Geschwindigkeit:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \dot{z}\,\vec{k}.$$

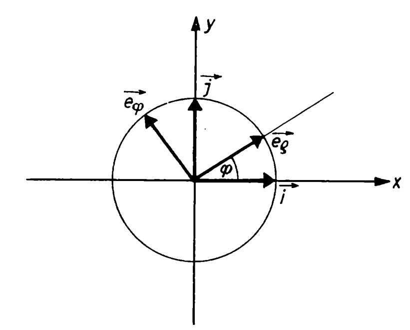


Fig. 1.2. Zur Definition der Einheitsvektoren in ebenen Polarkoordinaten (die z-Richtung zeigt zum Betrachter)

Die Beschleunigung folgt durch Differentiation nach der Zeit zu

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= \ddot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\,\underbrace{\dot{\vec{e}}_\rho}_{\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi} + \dot{\rho}\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \rho\,\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \rho\,\dot{\varphi}\,\underbrace{\dot{\vec{e}}_\varphi}_{-\dot{\varphi}\,\vec{e}_\rho} + \ddot{z}\,\vec{k} \\ \ddot{\vec{r}} &= (\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\varphi}^2)\,\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\,\dot{\varphi} + \rho\,\ddot{\varphi})\,\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\,\vec{k}. \end{aligned}\right\} \quad (1.2)$$

In der x-y-Ebene läßt sich der Term $\ddot{\rho}\,\vec{e}_\rho$ als Radialbeschleunigung, der Term $-\rho\,\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_\rho$ als Zentripetalbeschleunigung (beide in Radialrichtung), der Term $2\dot{\rho}\;\dot{\varphi}\;\vec{e}_\varphi$ als CORIOLIS-Beschleunigung und der Term $\rho\,\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$ als Azimutalbeschleunigung (beide in Tangentialrichtung) deuten.

Für die kinetische Energie ergibt sich

$$KE = \tfrac{1}{2} m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\,\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2),$$

für den Impuls

$$\vec{p} = m\,\dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + m\,\rho\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + m\,\dot{z}\,\vec{k}$$

und für den Bahndrehimpuls

$$\vec{L} = m\,\vec{r}\times\dot{\vec{r}} = m\begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \vec{e}_\varphi & \vec{k} \\ \rho & 0 & z \\ \dot{\rho} & \rho\dot{\varphi} & \dot{z} \end{vmatrix} = m\left[-\rho\,\dot{\varphi}\,z\,\vec{e}_\rho + (z\,\dot{\rho} - \rho\,\dot{z})\,\vec{e}_\varphi + \rho^2\,\dot{\varphi}\,\vec{k}\right]. \quad (1.3)$$

Im Spezialfall der ebenen Bewegung ($z=\dot{z}=0$) vereinfacht sich (1.3) zu

$$\vec{L}=m\,\rho^2\,\dot{\varphi}\,\vec{k} \quad \text{(für ebene Bewegung)}, \tag{1.4}$$

d.h. der Drehimpulsvektor steht senkrecht auf der Bewegungsebene, wie es auch sein muß, wenn das Teilchen die Ebene nicht verlassen darf.

Der ρ-φ-Anteil des Zylinderkoordinatensystems wird oft als „ebenes Polarkoordinatensystem" bezeichnet.

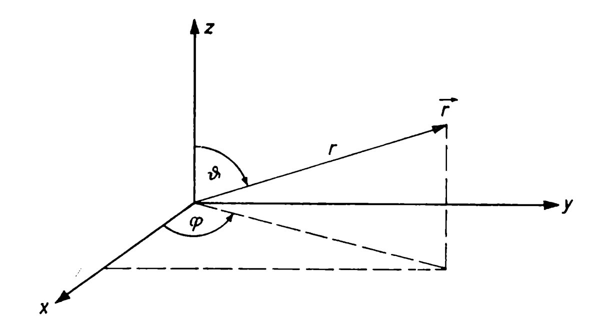


Fig. 1.3. Bestimmungsstücke des Ortsvektors in Kugelkoordinaten

c) Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ)

Zur Beschreibung werden die Winkel ϑ (Polabstand), φ (Azimut) und der Betrag r des Ortsvektors herangezogen (s. Fig. 1.3):

$$x=r\,\sin\vartheta\cos\varphi$$
$$y=r\,\sin\vartheta\,\sin\varphi$$
$$z=r\cos\vartheta\,.$$

Damit wird

$$\vec{r}=r\sin\vartheta\,\vec{e}_\rho+r\cos\vartheta\,\vec{k}$$
$$\dot{\vec{r}}=(\dot{r}\sin\vartheta+r\,\dot{\vartheta}\cos\vartheta)\,\vec{e}_\rho+r\,\dot{\varphi}\sin\vartheta\,\vec{e}_\varphi+(\dot{r}\cos\vartheta-r\,\dot{\vartheta}\sin\vartheta)\,\vec{k}$$
$$\vec{L}=m\,r^2(-\dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\vartheta\,\vec{e}_\rho+\dot{\vartheta}\,\vec{e}_\varphi+\dot{\varphi}\sin^2\vartheta\,\vec{k})$$
$$KE=\tfrac{1}{2}\,m\,[\dot{r}^2+r^2(\dot{\vartheta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta)]\,.$$

Unter Benutzung von

$$L^2=m^2\,r^4(\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta+\dot{\vartheta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^4\vartheta)$$
$$=m^2\,r^4(\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta+\dot{\vartheta}^2)$$

ergibt sich:

$$KE=\frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2+\frac{L^2}{2m\,r^2}\,. \tag{1.5}$$

Diese Beziehung zwischen kinetischer Energie und Drehimpulsquadrat spielt in der quantenmechanischen Beschreibung der Teilchenbewegung eine Rolle (s. § 21).

§ 2. Labor-, Schwerpunkts- und Relativsystem. Das klassische Stoßproblem

a) Laborsystem

Unter dem Laborsystem versteht man ein im Labor ortsfestes Koordinatensystem, in dem die Bewegung der Teilchen beschrieben wird. Sein Nullpunkt ruht in bezug auf das Labor. Je nach den physikalischen Gegebenheiten wird man ein kartesisches Koordinatensystem, Zylinderkoordinatensystem oder Kugelkoordinatensystem wählen. Bei allen Messungen von Streuprozessen, Kernreaktionen usw. benutzt man das Laborsystem. Da aber im allgemeinen die theoretischen Berechnungen einfacher im Schwerpunktssystem oder Relativsystem vorgenommen werden, sind die erforderlichen Umrechnungen von großer Wichtigkeit bei der Auswertung der Meßergebnisse.

b) Schwerpunktssystem

Aus der elementaren Mechanik ist bekannt, daß ohne die Einwirkung äußerer Kräfte die Geschwindigkeit $\vec{V}$ des Schwerpunktes der beteiligten Massen erhalten bleibt. Dies gilt z.B. für den Stoß zweier Teilchen, die nur unter dem Einfluß ihrer gegenseitigen (inneren) Kräfte stehen. Dabei ist der Ortsvektor des Schwerpunktes definiert durch

$$\vec{R} = \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2);$$

seine Geschwindigkeit ergibt sich durch Differentiation nach der Zeit zu

$$\vec{V} = \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2).$$

Werden die Geschwindigkeiten der Teilchen nach dem Stoß mit $\vec{v}_1'$ und $\vec{v}_2'$ bezeichnet, so lautet die Aussage des Impulssatzes

$$(m_1 + m_2)\vec{V} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' \quad \text{(Laborsystem).} \qquad (2.1)$$

Führt man nun ein neues Koordinatensystem ein, in dem der bewegte Schwerpunkt den Ursprung bildet, so gilt (s. Fig. 2.1) vor dem Stoß

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \vec{R}_1; \qquad \vec{v}_1 = \vec{V} + \vec{V}_1$$
$$\vec{r}_2 = \vec{R} + \vec{R}_2; \qquad \vec{v}_2 = \vec{V} + \vec{V}_2$$

und nach dem Stoß

$$\vec{v}_1' = \vec{V} + \vec{V}_1'$$
$$\vec{v}_2' = \vec{V} + \vec{V}_2'.$$

Dabei ist $\vec{V}$ die Geschwindigkeit des (bewegten) Schwerpunktes im (ruhenden) Laborsystem.

Einsetzen in (2.1) liefert die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} m_1 \vec{V}_1 &= -m_2 \vec{V}_2 \\ m_1 \vec{V}_1' &= -m_2 \vec{V}_2' \end{aligned}\right\} \text{(Schwerpunktssystem)}. \tag{2.2}$$

Im Schwerpunktssystem bewegen sich also die Teilchen vor und nach dem Stoß mit entgegengesetzt gleichen Impulsen, d.h. im Schwerpunktssystem ist die Impulssumme stets gleich Null:

$$\sum_i \vec{P}_i = 0$$

(Schwerpunktssystem).

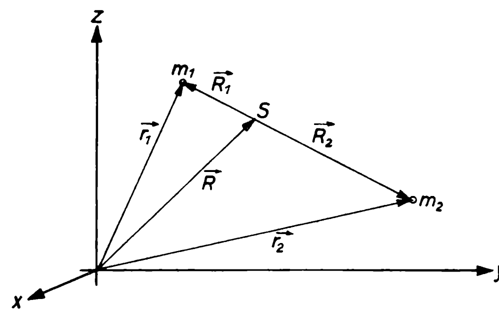


Fig. 2.1. Ortsvektoren im Schwerpunkts- und Laborsystem

Falls das Problem eben * ist, liefert der Impulssatz *zwei* Bestimmungsgleichungen für die *vier* unbekannten Geschwindigkeitskomponenten nach dem Stoß.

Beim *ideal plastischen Stoß* fliegen beide Teilchen nach dem Stoß im Laborsystem vereint weiter. Man erhält die beiden fehlenden Gleichungen zur vollständigen Beschreibung des Problems aus

$$\vec{r}_1' = \vec{r}_2',$$

folglich $\vec{R}_1' = \vec{R}_2'$, also auch $\vec{V}_1' = \vec{V}_2'$, so daß mit (2.2)

$$\vec{V}_1' = \vec{V}_2' = 0. \tag{2.3}$$

Beide Teilchen haben die Geschwindigkeit des Schwerpunktes, sie ruhen im Schwerpunktssystem. Beim plastischen Stoß kann die kinetische Energie nicht erhalten bleiben; der Anteil

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) V^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 \tag{2.4}$$

wird in andere (innere) Energie verwandelt (z.B. Wärme oder Anregungsenergie).

* Beim räumlichen Problem ist zusätzlich die Erhaltung des Bahndrehimpulses zu berücksichtigen.

Beim *ideal elastischen Stoß* bleibt per definitionem die kinetische Energie der Bewegung erhalten. Daraus ergibt sich nur *eine* weitere Gleichung, nämlich

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2'^2 \quad \text{(Laborsystem).}$$

Umformung:

$$m_1(V^2 + 2\vec{V}\vec{V}_1 + V_1^2 - V^2 - 2\vec{V}\vec{V}_1' - V_1'^2)$$
$$= m_2(V^2 + 2\vec{V}\vec{V}_2' + V_2'^2 - V^2 - 2\vec{V}\vec{V}_2 - V_2^2),$$

$$2\vec{V}[\underbrace{m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2}_{=0} - \underbrace{(m_1\vec{V}_1' + m_2\vec{V}_2')}_{=0}] + m_1(V_1^2 - V_1'^2) = m_2(V_2'^2 - V_2^2).$$

Ersetzt man einmal V_1^2 und $V_1'^2$, ein anderes Mal V_2^2 und $V_2'^2$ durch die Beziehungen (2.2), so folgt

$$\left.\begin{aligned} V_1^2 &= V_1'^2 \\ V_2^2 &= V_2'^2 \end{aligned}\right\} \text{(Schwerpunktssystem)}. \qquad (2.5)$$

In Worten: Die Geschwindigkeitsbeträge im Schwerpunktssystem werden durch den elastischen Stoß nicht geändert. Die kinetischen Energien beider Teilchen im Schwerpunktssystem bleiben beim Stoßprozeß einzeln erhalten.

Die Summe der kinetischen Energien im Schwerpunktssystem ist stets kleiner als die Summe der kinetischen Energien im Laborsystem:

$$\tfrac{1}{2} m_1 V_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 V_2^2 = \tfrac{1}{2} m_1(\vec{v}_1 - \vec{V})^2 + \tfrac{1}{2} m_2(\vec{v}_2 - \vec{V})^2$$
$$= \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 - \vec{V}\underbrace{(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2)}_{(m_1+m_2)\vec{V}} + \tfrac{1}{2}(m_1+m_2)V^2.$$

Also

$$(KE)_{SPS} = (KE)_{LS} - (KE)_{\text{Schwerpunktsbewegung}}.$$

Die Differenz ist die — stets positive — kinetische Energie der Schwerpunktsbewegung. Mit (2.4) folgt für die kinetische Energie der Teilchenbewegung im Schwerpunktssystem:

$$(KE)_{SPS} = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 = \frac{1}{2}\,\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2. \qquad (2.6)$$

$(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$ ist die Relativgeschwindigkeit der beiden Teilchen.

Während im plastischen Fall das System nach dem Stoß vollständig beschrieben werden kann, bleibt im elastischen Fall ein Bestimmungsstück offen, nämlich die Richtung der Teilchen nach dem Stoß im Schwerpunkts- (oder Labor-) System. Diese wird durch das Kraftfeld bestimmt, das zwischen den Teilchen wirkt. Die Theorie der Kernphysik muß sich mit der Frage beschäftigen, wie solche Kräfte aussehen, die die experimentellen

Ergebnisse von Stoßversuchen richtig deuten. Da die mathematische Form dieser Kräfte noch nicht a priori bekannt ist, werden wir immer wieder auf dieses Problem zurückkommen müssen.

Viele Beziehungen zwischen Schwerpunktssystem und Laborsystem werden dadurch einfacher, daß man annimmt, das zweite Teilchen sei vor dem Stoß in Ruhe gewesen, also $v_2=0$. Physikalisch ist zwar diese Forderung niemals streng erfüllt, da es in der Natur keine ruhenden Teilchen atomarer oder subatomarer Größe gibt (BROWNsche Molekularbewegung,

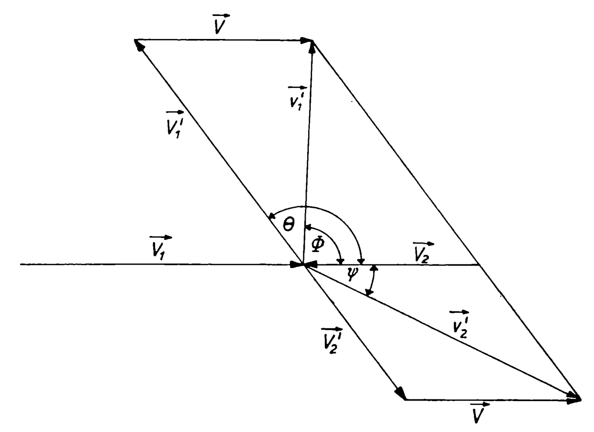


Fig. 2.2. Vektordiagramm der Geschwindigkeiten, wenn Teilchen 2 vor dem Stoß in Ruhe ist

Nullpunktsschwingungen), aber die im folgenden abgeleiteten Beziehungen behalten für $m_1|\vec{v}_1| \gg m_2|\vec{v}_2|$ mit guter Genauigkeit ihre Gültigkeit. Mit $\vec{v}_2=0$ folgt

$$\vec{V}=\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_1,$$

$$\vec{V}_1=\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_1=\frac{m_2}{m_1}\vec{V},$$

$$\vec{V}_2=-\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_1=-\vec{V}.$$

Eine Beziehung zwischen dem Ablenkwinkel θ im Schwerpunktssystem und dem Ablenkwinkel Φ im Laborsystem gewinnt man durch die Betrachtung der Fig. 2.2, in der die obigen Ergebnisse veranschaulicht sind. Es gilt nach dem Sinussatz im oberen Dreieck

$$\frac{\sin(\theta-\Phi)}{\sin\Phi}=\frac{|\vec{V}|}{|\vec{V}_1'|}=\frac{m_1}{m_2},$$

umgeformt:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\Phi &= \frac{\sin\theta}{\frac{m_1}{m_2}+\cos\theta} \\ \text{bzw.}\qquad \cos\theta &= -\frac{m_1}{m_2}\sin^2\Phi+\cos\Phi\sqrt{1-\left(\frac{m_1}{m_2}\sin\Phi\right)^2}\,. \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

Beachte: Diese Formeln gelten nur für $\vec{v}_2=0$.

Aus Fig. 2.2 kann man sich weiterhin die Relationen verschaffen:

$$\left.\begin{aligned} (KE_1')_{LS} &= \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 = \frac{1}{2}m_1\left[V_1'^2+V^2-2V_1'V\cos(\pi-\theta)\right] \\ &= \frac{1}{2}m_1 v_1^2\left[\frac{m_1^2+m_2^2}{(m_1+m_2)^2}+2\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2}\cos\theta\right] \\ (KE_1')_{LS} &= (KE_1)_{LS}\left[1-2\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2}(1-\cos\theta)\right] \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

und

$$\left.\begin{aligned} (KE_2')_{LS} &= \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2}m_2(V_2'^2+V^2-2V_2'V\cos\theta) \\ (KE_2')_{LS} &= (KE_1)_{LS}\frac{2m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2}(1-\cos\theta)\,. \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

In (2.8) und (2.9) sind die kinetischen Energien der Teilchen nach dem Stoß im Laborsystem durch die Einfallsenergie und den Streuwinkel θ im Schwerpunktssystem ausgedrückt. Entsprechende Formeln, die den Laborwinkel Φ enthalten, gewinnt man durch die Umrechnung mittels (2.7).

Ist $\vec{v}_2\neq 0$ vor dem Stoß, dann wird die Beziehung zwischen Φ und θ viel komplizierter [s. unten im Anschluß an (2.12)].

c) Relativsystem

Die insgesamt 6 Ortskoordinaten zweier Teilchen werden durch die 3 Koordinaten des Schwerpunkts

$$\vec{R}=\frac{1}{m_1+m_2}(m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2)$$

und durch die 3 Relativkoordinaten

$$\vec{r}=\vec{r}_1-\vec{r}_2$$

ausgedrückt. Dabei ist $\vec{r}$ ein Vektor, der vom Teilchen 2 zum Teilchen 1 zeigt. Im Relativsystem kann man sich also das Teilchen 2 in Ruhe am Ursprung denken und die relative Bewegung des Teilchens 1 gegen das Teilchen 2 (nicht gegen den Schwerpunkt!) betrachten. Nach (2.1) gilt

$$(m_1+m_2)\vec{V}=m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=m_1\vec{v}_1'+m_2\vec{v}_2'.$$

Die Relativgeschwindigkeiten vor und nach dem Stoß sind

$$\begin{aligned}\vec{v}&=\vec{v}_1-\vec{v}_2\\ \vec{v}'&=\vec{v}_1'-\vec{v}_2'.\end{aligned}$$

Auflösung ergibt

$$\begin{aligned}\vec{v}_1&=\vec{V}+\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v}; &\quad \vec{v}_1'&=\vec{V}+\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v}'\\ \vec{v}_2&=\vec{V}-\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}; &\quad \vec{v}_2'&=\vec{V}-\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}'.\end{aligned}$$

Der *Impuls* des Teilchens 1 läßt sich mit der Abkürzung

$$\mu=\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \quad \text{(„reduzierte Masse")}$$

schreiben:

$$\left.\begin{aligned}\text{Vor dem Stoß: } \vec{p}_1&=m_1\vec{v}_1=m_1\vec{V}+\mu\vec{v}\\ \text{Nach dem Stoß: } \vec{p}_1'&=m_1\vec{v}_1'=m_1\vec{V}+\mu\vec{v}'.\end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

Für das Teilchen 2 gilt entsprechend

$$\begin{aligned}\text{Vor dem Stoß: } \vec{p}_2&=m_2\vec{v}_2=m_2\vec{V}-\mu\vec{v}\\ \text{Nach dem Stoß: } \vec{p}_2'&=m_2\vec{v}_2'=m_2\vec{V}-\mu\vec{v}'.\end{aligned}$$

Die *kinetischen Energien* sind vor dem Stoß

$$\begin{aligned}(KE_1)_{LS}&=\frac{1}{2}m_1V^2+\mu\vec{V}\vec{v}+\frac{1}{2}\frac{m_2}{m_1+m_2}\mu v^2\\ (KE_2)_{LS}&=\frac{1}{2}m_2V^2-\mu\vec{V}\vec{v}+\frac{1}{2}\frac{m_1}{m_1+m_2}\mu v^2,\end{aligned}$$

für ihre Summe ergibt sich [vgl. auch (2.4)]:

$$(KE_1)_{LS}+(KE_2)_{LS}=\underbrace{\tfrac{1}{2}(m_1+m_2)V^2}_{\substack{KE\text{ der Schwer-}\\ \text{punktsbewegung}}}+\underbrace{\tfrac{1}{2}\mu v^2}_{\substack{KE\text{ der}\\ \text{Relativ-}\\ \text{bewegung}}}. \tag{2.11}$$

Die Erhaltung der kinetischen Energie beim elastischen Stoß, betrachtet im Laborsystem, verlangt, daß

$$(KE_1')_{LS}+(KE_2')_{LS}=\tfrac{1}{2}(m_1+m_2)\,V^2+\tfrac{1}{2}\mu v^2$$

ist. Das bedeutet, daß auch im Relativsystem die kinetische Energie erhalten wird, also

$$v^2=v'^2. \tag{2.12}$$

$\vec{v}$ kann daher beim Stoß nur die Richtung ändern, nicht den Betrag. Hieraus folgt die Konstruktion der Fig. 2.3.

Die kinetische Energie der Relativbewegung ist stets *kleiner* als die kinetische Energie im Laborsystem, und zwar um den Betrag der kinetischen Energie der Schwerpunktsbewegung. Ein Vergleich von (2.11) mit (2.6) zeigt, daß die kinetische Energie der Relativbewegung gleich der Summe der kinetischen Energien der Teilchen im Schwerpunktssystem ist.

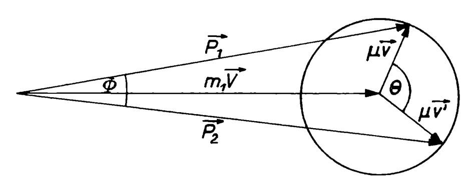


Fig. 2.3. Impulsdiagramm beim Stoß zweier Teilchen, wenn Teilchen 2 sich vor dem Stoß bewegt

Der durch den Stoß verursachte Ablenkwinkel im Relativsystem (d.i. die Richtung des Vektors $\vec{v}'=\vec{v}_1'-\vec{v}_2'$ gegen die Richtung von $\vec{v}$) ist gleich dem Ablenkwinkel im Schwerpunktssystem*, also dem Winkel zwischen $\vec{V}_1$ und $\vec{V}_1'$, denn es gilt allgemein

$$\vec{V}_1=\frac{m_2}{m_1+m_2}\,\vec{v} \quad \text{und} \quad \vec{V}_1'=\frac{m_2}{m_1+m_2}\,\vec{v}'.$$

Eine Beziehnng zwischen den Ablenkwinkeln Φ im Laborsystem und θ im Relativsystem läßt sich aus den Gleichungen (2.10) und (2.12) herleiten (s. Fig. 2.3). Sie lautet explizit:

$$(p_1^2+m_1^2V^2-\mu^2v^2)\operatorname{tg}\Phi$$
$$=A+\frac{2p_1^2[(p_1^2-m_1^2V^2-\mu^2v^2)\sin\theta-A\cos\theta]}{p_1^2(1+\cos\theta)+(m_1^2V^2-\mu^2v^2)(1-\cos\theta)+A\sin\theta}$$

mit

$$A^2=(2m_1V\mu v)^2-(m_1^2V^2+\mu^2v^2-p_1^2)^2.$$

Für $v_2=0$ geht diese Formel in (2.7) über.

* Viele Autoren bezeichnen das Relativsystem ebenfalls als Schwerpunktssystem, was zu mancherlei Konfusion Anlaß geben kann.

Die *Bahndrehimpulse* im Laborsystem lassen sich ebenfalls durch Schwerpunkts- und Relativkoordinaten ausdrücken:

$$(\vec{L}_1)_{LS} = m_1 \vec{r}_1 \times \vec{v}_1 = m_1 \left(\vec{R} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}\right) \times \left(\vec{V} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v}\right)$$

$$= m_1 \vec{R} \times \vec{V} + \mu(\vec{r} \times \vec{V} + \vec{R} \times \vec{v}) + \frac{m_1 m_2^2}{(m_1+m_2)^2}\vec{r} \times \vec{v}$$

$$(\vec{L}_2)_{LS} = m_2 \vec{r}_2 \times \vec{v}_2 = m_2 \left(\vec{R} - \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}\right) \times \left(\vec{V} - \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}\right)$$

$$= m_2 \vec{R} \times \vec{V} - \mu(\vec{r} \times \vec{V} + \vec{R} \times \vec{v}) + \frac{m_1^2 m_2}{(m_1+m_2)^2}\vec{r} \times \vec{v}.$$

Für die Summe der Bahndrehimpulse von Teilchen 1 und Teilchen 2 im Laborsystem ergibt sich

$$(\vec{L}_1)_{LS} + (\vec{L}_2)_{LS} = \underbrace{(m_1+m_2)\vec{R} \times \vec{V}}_{\substack{\text{Bahndrehimpuls des} \\ \text{Schwerpunkts relativ zum} \\ \text{Ursprung des} \\ \text{Laborsystems}}} + \underbrace{\mu \vec{r} \times \vec{v}}_{\substack{\text{Bahndreh-} \\ \text{impuls der} \\ \text{Relativ-} \\ \text{bewegung}}}. \tag{2.13}$$

Die Gleichungen (2.11) und (2.13) zeigen, daß die totale kinetische Energie und der Gesamtbahndrehimpuls, ebenso wie die Orts- und Geschwindigkeits-Vektoren, in jeweils einen Anteil der Schwerpunktsbewegung und einen Anteil der Relativbewegung aufgespaltet werden können. Für viele Probleme ist die Bewegung des Schwerpunktes uninteressant, so daß es genügt, die Relativbewegung zu betrachten. Im Relativsystem erscheint die Bewegung der beiden Teilchen so, als wäre das Teilchen 2 in Ruhe und als hätte das Teilchen 1 die Masse μ. Ein Zweiteilchenproblem kann damit auf ein Einteilchenproblem zurückgeführt werden. Diese Betrachtungsweise gestattet, viele theoretische Überlegungen sehr viel einfacher im Relativsystem als im Laborsystem durchzuführen. Die im Laborsystem gewonnenen Meßergebnisse müssen dann aber ins Relativsystem transformiert werden, bevor sie mit der Theorie verglichen werden können.

Wenn die Kraft zwischen beiden Teilchen, dargestellt als Gradient eines Kraftpotentials U, nur vom Abstand beider Teilchen abhängt, läßt sich auch die SCHRÖDINGER-Gleichung (s. § 20), die die Bewegung atomarer und subatomarer Teilchen beschreibt, in Schwerpunkts- und Relativkoordinaten separieren. Für zwei Teilchen hat sie die Form

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\Delta^{(1)} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\Delta^{(2)} + U_{(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)}\right]\Psi = E\,\Psi. \tag{2.14}$$

Dabei ist Δ der LAPLACE-Operator: In kartesischen Koordinaten ist

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Der räumliche Anteil der Funktion Ψ hängt zunächst von den 6 Koordinaten (x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2) ab. Durch die Transformation auf Schwerpunkts- und Relativkoordinaten wird

$$\frac{\partial x}{\partial x_1}=1 \qquad \frac{\partial x}{\partial x_2}=-1$$

$$\frac{\partial X}{\partial x_1}=\frac{m_1}{m_1+m_2}; \qquad \frac{\partial X}{\partial x_2}=\frac{m_2}{m_1+m_2}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}=\frac{\partial \Psi}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x_1}+\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_1}=\frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{\partial \Psi}{\partial X}+\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2}=\frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}$$

$$=\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2}+2\frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X\,\partial x}+\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}.$$

Ebenso

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2}=\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2}-2\frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X\,\partial x}+\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}.$$

Entsprechende Ausdrücke ergeben sich für die Ableitungen nach y und z, so daß

$$-\frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{1}{m_1}\Delta^{(1)}+\frac{1}{m_2}\Delta^{(2)}\right)$$

$$=-\frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{m_1}{(m_1+m_2)^2}\Delta_{SPS}+\frac{1}{m_1}\Delta_{\mathrm{Rel}}+\frac{m_2}{(m_1+m_2)^2}\Delta_{SPS}+\frac{1}{m_2}\Delta_{\mathrm{Rel}}\right)$$

$$=-\frac{\hbar^2}{2}\frac{1}{m_1+m_2}\Delta_{SPS}-\frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\Delta_{\mathrm{Rel}}.$$

Die SCHRÖDINGER-Gleichung wird dann mit $\frac{1}{\mu}=\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}$:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2}\frac{1}{m_1+m_2}\Delta_{SPS}-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta_{\mathrm{Rel}}+U_{(r)}\right]\Psi=E\Psi.$$

Separationsansatz:

$$\Psi=\varphi_{(X,Y,Z)}\,\psi_{(x,y,z)}.$$

Eingesetzt und durch $(\varphi\psi)$ geteilt ergibt

$$-\frac{\hbar^2}{2}\frac{1}{m_1+m_2}\frac{\Delta\varphi}{\varphi}-E=\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\Delta\psi}{\psi}-U_{(r)},$$

wobei jetzt $\Delta\varphi=\Delta_{SPS}\,\varphi_{(X,Y,Z)}$ bedeutet.

Damit ist eine Variablentrennung gelungen. Beide Seiten müssen stets denselben Wert haben, d.h. gleich einer Konstanten sein. Wir nennen zweckmäßigerweise diese Konstante $(-E_{\mathrm{Rel}})$ und führen die weitere Abkürzung

$$E_{SPS}=E-E_{\mathrm{Rel}}$$

ein. Dann ergeben sich die beiden Gleichungen

$$-\frac{\hbar^2}{2(m_1+m_2)}\,\Delta\,\varphi = E_{SPS}\,\varphi \qquad \text{(Schwerpunktsbewegung)}, \qquad (2.15)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\,\Delta\,\psi + U_{(r)}\,\psi = E_{\mathrm{Rel}}\,\psi \qquad \text{(Relativbewegung)}. \qquad (2.16)$$

Die erste dieser Gleichungen beschreibt die kräftefreie Schwerpunktsbewegung, die zweite die Relativbewegung der Teilchen unter dem Einfluß ihrer inneren Kräfte. Beachte, daß die erste Gleichung (2.15) die Form der SCHRÖDINGER-Gleichung *eines* freien Teilchens der Masse (m_1+m_2) (Gesamtmasse) ohne Kraftpotential, die zweite Gleichung (2.16) die Form der SCHRÖDINGER-Gleichung *eines* Teilchens der Masse μ unter Einwirkung des Potentials $U_{(r)}$ hat. Dies ist ein Beispiel dafür, daß theoretische Berechnungen des Zweiteilchenproblems im allgemeinen einfacher im Relativsystem auszuführen sind als im Laborsystem. Denn die Lösung von (2.16) verlangt naturgemäß viel weniger mathematischen Aufwand als die Lösung der Gleichung (2.14), bei der die gesuchte Funktion Ψ von doppelt so vielen Variablen abhängt.

II. Zentralkraftproblem (klassisch)

Bei vielen kernphysikalischen Prozessen kann man von der Wirkung äußerer Kräfte auf die Teilchen absehen bzw. die Schwerpunktsbewegung gesondert behandeln. Als innere Kräfte zwischen atomaren und subatomaren Teilchen kommen häufig Zentralkräfte in Betracht, das sind solche Kräfte, die nur vom Abstand zwischen beiden Teilchen abhängen und die Richtung der Verbindungslinie der Teilchen haben (z.B. Massenanziehung, COULOMB-Kraft). Obwohl die spezifischen Kernkräfte sicher keine reinen Zentralkräfte sind, ist dieser Fall doch von großer Wichtigkeit für die Kernphysik, weil er mathematisch leicht faßbar ist und als Näherung gern verwandt wird.

In § 3 werden die KEPLERschen Gesetze für die Teilchenbewegung unter der Einwirkung von Zentralkräften hergeleitet und in § 4 das Streuproblem und der Begriff des Wirkungsquerschnitts ausführlich behandelt. In § 5 entwickeln wir das klassische Atommodell von BOHR aus der Annahme einer Quantelung des Drehimpulses.

§ 3. KEPLERsche Gesetze

a) Herleitung der KEPLERschen Gesetze

Wir betrachten zwei Teilchen, die nur unter dem Einfluß ihrer inneren Kräfte stehen (z.B. Massenanziehung, COULOMB-Kräfte u.a.). Die Kraft zwischen den Teilchen hänge nur vom Abstand der beiden Teilchen

ab und habe die Richtung ihrer Verbindungslinie. Eine eventuelle Schwerpunktsbewegung kann man dadurch abspalten, daß man als Koodinatensystem das Schwerpunkts- oder das Relativsystem wählt. Wir wollen die Bewegung im Relativsystem beschreiben.

Das NEWTONsche Grundgesetz ist

$$\vec{K} = \dot{\vec{p}}.$$

Es nimmt für den vorliegenden Fall des Fehlens äußerer Kräfte (auch keine Schwerpunktsbewegung, also $\dot{\vec{V}} = 0$) im Relativsystem mit (2.10) und der Annahme $\mu = \text{const}$ die Form an

$$\vec{K} = g_{(r)} \frac{\vec{r}}{r} = \mu \ddot{\vec{r}}. \tag{3.1}$$

Der Bahndrehimpuls im Relativsystem ist nach (2.13)

$$\vec{L} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}},$$

seine zeitliche Ableitung wird mit (3.1)

$$\dot{\vec{L}} = \mu \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \mu \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times g_{(r)} \frac{\vec{r}}{r} = 0,$$

also ist für Zentralkraftfelder ganz allgemein

$$\vec{L} = \text{zeitlich konstant}. \tag{3.2}$$

Dieser „Erhaltungssatz des Bahndrehimpulses“ verleiht dem Bahndrehimpuls seine große Bedeutung in der Teilchenmechanik. Wenn zur Zeit $t = 0$ der Bahndrehimpuls gemessen und seine Richtung als z-Richtung festgelegt wird, ist mit (1.4) auch für jeden späteren Zeitpunkt

$$L_x = L_y = 0; \qquad L_z = \mu \rho^2 \dot{\varphi} = \text{const}.$$

Die Bewegung bleibt in der x-y-Ebene („ebene Bewegung“). Da $\mu = \text{const}$ angenommen wurde, ist also

$$\rho^2 \dot{\varphi} = c = \text{const}. \tag{3.3}$$

Dies ist gleichbedeutend mit der Aussage des „Flächensatzes“ (2. KEPLERsches Gesetz): Der Ortsvektor überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen. Veranschaulichung: Die in der Zeit dt überstrichene Fläche ist (s. Fig. 3.1)

$$\frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v}\, dt = \frac{1}{2} \frac{\vec{L}}{\mu} dt = \frac{1}{2} c \vec{k}\, dt,$$

so daß mit (3.3) die „Flächengeschwindigkeit“ $\frac{1}{2} c \vec{k}$ konstant ist.

Während der Flächensatz für jedes Zentralkraftfeld gilt, kann man die anderen KEPLERschen Gesetze nur unter spezielleren Voraussetzungen herleiten. So folgt das 1. KEPLERsche Gesetz, das besagt, daß die Bahnkurven Kegelschnitte sind, nur unter der Annahme, daß die Kraft umgekehrt proportional dem Quadrat des Abstandes der beiden Teilchen ist:

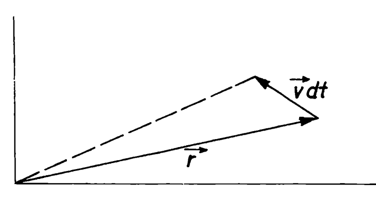


Fig. 3.1. Zur Definition der Flächengeschwindigkeit

$$g_{(r)} = -\frac{k}{r^2}. \tag{3.4}$$

Eine solche Gesetzmäßigkeit liegt z.B. vor im Falle des Gravitationsgesetzes mit

$$k = \gamma\, m_1\, m_2; \qquad \gamma = 6{,}667 \cdot 10^{-8}\, \frac{\text{cm}^3}{\text{g sec}^2} \tag{3.5}$$

(γ = allgemeine Gravitationskonstante) und im Falle des COULOMBschen Gesetzes der Elektrostatik

$$k = -\frac{Z_1\, Z_2\, e^2}{4\pi\, \varepsilon_0} \tag{3.6}$$

($Z_i e$ = Ladung des i-ten Teilchens, e = Elementarladung $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Amp sec, $\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} = \frac{1}{9} \cdot 10^{-9}\, \frac{\text{Amp sec}}{\text{Volt m}}$). $k > 0$ bedeutet Anziehung, $k < 0$ Abstoßung.

Dann ist

$$\mu\, \ddot{\vec{r}} = -\frac{k}{r^2}\, \frac{\vec{r}}{r}.$$

In der Ebene der Bewegung ergibt sich in ebenen Polarkoordinaten (d.i. der ρ-φ-Anteil von Zylinderkoordinaten) nach (1.2)

$$\mu(\ddot{\rho} - \rho\, \dot{\varphi}^2) = -\frac{k}{\rho^2}$$

und

$$2\dot{\rho}\, \dot{\varphi} + \rho\, \ddot{\varphi} = 0.$$

Die zweite Gleichung läßt sich umformen zu

$$\frac{1}{\rho}\, \frac{d}{dt}(\rho^2\, \dot{\varphi}) = 0$$

und ist identisch mit dem Flächensatz. Die erste Gleichung hat die Lösung (Bestätigung durch Einsetzen)

$$\rho = \frac{l}{1+\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)}$$

mit $l = \frac{\mu c^2}{k}$ und $\varepsilon = \beta\frac{\mu c^2}{k}$. β und φ_0 sind Integrationskonstanten. Setzt man $\varphi = 0$ am Perihel (Minimum von ρ, d.h. derjenige Bahnpunkt des

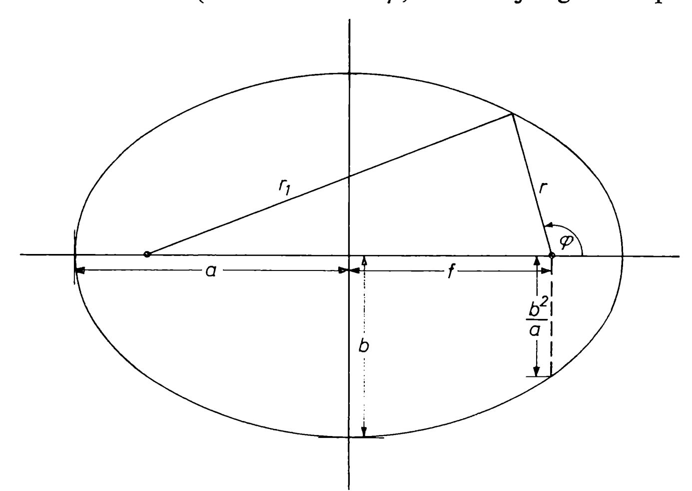


Fig. 3.2. Bestimmungsgrößen der Ellipse

Teilchens 1, der dem Teilchen 2 am nächsten ist), so wird $\varphi_0 = 0$. Damit ist schließlich

$$\rho = \frac{l}{1+\varepsilon\cos\varphi}. \tag{3.7}$$

Die Gleichung beschreibt einen Kegelschnitt (1. KEPLERsches Gesetz), in dessen einem Brennpunkt sich das Kraftzentrum befindet.

$\varepsilon = 0$:	Kreis,
$0 < \varepsilon < 1$:	Ellipse,
$\varepsilon = 1$:	Parabel,
$\varepsilon > 1$:	Hyperbel.

Für die Ellipse sei diese Behauptung plausibel gemacht (s. Fig. 3.2). Die Definitionsgleichung für die Ellipse lautet

$$r + r_1 = 2a.$$

Kosinussatz:

$$r_1^2 = r^2 + (2f)^2 - 4rf\cos(\pi-\varphi)$$
$$= r^2 + 4f^2 + 4rf\cos\varphi$$

Eingesetzt:

$$r=\frac{a^2-f^2}{a+f\cos\varphi}=\frac{b^2/a}{1+\frac{f}{a}\cos\varphi}.$$

Durch Vergleich folgt die Deutung der Größen l und ε:

$$l=\frac{b^2}{a}=\frac{\mu c^2}{k} \qquad \left(\text{„Semi latus rectum“, es ist } \rho=l \text{ für } \varphi=\frac{\pi}{2}\right) \tag{3.8}$$

$$\varepsilon=\frac{f}{a}=\beta\frac{\mu c^2}{k} \qquad (\text{„Exzentrizität“}). \tag{3.9}$$

Da $f\leqq a$, ist für die Ellipse $0<\varepsilon<1$ und für den Kreis $\varepsilon=1$.

Der Vollständigkeit halber wollen wir das 3. KEPLERsche Gesetz („Das Quadrat der Umlaufperiode ist proportional der dritten Potenz der großen Halbachse der Bahn“) herleiten, das nur für Kreis- und Ellipsenbahnen gilt. Die Fläche der Ellipse ist πab und ist gleich dem Produkt aus Flächengeschwindigkeit und Periode

$$\tfrac{1}{2}cT=\pi a b.$$

Mit (3.8) folgt

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}}\,a^{\frac{3}{2}}.$$

b) Energiebetrachtung

Da die Kraft (3.4) sich als negativer Gradient eines Kraftpotentials $U_{(r)}$ darstellen läßt,

$$\vec{K}=-\frac{k}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}=-\operatorname{grad}U_{(r)}$$

mit

$$U_{(r)}=-\frac{k}{r}, \tag{3.10}$$

ist sie konservativ, d.h. die Summe aus kinetischer und potentieller Energie eines sich in diesem Kraftfeld bewegenden Teilchens bleibt zeitlich konstant.

$$E=KE+PE=\frac{1}{2}\mu v^2-\frac{k}{r}=\frac{1}{2}\mu(\dot\rho^2+\rho^2\dot\varphi^2)-\frac{k}{\rho}.$$

Dabei ist mit (3.7) und (3.3)

$$\dot\rho=\frac{\varepsilon l\dot\varphi\sin\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}=\frac{\varepsilon}{l}\rho^2\dot\varphi\sin\varphi=\frac{\varepsilon c}{l}\sin\varphi,$$

$$\rho^2\dot\varphi^2=\frac{c^2}{\rho^2}.$$

Die Konstante E kann an einem beliebigen Bahnpunkt ermittelt werden, z.B. bei $\varphi=\pi/2$. Dann ist

$$\left.\begin{aligned} E&=\frac{1}{2}\mu\left[\left(\frac{\varepsilon c}{l}\right)^2+\frac{c^2}{l^2}\right]-\frac{k}{l}=\frac{1}{2}\frac{\mu\varepsilon^2c^2}{l}\frac{k}{\mu c^2}+\frac{1}{2}\frac{\mu c^2}{l}\frac{k}{\mu c^2}-\frac{k}{l}\\ E&=\frac{1}{2}\frac{k}{l}(\varepsilon^2-1). \end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

Es ist $E<0$ für $\varepsilon<1$, das bedeutet: Auf einer Kreis- oder Ellipsenbahn ist das Teilchen *gebunden.* Das Teilchen kann nie völlig von seinem Kraftzentrum entkommen, weil seine Gesamtenergie dazu nicht ausreicht. Denn $E<0$ bedeutet $KE+PE<0$, d.h. in unserem Falle $\frac{1}{2}\mu v^2<\frac{k}{r}$. Da die kinetische Energie stets positiv ist, kann dies für $r\to\infty$ nicht erfüllt sein. Wenn andererseits das Teilchen ins Unendliche entkommen (frei-kommen) soll, muß $E\geqq 0$ sein, d.h. das Teilchen muß sich auf einer Parabel- oder Hyperbelbahn bewegen. Dann muß das Teilchen aber auch beim Anflug aus dem Unendlichen schon mit einer Geschwindigkeit $v\geqq 0$ herangekommen sein. $E\geqq 0$ beschreibt also einen Streuprozeß des Teilchens.

Für die Ellipsenbahn ergibt sich aus (3.8), (3.9) und (3.11)

$$E=-\frac{1}{2}\frac{k}{a} \qquad \text{(Ellipsenbahn)}, \tag{3.12}$$

d.h. die Gesamtenergie hängt *nur* von der großen Halbachse der Ellipse ab. Alle Ellipsen gleicher großer Halbachse a, aber verschiedener kleiner Halbachse b, haben die gleiche Energie E („Energieentartung" in b).

§ 4. RUTHERFORDsche Streuformel und Wirkungsquerschnitt

a) Herleitung der RUTHERFORDschen Streuformel

Wird ein geladenes Teilchen (Ladung ze) auf ein anderes Teilchen der Ladung Ze geschossen, so fliegt es nach (3.7) auf einer Hyperbelbahn mit der Gesamtenergie im Relativsystem

$$E=\tfrac{1}{2}\mu v_0^2>0, \quad \text{also} \quad \varepsilon>1$$

(v_0 = Geschwindigkeit des anfliegenden Teilchens weit weg vom Streuzentrum). In großer Entfernung vom Streuzentrum ist asymptotisch $\varphi=\alpha/2$ (s. Fig. 4.1). Damit ergibt sich aus (3.7)

$$1+\varepsilon\cos\frac{\alpha}{2}=0$$

und daraus

$$\varepsilon^2 - 1 = \frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} - 1 = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Mit (3.11) und (3.8) folgt

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{2lE}{k} = l \frac{\mu v_0^2}{k} = \frac{\mu^2 c^2 v_0^2}{k^2}.$$

μc kann durch den Bahndrehimpuls des einfallenden Teilchens im Relativsystem ausgedrückt werden (q = Stoßparameter):

$$|\vec{L}| = \mu c = \mu v_0 q.$$

Der Ablenkwinkel ist

$$\theta = \pi - \alpha,$$

mit $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2}$ folgt dann insgesamt

$$\pm \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2} = \frac{\mu v_0^2 q}{k} = \frac{\mu c^2}{kq}. \quad (4.1)$$

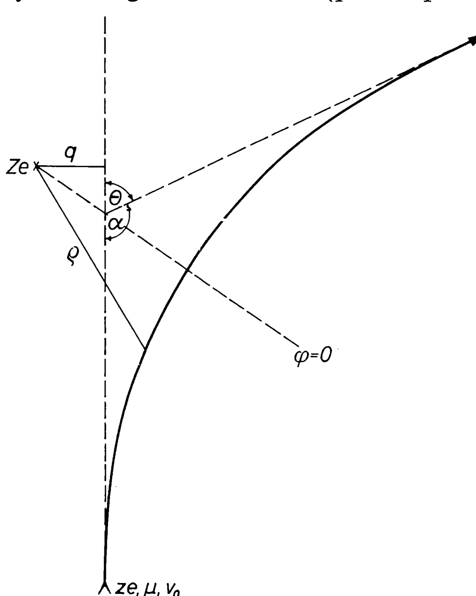


Fig. 4.1. Hyperbelbahn eines anfliegenden Teilchens der Ladung *ze* bei der Streuung an einem Zentrum der Ladung *Ze*, dargestellt im Relativsystem. Der Streuwinkel ist $\theta = \pi - \alpha$

Diese Beziehung stellt den theoretischen Zusammenhang zwischen dem Ablenkwinkel θ im Schwerpunktssystem und dem Stoßparameter q her. Zur Umrechnung auf das Laborsystem benutzt man (2.7), wenn das Stoßzentrum vor dem Stoß in Ruhe war.

Als nächstes wollen wir die Wahrscheinlichkeit dafür betrachten, daß ein Streuprozeß unter dem Ablenkwinkel θ im Schwerpunktssystem auftritt. Damit bei einem Streuprozeß eine Ablenkung in den Winkelbereich zwischen θ und $\theta + d\theta$ zustandekommt, muß das einfallende Teilchen das Streuzentrum mit einem Stoßparameter zwischen q und $q + dq$ anfliegen. Das ankommende Teilchen kann mit einer Gewehrkugel verglichen werden, die senkrecht auf eine Zielscheibe geschossen wird. Jedem „Ring" der Zielscheibe (Radius q, $q + dq$) kann wegen (4.1) ein bestimmter Bereich θ, $\theta + d\theta$ eindeutig zugeordnet werden. Die Wahrscheinlichkeit, einen Ablenkwinkel zwischen θ und $\theta + d\theta$ zu erleiden, kann man dann für jedes Teilchen und

pro Streuzentrum durch die Fläche $d\sigma$ pro cm^2 ausdrücken, wobei

$$d\sigma = 2\pi q\, dq \tag{4.2}$$

und q eine Funktion von θ ist. Die Größe $d\sigma$ wird als „differentieller Wirkungsquerschnitt" bezeichnet, die Größe

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega}\, d\Omega$$

als „integraler Wirkungsquerschnitt" ($d\Omega$ = Raumwinkelelement = $2\pi \sin \theta\, d\theta$). $d\sigma/d\Omega$ ist die Zahl der pro Streuzentrum in das Raumwinkelelement gestreuten Teilchen, dividiert durch den Strom der einfallenden Teilchen.

Aus (4.1) und (4.2) folgt

$$d\sigma = \pi\, d(q^2) = \pi \frac{k^2}{\mu^2 v_0^4}\, d\left(\operatorname{cotg}^2 \frac{\theta}{2}\right) = -\frac{\pi k^2}{\mu^2 v_0^4} \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}}\, d\theta .$$

Das Minuszeichen bedeutet, daß bei Vergrößerung des Winkels θ der Wirkungsquerschnitt kleiner wird; es kann weggelassen werden.

Mit $d\Omega = 2\pi \sin\theta\, d\theta = 4\pi \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}\, d\theta$, $E = \frac{1}{2}\mu v_0^2$ und $k = -\frac{z Z e^2}{4\pi \varepsilon_0}$ ergibt sich

$$d\sigma = \frac{z^2 Z^2 e^4}{(4\pi \varepsilon_0)^2 \cdot 16 E^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}\, d\Omega \quad \text{(RUTHERFORDsche Streuformel).} \tag{4.3}$$

b) Diskussion der Streuformel

1. $d\sigma/d\Omega$ ist proportional zu $z^2 Z^2$, daher eignen sich Streumessungen mit Teilchen bekannter Ladung zur Bestimmung der Ladung Z der Streuzentren. Ist andererseits die Ladung der Streuzentren bekannt, so kann man auf die Ladung z der Geschosse schließen (allerdings nicht auf das Ladungsvorzeichen).

2. Der Streuquerschnitt nimmt mit zunehmender Energie der einfallenden Teilchen proportional zu $1/E^2$ ab, langsame einfallende Teilchen erleiden also mehr Ablenkung als schnelle *.

3. Die Winkelabhängigkeit wird durch den Faktor $1/\sin^4 \frac{\theta}{2}$ beschrieben; es resultiert eine Streuverteilung, die bei gegebener Anfangsenergie E kleine Vorwärtswinkel stark bevorzugt enthält. Beachte, daß θ der Ablenkwinkel

* Relativistisch steht im Nenner nicht $16E^2$ sondern $4p^2v^2$.

im Schwerpunktssystem ist; die im Labor beobachtete Streuverteilung ergibt sich erst nach Umrechnung mit (2.7). Dies wird besonders wichtig, wenn die Masse der einfallenden Teilchen *nicht* klein ist gegen die Masse der Streuzentren.

4. Integration über θ ergibt den totalen Wirkungsquerschnitt oder den Bruchteil der einfallenden Teilchen, die aus dem Strahl mit Winkeln $>\theta_1$ herausgestreut werden:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{(\theta_1)} &= \int_{\theta_1}^{\pi} \frac{d\sigma}{d\theta}\, d\theta = -\int_{\operatorname{cotg}^2 \frac{\theta_1}{2}}^{\operatorname{cotg}^2 \frac{\pi}{2}} \frac{d\sigma}{d\left(\operatorname{cotg}^2 \frac{\theta}{2}\right)}\, d\left(\operatorname{cotg}^2 \frac{\theta}{2}\right)\\ &= \frac{\pi k^2}{\mu^2 v_0^4} \operatorname{cotg}^2 \frac{\theta_1}{2}.\end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

Für $\theta_1 = 90°$ folgt mit $\operatorname{cotg} \frac{\pi}{4} = 1$ der Wirkungsquerschnitt für Rückstreuung zu

$$\sigma_{\text{Rückstreuung}} = \pi \frac{k^2}{4E^2}; \tag{4.5}$$

er hat die Größe eines Kreisscheibchens mit dem Radius $r = \frac{k}{2E}$. r ist die Hälfte des Abstandes a, bis zu dem sich das geladene Teilchen dem Zentrum nähern kann:

$$\frac{1}{2} \mu v^2 = \frac{k}{a},$$

also $a = 2r$.

Die RUTHERFORD-Formel läßt sich unter Benutzung der Größe a in einer einfachen Form schreiben:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{RUTHERFORD}} = \left|\frac{a}{4 \sin^2 \frac{\theta}{2}}\right|^2.$$

5. Für $\theta_1 \to 0$ ist σ divergent! $\theta_1 \to 0$ entspricht großen Stoßparametern; die Divergenz bedeutet, daß jedes Teilchen an jedem auch noch so weit entfernten Streuzentrum einen Streuprozeß erleidet, da sich ja das COULOMB-Feld bis zu unendlicher Entfernung erstreckt. Bei Streuung an Atomkernen darf man aber nicht unendlich große Stoßparameter q zulassen, sondern wird sinnvollerweise bei $q \approx$ Atomradius ($\approx 10^{-8}$ cm) abschneiden, da die COULOMB-Felder der Kerne außerhalb durch die Elektronenhüllen völlig abgeschirmt sind.

Durch die Übereinstimmung der experimentellen Streuverteilung (z.B. von α-Teilchen [He^4-Kernen, $z = 2$] an einer Goldfolie) mit der RUTHER-

FORD-Formel wurde nahegelegt, daß man sich im Zentrum des Atoms einen Kern von kleiner Ausdehnung und positiver Ladung $(+Ze)$ vorstellen kann. Da Atome als ganzes elektrisch neutral sind, ist der Kern von Z Elektronen (Ladung $-e$) umgeben (vgl. § 5). Aus Abweichungen bei großen Streuwinkeln kann man auf Abweichungen des Kraftgesetzes von der COULOMB-Form und damit auf die Größe des Kerns schließen; experimentell ergeben sich Kerndurchmesser von einigen 10^{-13} cm (vgl. § 34 und § 48).

c) Allgemeines über Wirkungsquerschnitte

Wir wollen uns noch etwas eingehender mit dem Begriff des Wirkungsquerschnitts beschäftigen. Der Wirkungsquerschnitt ist allgemein wie folgt definiert:

$$\sigma = \frac{\text{Zahl der betrachteten Prozesse pro sec und Stoßzentrum}}{\text{Strom der einfallenden Teilchen pro cm}^2 \text{ und sec}}. \tag{4.6}$$

Als Einheit zur Messung des Wirkungsquerschnittes, der die Dimension einer Fläche hat, wird das „Barn" benutzt:

$$1\,\text{b} = 10^{-24}\,\text{cm}^2.$$

Die Gesamtzahl Z_p der betrachteten Prozesse, die von Z_G Geschossen an Z_T Stoßzentren ausgelöst werden, ist dann

$$Z_p = \frac{Z_G Z_T \sigma_p}{\text{Fläche}}. \tag{4.7}$$

Dabei ist für die Zahl der Stoßzentren in der Kernphysik diejenige Anzahl von Kernen einzusetzen, die sich in der durchstrahlten Materieschicht befindet. Besteht die Schicht aus einem Reinelement* der „Atommasse" $\mathfrak{A}$ (1 Mol hat die Masse $\mathfrak{A}$ Gramm, $\mathfrak{A}$ ist dimensionslos) und hat sie eine Dicke Δx cm, eine Fläche $F\,\text{cm}^2$ sowie eine Dichte ρ g/cm^3, so ist ihr Volumen $F\Delta x$ und ihre Masse $\rho F \Delta x$. Die Masse eines Atoms ist $\mathfrak{A} m_u$ mit

$$m_u = \frac{1\,\text{g}}{6{,}023 \cdot 10^{23}} \qquad \text{(atomare Masseneinheit, s. § 6)},$$

so daß sich die Anzahl der Kerne in der Schicht ergibt zu

$$Z_T = \frac{\rho F \Delta x}{\mathfrak{A} m_u}.$$

* Für ein Isotopengemisch ist $\mathfrak{A} = \sum_i h_i \mathfrak{A}_i$, wobei h_i die relative Atomhäufigkeit ist und $\mathfrak{A}_i$ die Isotopenmasse bedeutet. Die Isotopenmasse ist ${}_ZM_N^A/m_u$, wobei ${}_ZM_N^A$ aus (6.1) zu entnehmen ist.

Damit erhält man

$$Z_p = Z_G \frac{\rho}{\mathfrak{A} m_u} \Delta x \, \sigma_p . \tag{4.8}$$

Bei *Absorptionsprozessen* wird der Strahl durch die Prozesse geschwächt, es ist $Z_p = -\Delta Z_G$, so daß

$$\frac{\Delta Z_G}{Z_G} = -\frac{\rho}{\mathfrak{A} m_u} \sigma_p \Delta x \cdot$$

Integration liefert

$$Z_G = (Z_G)_0 \exp(-\Sigma_p x) , \tag{4.9}$$

wobei die Abkürzung

$$\Sigma_p = \frac{\rho}{\mathfrak{A} m_u} \sigma_p \, [\mathrm{cm}^{-1}] \tag{4.10}$$

als „makroskopischer Wirkungsquerschnitt" bezeichnet wird. $1/\Sigma_p$ ist die „Absorptionslänge" oder die mittlere freie Weglänge des Einzelteilchens, wenn nur Absorptionsprozesse vorkommen. Bei einem numerischen Wert $\sigma_{\mathrm{abs}} = 1$ barn (dies ist z.B. die Größenordnung der Neutronen-Einfangsquerschnitte) und $\rho x = \mathfrak{A}$ [g/cm^2], d.h. einer Schichtdicke, die 1 Mol/cm^2 entspricht, ist

$$\Sigma_p x \approx 0{,}6 ,$$

d.h. der Bruchteil $e^{-0{,}6} \approx \frac{1}{2}$ wird absorbiert.

Bei *Streuprozessen* weist man meist die unter einem Winkel Φ im Laborsystem gestreuten Teilchen nach. Die Zählrate in einem Detektor der empfindlichen Fläche f cm^2 in der (großen) Entfernung R vom Streuzentrum ist dann nach (4.8):

$$\dot{Z}_p = \dot{Z}_G \frac{\rho}{A m_u} \Delta x \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{SPS} \frac{(d\Omega)_{SPS}}{(d\Omega)_{LS}} \frac{f}{4\pi R^2} . \tag{4.11}$$

Dabei ist $f/4\pi R^2$ die Größe des Raumwinkels im Laborsystem, unter dem der Detektor vom Streuzentrum aus gesehen wird. Die Größe $(d\sigma/d\Omega)_{SPS}$ hängt im allgemeinen vom Winkel θ ab, Umrechnung auf Φ erfolgt mittels Gleichung (2.7). Weiter ist, wie man aus Gleichung (2.7) nachrechnen kann,

$$\frac{(d\Omega)_{SPS}}{(d\Omega)_{LS}} = \frac{2\pi \sin\theta \, d\theta}{2\pi \sin\Phi \, d\Phi} = 2\frac{m_1}{m_2} \cos\Phi + \frac{1 + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 \cos 2\Phi}{\sqrt{1 - \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 \sin^2\Phi}} . \tag{4.12}$$

Eine Ausmessung der Intensitätsverteilung der gestreuten Teilchen als Funktion des Laborwinkels Φ liefert mit (4.11) eine *experimentelle* Werte-

tabelle für $(d\sigma/d\Omega)_{SPS}$, die mit der Theorie verglichen werden kann. Die *Berechnung* von $(d\sigma/d\Omega)_{SPS}$ aus dem Wechselwirkungsproblem legt die Häufigkeitsverteilung für die in § 2 freigebliebene kinematische Größe (θ) aus dem Wechselwirkungsansatz fest.

Entsprechend (4.10) definiert man die „mittlere Streuweglänge" $\lambda_{\rm str}$ als $\lambda_{\rm str} = \frac{1}{\Sigma_{\rm str}} = \frac{\mathfrak{A}\, m_u}{\rho\, \sigma_{\rm str}}$. Dies ist die mittlere Strecke, die vom Teilchen zwischen zwei Streuprozessen durchlaufen wird.

σ_p (und $d\sigma_p/d\Omega$) haben die Dimension einer Fläche, die aber *nichts* mit der geometrischen Querschnittsfläche* des Stoßzentrums zu tun zu haben braucht. Die Bedeutung des Wirkungsquerschnitts ist vielmehr: Rechnet man so, als hätte jedes Stoßzentrum die Querschnittsfläche σ und ein Prozeß träte nur dann ein, wenn vom ankommenden Teilchen diese Fläche getroffen wird, dann erhält man aus (4.7) die experimentell gefundene Anzahl von Prozessen.

Weitere Beispiele für Wirkungsquerschnitte s. § 17, § 36 und § 40ff.

§ 5. BOHR-SOMMERFELDsches Atommodell

Nach Kenntnis der experimentellen Ergebnisse der Streuung von α-Teilchen an schweren Kernen (Gold) gelang es BOHR im Jahre 1913, durch ein einfaches, halbklassisches Modell des Wasserstoffatoms die Frequenzen der Spektrallinien, die dieses Atom aussendet, grob vorherzusagen. 1916 wurde das Modell von SOMMERFELD erweitert.

Das Modell beruht auf der anschaulichen Vorstellung, daß sich ein negativ geladenes Teilchen (Elektron, Ladung $-e$) um einen positiv geladenen Kern (Ladung $+Ze$) größerer Masse bewegt. Der Wasserstoffkern ($Z=1$) wird „Proton" genannt. Als Wechselwirkungskraft wird die elektrostatische COULOMB-Kraft (3.6) angenommen, so daß die Bewegung auf einer KEPLERschen Bahn erfolgt.

Zur Erklärung der Emissionsfrequenzen stellte BOHR zwei Postulate auf:

1. Der Bahndrehimpuls ist gequantelt:

$$|\vec{L}| = K\hbar \qquad (K=1,2,3\ldots) \tag{5.1}$$

mit**

$$\hbar = 0{,}6582 \cdot 10^{-15}\,\text{eV sec} \quad (\text{„PLANCKsches Wirkungsquantum"}).$$

* Die Definition des „geometrischen Querschnitts" eines atomaren oder subatomaren Objekts ist sowieso problematisch. Es bedarf auch einer Klarstellung, inwieweit das einfallende Teilchen als punktförmig angesehen werden kann.

** Merke: $\hbar c \approx 2 \times 10^{-5}$ eV cm,
genau: $\hbar c = 1{,}973 \times 10^{-5}$ eV cm.

Damit sind nur ganz bestimmte Bahnen zugelassen, die durch die „Quantenzahl“ K charakterisiert sind. Mit (3.3) ist

$$|\vec{L}| = \mu c;$$

es folgt

$$c = \frac{K\hbar}{\mu}.$$

2. Beim Übergang von einer Bahn größerer Energie E_n auf eine Bahn kleinerer Energie E_m wird ein Lichtquant (Photon) der Frequenz

$$\nu_{nm} = \frac{1}{2\pi\hbar}(E_n - E_m) \tag{5.2}$$

emittiert. Mit $\omega = 2\pi\nu$ (Kreisfrequenz) läßt sich (5.2) schreiben als

$$\hbar\omega_{nm} = E_n - E_m.$$

Um die möglichen Bahnen und die zugehörigen Energiewerte zu bestimmen, betrachten wir zunächst Kreisbahnen und bezeichnen die dabei auftretende Quantenzahl mit dem Buchstaben n, also

$$(|\vec{L}|)_{\text{Kreisbahn}} = n\hbar \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots).$$

Der Radius der Kreisbahn ist mit (3.8)

$$r = l = \frac{\mu c^2}{k} = n^2 \frac{\hbar^2}{\mu k}$$

$\left(\right.$physikalisch: Die Zentrifugalkraft $\mu\,\dot{\varphi}^2 r = \frac{\mu c^2}{r^3}$ ist gleich der Coulomb-Kraft $\left.\frac{k}{r^2}\right)$, wobei für das Wasserstoffatom gilt

$$\mu = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p} = m_e \frac{1}{1 + \frac{m_e}{m_p}}$$

(m_p = Masse des Protons, m_e = Masse des Elektrons, μ = reduzierte Masse des Systems).

Für $n = 1$ und $Z = 1$ (Proton) ergibt sich der Radius der 1. Bohrschen Wasserstoffbahn zu

$$r_H = \frac{\hbar^2}{\mu k'} = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{\mu e^2} = 0{,}52917 \cdot 10^{-8}\,\text{cm},$$

wobei

$$k' = \frac{k}{Z} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}$$

gesetzt ist. Damit wird der Radius der n-ten Bahn in einem Atom der Kernladungszahl Z

$$r_n = \frac{r_H}{Z} n^2. \tag{5.3}$$

Die Energie des Elektrons auf der n-ten Bahn ist nach (3.12)

$$E_n = -\frac{1}{2} \frac{\mu k^2}{\hbar^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{R Z^2}{n^2} \tag{5.4}$$

mit

$$R = \frac{\mu e^4}{32 \pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2}$$

(„RYDBERG-Konstante").

Da die Protonenmasse groß gegen die Elektronenmasse ist, was sich durch Vergleich von (5.4) mit dem Experiment gut bestätigt hat ($m_p/m_e = 1836{,}7$), ist

$$R \approx \frac{m_e e^4}{32 \pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2} \approx 13{,}60\,\text{eV}.$$

Auch die Energie der gebundenen Zustände hat also nur diskrete Werte, die durch die „Hauptquantenzahl" n charakterisiert werden (vgl. Fig. 5.1). Daraus ergibt sich mit (5.2) das diskrete Frequenzspektrum der Spektrallinien zu

$$\nu_{nm} = \frac{R Z^2}{2\pi \hbar} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right). \tag{5.5}$$

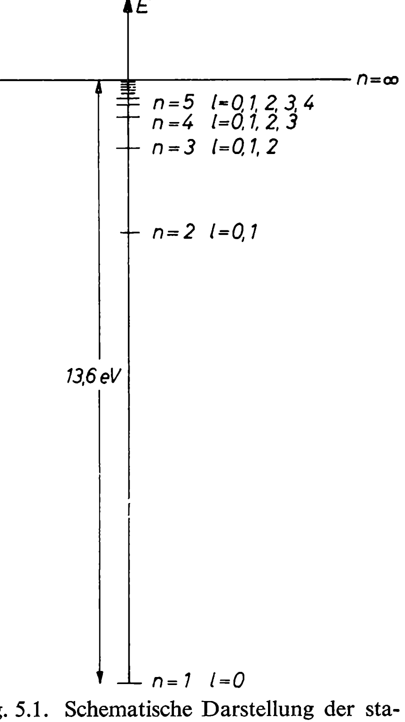


Fig. 5.1. Schematische Darstellung der stabilen Energiezustände des Wasserstoffatoms. n=Hauptquantenzahl, l=Nebenquantenzahl

Die „Bindungsenergie" des Elektrons im Grundzustand ($n = 1$) ist

$$BE = E_1 - E_\infty = -R Z^2. \tag{5.6}$$

Für Wasserstoff ($Z = 1$) ist die Bindungsenergie also $-13{,}6$ eV. Ihr Absolutbetrag ist die „Ionisierungsenergie", also diejenige Energie, die benötigt wird, um das Elektron vom Proton zu trennen.

Erweiterung auf Ellipsenbahnen:

Aus (3.8) findet man für die kleine Halbachse unter Benutzung von (5.1):

$$b^2 = a \frac{\mu c^2}{k} = a \frac{K^2 \hbar^2}{\mu k} = \frac{a^2}{a} \frac{K^2 \hbar^2}{\mu k}.$$

Mit (3.12) und (5.4) folgt

$$b^2=a^2\left(-\frac{2E}{k}\right)\frac{K^2\hbar^2}{\mu k}=\frac{K^2}{n^2}a^2$$

oder

$$\frac{b}{a}=\frac{K}{n}.$$

Die Länge der kleinen Halbachse ist also ebenfalls gequantelt. Da die kleine Halbachse per definitionem kleiner ist als die große, kann zu einem gegebenen n die Quantenzahl K nur die Werte $K=1, 2, 3, \ldots, n$ annehmen. Gewöhnlich definiert man die „Nebenquantenzahl" $l=K-1$ mit dem Wertevorrat $l=0, 1, 2, \ldots, (n-1)$. Die Länge des Bahndrehimpulsvektors ist damit

$$|\vec{L}|=\hbar(l+1). \tag{5.7}$$

Die Energieentartung in l (vgl. § 3) wird aufgehoben durch jede Störung an dem Modellsystem, z.B. durch die Tatsache, daß die Elektronenmasse nach der Relativitätstheorie von der Geschwindigkeit abhängt, die von Bahn zu Bahn und auch entlang einer Bahn verschieden ist. Die hieraus resultierende Korrektion hat SOMMERFELD berechnet:

$$E_{nl}=E_n\left[1+\frac{\alpha^2}{n^2}\left(\frac{n}{l+1}-\frac{3}{4}\right)\right] \tag{5.8}$$

mit

$$\alpha=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}\approx\frac{1}{137{,}04} \quad \text{(„Feinstrukturkonstante", dimensionslos)}. \tag{5.9}$$

Weitere Korrekturen an der BOHRschen Energieformel (5.4) ergeben sich wegen des Eigendrehimpulses („Spin") von Elektron und Kern und auf Grund von Strahlungseffekten („LAMB-shift"). Wegen des Fehlens der Spin-Vorstellung ist das BOHRsche Modell nicht auf Mehrelektronensysteme anwendbar.

Es ergeben sich mehrere Schwierigkeiten beim Vergleich der BOHRschen Modellableitung mit den experimentellen Ergebnissen für das Wasserstoffatom:

1. Die Frage, *warum* ein den Atomkern in einer geschlossenen Bahn umkreisendes Elektron keine Energie ausstrahlt, wie es die HERTZsche Theorie des schwingenden elektrischen Dipols verlangt, bleibt offen. Das Elektron müßte eigentlich fortwährend Energie abstrahlen und schließlich im Kern landen.

2. Die aus der KEPLERschen Theorie folgende Bahnebene des Elektrons konnte experimentell nicht nachgewiesen werden; es gibt offenbar nur eine im ganzen Raum endliche Wahrscheinlichkeit dafür, das Elektron im Abstand zwischen r und $r+dr$ vom Kern zu finden.

3. Die BOHRsche Theorie ist nicht in der Lage, Aussagen über die stark variierenden Intensitäten der Spektrallinien zu machen, ebenso ergeben sich keine Auswahlregeln für die möglichen Elektronenübergänge.

Aus diesen Gründen muß die BOHRsche Modellvorstellung, die so anschaulich ist, physikalisch verworfen werden. Es ist ein Zufall, daß die Energieformel (5.8) bis auf die angedeuteten Korrektionen die experimentellen Daten richtig wiedergibt. Denn aus der Quantentheorie folgt, daß der Bahndrehimpuls nicht wie in (5.1) oder (5.7) gequantelt ist, sondern wie

$$|\vec{L}| = \hbar \sqrt{l(l+1)}\,.$$

Die Frequenzformel (5.2) hat sich jedoch allgemein bewährt, z.B. auch für die Beschreibung der RÖNTGEN-Emissionsspektren von schweren Atomen. Wird ein inneres Elektron aus dem Atomverband geschlagen, dann füllt ein aus einem weniger fest gebundenen Zustand stammendes Elektron das entstehende „Loch" auf. Dabei wird ein Photon der durch (5.2) gegebenen Frequenz emittiert. Für den Übergang $n=2$ nach $n=1$ („K-Strahlung") ergibt sich z.B. mit (5.4)

$$\hbar\omega_K = \tfrac{3}{4} R Z^2 \approx Z^2 \cdot 10{,}2\,\text{eV}\,.$$

Dies ist MOSELEYS Gesetz. Es gilt nicht ganz exakt; Abweichungen von den experimentellen Frequenzen kommen zustande durch die Abschirmung eines Teils der Kernladung durch die anderen Elektronen und durch die Feinstruktur der Niveaus auf Grund der Spins. Durch den Vergleich experimenteller Frequenzbestimmungen mit genaueren Formeln ist es jedoch möglich, die Kernladung Z, eine wichtige Größe der Kernphysik, eindeutig zu bestimmen. In allen Fällen hat sich Übereinstimmung mit den aus Streuversuchen gewonnenen Z-Werten ergeben. Da die gemessenen Kernladungszahlen mit dem Verhältnis Kernmasse zu Protonenmasse nicht übereinstimmen, kann man auf die Existenz weiterer Kernbestandteile (Neutronen) schließen*.

Eine bessere quantitative Beschreibung des Wasserstoffatoms, die sich auch auf Mehrelektronensysteme ausdehnen läßt, liefert die Quantentheorie. Die ihr zugrundeliegende Modellvorstellung ist zwar von der BOHRschen völlig verschieden, es ergibt sich aber für das Wasserstoffatom als Näherung wieder die Formel (5.4) für die Energiezustände.

Eine gewisse Kenntnis der Atomhüllenphysik wird im folgenden vorausgesetzt**.

---

* Eine Begründung, warum man Protonen und Neutronen und nicht Protonen und Elektronen als Bausteine des Kerns annehmen muß, wird in § 27 gegeben.

** Literatur: s. z.B. W. FINKELNBURG, Einführung in die Atomphysik, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1956.

III. Bindungsenergie der Atomkerne

Wir wenden uns jetzt der Betrachtung der Atomkerne zu. In § 6 wird der Zusammenhang zwischen Kernmasse und Kernbindungsenergie diskutiert, in § 7 wollen wir uns mit der gebräuchlichen Darstellung der Massen in Energiediagrammen vertraut machen.

§ 6. Bindungsenergie und Massendefekt

Der Atomkern vereinigt fast die gesamte Masse des Atoms in sich und trägt die Ladung $+Ze$. Die Kernmasse ist meist größer als Z Protonenmassen. Die heutige Modellvorstellung des Atomkerns besagt, daß der Kern aus Z Protonen und N Neutronen zusammengesetzt ist. Die Neutronen sind ungeladene Teilchen von etwa derselben Masse wie die Protonen. Der Kern besteht dann aus $A=Z+N$ „Nukleonen" (Sammelname für Protonen und Neutronen). Für die Nukleonenzahl A besteht erfahrungsgemäß ein Erhaltungssatz, d.h. es können keine Nukleonen entstehen oder verschwinden *.

Die Kernladungszahl Z kennzeichnet das chemische Verhalten des Atoms. Z ist die Ordnungszahl im periodischen System der Elemente, da die Kernladung durch Z Elektronen im Atomverband nach außen kompensiert wird und die Elektronen für das chemische Verhalten verantwortlich sind. Auch für die Gesamtladung besteht ein Erhaltungssatz, da nach der Theorie der Elektrodynamik keine Ladung geschaffen oder vernichtet werden kann.

Als „Isotope" bezeichnet man Kerne mit gleichem Z aber verschiedenem N, als „Isotone" Kerne mit gleichem N aber verschiedenem Z. „Isobare" sind Kerne mit gleicher Nukleonenzahl A aber verschiedenen N und Z. Zu einem „Element" gehören alle Kerne mit gleichem Z.

Die Kernmassen sind nicht genau gleich der Summe der Massen der enthaltenen Protonen und Neutronen. Der Differenzbetrag erklärt sich durch die Tatsache, daß die Nukleonen im Kern *gebunden* sind. Die beim Zusammenbringen der Nukleonen freiwerdende Bindungsenergie ist nach der EINSTEINschen Beziehung (Kern in Ruhe)

$$E=mc^2$$

einer Masse äquivalent (im Falle der Bewegung s. § 8). Ein stabiler Atomkern ist stets *leichter* als die Summe der Gewichte der Protonen und Neu-

* Sogenannte „Antiteilchen" werden dabei mit negativem Vorzeichen berücksichtigt, so daß allgemein die Differenz aus Teilchenzahl und Antiteilchenzahl erhalten bleibt.

tronen, aus denen er aufgebaut ist*. In der Massenbilanz (hier für die *Atom*massen geschrieben, d.h. Elektronen bei geladenen Kernen mitgezählt) muß die Bindungsenergie berücksichtigt werden:

$$_{Z}M_N^A = Z\,m_H + N\,m_n + \frac{1}{c^2}(BE). \tag{6.1}$$

Dabei bedeuten:

$_{Z}M_N^A$ = Ruhmasse des Atoms der Protonenzahl Z, der Neutronenzahl N und der Nukleonenzahl A, einschließlich der Z Elektronen;
m_H = Ruhmasse des Wasserstoffatoms (im Grundzustand);
m_n = Ruhmasse des Neutrons
BE = Kernbindungsenergie.

Die Bindungsenergie ist für stabile Kerne stets negativ.

Als Einheit der „physikalischen" Massenskala benutzt man die „Atommassen-Einheit" m_u, die definiert ist durch**

$$1\,m_u = \tfrac{1}{12} \text{ der Ruhmasse des } C^{12}\text{-Atoms (Kern plus Elektronen).}$$

Umrechnung:

$$1\,m_u = (931{,}441 \pm 0{,}01)\ \text{MeV}/c^2.$$

Aus Tabelle 6.1 sind einige der wichtigsten Massenwerte ersichtlich. Sie wurden experimentell mit dem Massenspektrometer oder aus Kernreaktionen gewonnen.

Tabelle 6.1

Teilchen	Masse in m_u	Masse in MeV/c^2
Elektron	0,0005486	0,511
Proton (ohne Elektron) .	1,0072766	938,218
Wasserstoffatom	1,0078252	938,729
Neutron	1,0086654	939,512
C^{12}-Atom	12,0000000	
O^{16}-Atom	15,994915	

In Tabellenwerken ist oft die Differenz

$$_{Z}\Delta_N^A = {_{Z}M_N^A} - A\,m_u \tag{6.2}$$

angegeben, die als „Massendefekt" bezeichnet wird; man läßt also einfach die ganze Zahl vor dem Komma in der Massenangabe in m_u weg. Also

* Das gleiche gilt im Prinzip auch für Atome, nur sind die Bindungsenergien der Elektronen viel geringer.

** Die Einheit der „chemischen" Massenskala ist $\frac{1}{16}$ der Masse des Sauerstoffatoms. Dabei wird über die Häufigkeit der Sauerstoffisotope im Luftsauerstoff gemittelt.

z.B.*

$$\text{Wasserstoffatom:} \quad {}_1\Delta_0^1 = 0{,}007825\, m_u = 7{,}2887\ \text{MeV}/c^2,$$
$$\text{Neutron:} \quad {}_0\Delta_1^1 = 0{,}008665\, m_u = 8{,}0713\ \text{MeV}/c^2.$$

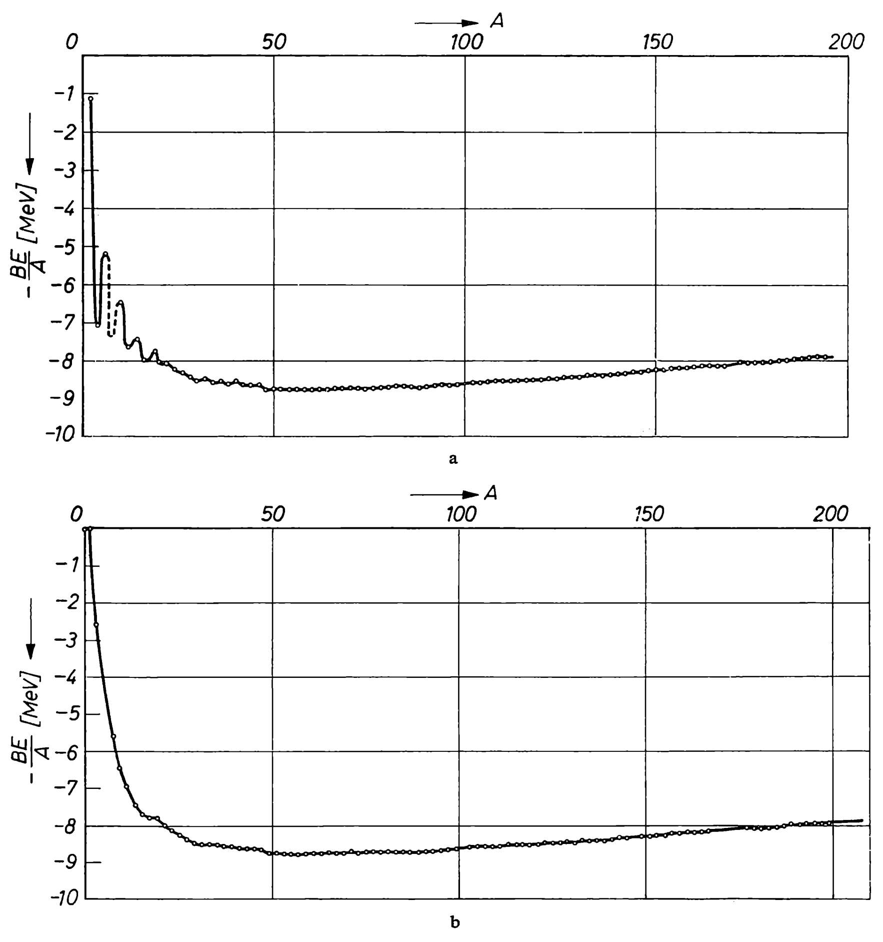


Fig. 6.1. Empirische Bindungsenergie. a) Nukleonenzahl A gerade. b) Nukleonenzahl A ungerade

Die Bindungsenergie läßt sich nach Einsetzen von (6.2) in (6.1) schreiben als

$$BE = c^2({}_Z\Delta_N^A - Z\,{}_1\Delta_0^1 - N\,{}_0\Delta_1^1)\,. \tag{6.3}$$

* Eine Tabelle der gemessenen Massendefekte und Bindungsenergien findet sich in: USAEC Nuclear Data Tables, 1960, Part 1 and 2.

Anwendungsbeispiel: Der Massendefekt des Deuteriumatoms (schwerer Wasserstoff, Kern besteht aus 1 Proton und 1 Neutron) ist

$$_1\Delta_1^2 = 0{,}014102\, m_u .$$

Was ist die Bindungsenergie des Deuterons (= Deuteriumkerns)?

$$\text{Lösung:}\quad (BE)_d = c^2(0{,}014102 - 0{,}007825 - 0{,}008665)\, m_u$$
$$= -c^2 \cdot 0{,}002388\, m_u = -2{,}224\ \text{MeV}.$$

Da $(BE)_d < 0$, ist das Deuteron stabil. Der Zahlenwert wurde experimentell durch die Messung der zur Spaltung des Deuterons nötigen Energie ($2{,}225 \pm 0.002$ MeV) bestätigt.

Die Bindungsenergie pro Nukleon läßt sich wie folgt darstellen [vgl. (6.1)]

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{A}\left(\frac{BE}{c^2}\right) &= \frac{1}{A}\,{}_Z\Delta_N^A - \left(\frac{Z}{A}\,{}_1\Delta_0^1 + \frac{N}{A}\,{}_0\Delta_1^1\right) \\ &= \underbrace{\frac{1}{A}\,{}_Z\Delta_N^A}_{\substack{\text{klein für}\\ \text{große } A}} - \underbrace{\frac{1}{2}\left({}_1\Delta_0^1 + {}_0\Delta_1^1\right)}_{7{,}680\ \text{MeV}/c^2} - \underbrace{\frac{N-Z}{2A}}_{\text{klein}}\underbrace{\left({}_0\Delta_1^1 - {}_1\Delta_0^1\right)}_{0{,}7826\,\frac{\text{MeV}}{c^2}} \end{aligned}\right\} \quad (6.4)$$

Die Bindungsenergie pro Nukleon strebt für große (aber nicht zu große) A einer Sättigung zu, da ${}_Z\Delta_N^A$ zunächst nur schwach mit A wächst. Der Minimalwert liegt bei etwa $-8{,}8$ MeV. Fig. 6.1 zeigt die experimentelle Kurve. Man erkennt eine Minimum bei $A \approx 60$ (Fe, Ni). Durch Spaltung größerer Kerne oder Fusion kleinerer Kerne kann im Prinzip Energie (Bindungsenergie) gewonnen werden (s. § 15). Der zackige Verlauf der Kurve bei kleinen A deutet auf die besondere Stabilität des α-Teilchens (He^4-Kern) und der aus α-Teilchen aufgebauten Kerne Be^8, C^{12}, O^{16} und Ne^{20} hin.

§ 7. Energiediagramme

Zur schematischen Darstellung der Gleichung (6.1) bedient man sich graphischer Energiediagramme. Dabei sind die Elektronen bei geladenen Teilchen stets mitgerechnet. Besteht ein Zustand aus mehreren getrennten Kernen oder Teilchen, so sind diese in großer Entfernung voneinander und in Ruhe zu denken.

Kommentare:

Zu Fig. 7.1: Das Neutron kann sich durch sogenannten β^--Zerfall in ein Proton umwandeln, ist also im freien Zustand radioaktiv. Freiwerdende Energie: $Q_{\beta^-} = 0{,}7826$ MeV.

Zu Fig. 7.2: Die Bindungsenergie des Deuterons ist

$$(BE)_d = -2{,}224\,\text{MeV}.$$

Di-Proton (= He^2) und Di-Neutron sind nicht stabil. Das Deuteron hat einen angeregten Zustand (gestrichelt eingezeichnet), der allerdings schnell zerfällt. Genauere Diskussion s. § 37.

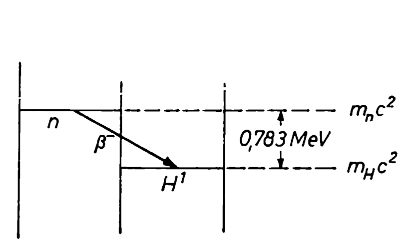


Fig. 7.1. Energiediagramm für die Nukleonenzahl $A = 1$

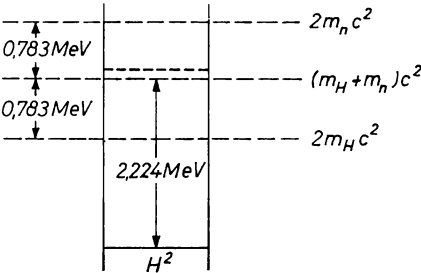


Fig. 7.2. Energiediagramm für die Nukleonenzahl $A = 2$. „Diproton" = He^2 und „Dineutron" sind nicht stabil

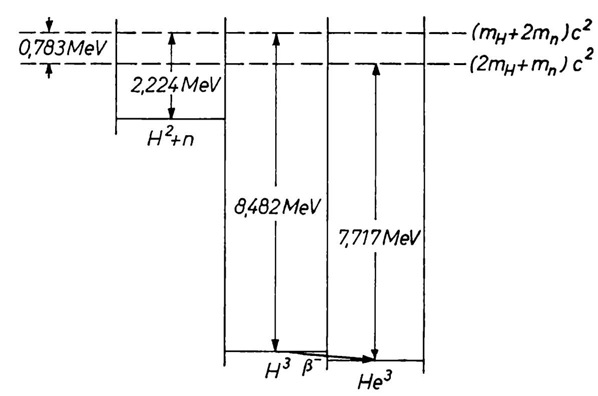


Fig. 7.3. Energiediagramm für die Nukleonenzahl $A = 3$. „Triproton" = Li^3 und Trineutron sind nicht stabil

Zu Fig. 7.3:

$$(BE)_{H^3} = -8{,}481\,\text{MeV},$$
$$(BE)_{He^3} = -7{,}717\,\text{MeV}.$$

Das H^3 ist β^--aktiv und zerfällt ins He^3.

$$Q_{\beta^-} = (7{,}717 + 0{,}783 - 8{,}482)\,\text{MeV} = 0{,}018\,\text{MeV}.$$

Die Bindungsenergie des letzten Neutrons von H^3 ist gleich 6,258 MeV.

Zu Fig. 7.4:

$$(BE)_{He^4} = -28{,}295\,\text{MeV}.$$

Die Bindungsenergie des letzten Neutrons von He^4 ist 20,578 MeV.

Kerne können – ähnlich wie die Elektronenhülle der Atome – angeregte Zustände haben. Oft werden diese auch in die Energiediagramme eingetragen. Für größere A ist es üblich, die Energie – deren Nullpunkt ja willkürlich ist – vom Grundzustand des stabilsten Kerns aus zu zählen. So sind in Fig. 7.5 einige der bekannten Zustände von Kernen mit $A=12$ sowie einige Kombinationen von Kernen der Gesamtnukleonenzahl 12

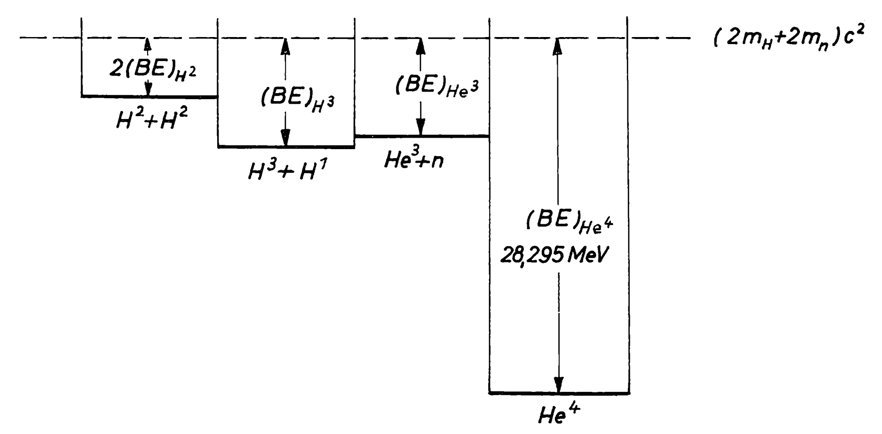


Fig. 7.4. Energiediagramm für die Nukleonenzahl $A=4$. Man sieht, daß der Kern des He^4 (das α-Teilchen) besonders fest gebunden ist, er hat keine angeregten Zustände

eingetragen. Solche Diagramme sind für die Planung und Auswertung kernphysikalischer Experimente von großer Wichtigkeit *. Beispiele werden in §9 angegeben.

Die Bindungsenergie des letzten Neutrons

$$c^2\,|{}_ZM_N^A - {}_ZM_{N-1}^{A-1} - m_n|$$

ist eine wichtige Größe der Neutronen- und Reaktorphysik. Als Neutronenquellen eignen sich besonders solche Isotope, die eine geringe Bindungsenergie des letzten Neutrons haben. Beispiele s. Tabelle 7.1.

Tabelle 7.1. *Beispiele für Kerne mit geringer Bindungsenergie des letzten Neutrons*

Isotop	Bindungsenergie des letzten Neutrons
${}_1H_1^2$	2,224 MeV
${}_4Be_5^9$	1,665 MeV
${}_6C_7^{13}$	4,947 MeV
${}_{36}Kr_{51}^{87}$	5,506 MeV
${}_{54}Xe_{83}^{137}$	3,6 MeV

Das Be^9 hat die niedrigste bekannte Bindungsenergie des letzten Neutrons. Dieses Isotop kann als Neutronenquelle für das Labor Verwendung finden. Dazu vermischt man Berylliumpulver mit einem γ-Strahler (Quantenenergie $>1{,}665$ MeV; geeignet ist z.B. Sb^{124}, das im Reaktor hergestellt

* Eine Zusammenstellung der experimentellen Daten aller Massen findet sich im Tabellenwerk LANDOLT-BÖRNSTEIN, Zahlenwerte und Funktionen aus Naturwissenschaft und Technik, Neue Serie, Gruppe I, Band 1, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1961.

werden kann und mit einer Halbwertszeit von 60 d zerfällt) und leitet damit den Kernprozeß

$$\gamma + \mathrm{Be}^9 \rightarrow \mathrm{Be}^8 + n$$

ein. Der Grundzustand des Be^8 zerfällt anschließend in zwei He^4-Kerne (α-Teilchen). Siehe dazu auch Fig. 39.2.

Ähnlich läßt sich eine Neutronenquelle herstellen, indem man die geringe Bindungsenergie des letzten Neutrons des C^{13} ausnutzt. Man mischt Berylliumpulver mit Radium oder Polonium. Die natürliche α-Strahlung dieser

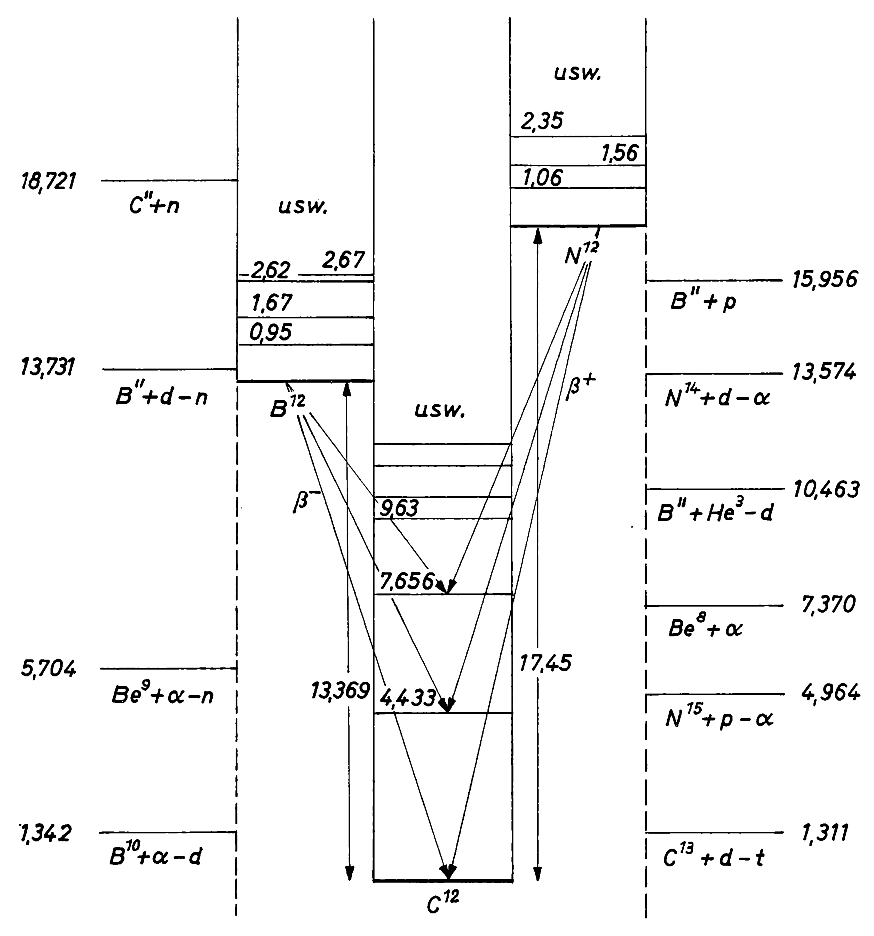


Fig. 7.5. Energiediagramm für die Nukleonenzahl $A=12$, Zahlenangaben in MeV vom Grundzustand des C^{12}

schweren Kerne löst die Kernreaktion

$$\mathrm{Be}^9 + \mathrm{He}^4 = \mathrm{C}^{12} + n$$

aus. Wenn der C^{12}-Kern im Grundzustand zurückbleibt, erhalten die entstehenden Neutronen kinetische Energien bis zu etwa 11 MeV. Wenn die Reaktion auf den ersten angeregten Zustand des C^{12}-Kerns führt, wird durch dessen Zerfall eine Spektrallinie emittiert, die einer Quantenenergie von 4,433 MeV entspricht (s. Fig. 7.5).

Beide Neutronenquellen emittieren also auch energiereiche γ-Quanten und müssen aus Strahlenschutzgründen sorgfältig abgeschirmt werden.

IV. Kinematik der Kernreaktionen

Die Ausführungen des Kapitels I wollen wir in diesem Kapitel in zweierlei Weise erweitern: Erstens soll die relativistische Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit berücksichtigt werden, und zweitens wollen wir die bei Kernreaktionen auftretenden Bindungsenergien und eventuelle Anregungsenergien (potentielle Energien) der beteiligten Kerne mit in die Betrachtung einbeziehen. Die Gleichungen sollen dabei in eine solche Form gebracht werden, daß sie leicht auf die Experimente angewandt werden können. Dazu betrachten wir die Reaktionen in diesem Kapitel nur im Laborsystem.

In §8 beschäftigen wir uns mit den relativistischen Ausdrücken für Masse, Energie und Impuls und stellen die kinematischen Erhaltungssätze auf. In §9 betrachten wir Kernreaktionen im Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten aller beteiligten Teilchen (nicht-relativistischer Grenzfall), in §10 werden einige Beispiele von Reaktionen relativistischer Teilchen vorgeführt.

§ 8. Energie- und Impulserhaltung

a) Relativistische Energie-Impuls-Beziehungen

Wir beschränken uns auf solche Kernreaktionen, bei denen sich vor dem Stoß *zwei* Teilchen aufeinander zu bewegen und nach dem Stoß wieder *zwei* (möglicherweise von den stoßenden verschiedene) Teilchen auseinanderfliegen. Wir betrachten die Bewegung im Laborsystem. Im Gegensatz zu Kapitel I wollen wir aber jetzt eine Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit zulassen und relativistisch rechnen. Sei mit m die geschwindigkeitsabhängige Masse, mit m_0 die Ruhmasse bezeichnet, dann lautet

diese Abhängigkeit

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}; \qquad \beta = \frac{v}{c}. \tag{8.1}$$

Die EINSTEINsche Energieformel* besagt, daß

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \underbrace{m_0 c^2}_{\text{Ruh-energie}} + \underbrace{\frac{1}{2} m_0 v^2 + \text{höhere Glieder}}_{\text{kinetische Energie}} \tag{8.2}$$

ist. Beachte: Der Buchstabe E bezeichnet hier etwas anderes als in (3.11), wo $E = KE + PE$ war. Hier ist E die Summe aus kinetischer Energie und Ruhenergie. Potentielle und eventuelle Anregungsenergien werden in die Ruhmasse einbezogen.

Die kinetische Energie muß jetzt anders definiert werden als früher: Zu $\frac{1}{2} m_0 v^2$ treten höhere Glieder hinzu, die nur für $v \to 0$ vernachlässigt werden können. Dann geht die neue Definition in die alte über.

Der relativistischen kinetischen Energie entspricht nach (8.2) eine Masse, nämlich

$$(m)_{KE} = \frac{KE}{c^2} = m - m_0 .$$

Im folgenden ist also

$$KE = E - m_0 c^2.$$

Dieser kinetischen Energie entspricht der relativistisch definierte Impuls

$$\vec{p} = m\vec{v} = mc\vec{\beta}. \tag{8.3}$$

Eine relativistisch gültige Beziehung zwischen Energie E und Impulsbetrag p ergibt sich aus (8.1):

$$\left.\begin{aligned} & m^2(1-\beta^2) = m_0^2 \quad | \cdot c^4 \\ & E^2 - c^2 p^2 = m_0^2 c^4 \\ & \boxed{E = \sqrt{c^2 p^2 + m_0^2 c^4}}\,. \end{aligned}\right\} \tag{8.4}$$

Näherungen:

1. Nichtrelativistischer Grenzfall: $p \ll m_0 c$

$$E \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{p^2}{2 m_0^2 c^2}\right) = m_0 c^2 + \frac{p^2}{2 m_0} = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2.$$

---

* Ausführliche Herleitung und Diskussion siehe A. EINSTEIN, Grundzüge der Relativitätstheorie, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1956. Vgl. auch L. D. LANDAU und E. M. LIFSCHITZ, Lehrbuch der theoretischen Physik, Bd. II, Akademie-Verlag, Berlin 1963.

E setzt sich aus der Ruhenergie und der nichtrelativistischen kinetischen Energie zusammen. Nichtrelativistisch heißt: $KE \ll$ Ruhenergie (wenn $m_0 \neq 0$).

2. Teilchen, die fast Lichtgeschwindigkeit haben: $p \gg m_0 c$

$$E \approx pc\left(1+\frac{m_0^2 c^2}{2p^2}\right)=pc+\frac{m_0^2 c^4}{2pc}.$$

Dieser Fall liegt vor, wenn bei $m_0 \neq 0$ die kinetische Energie groß ist gegen die Ruhenergie.

3. Teilchen mit $m_0=0$ (Lichtquanten, Neutrinos): Aus (8.4) und (8.1) folgt

$$E=pc \quad \text{und} \quad v=c.$$

Ein solches Teilchen bewegt sich stets mit Lichtgeschwindigkeit. Verglichen mit schweren Teilchen hat es den größten Impuls für eine gegebene Energie E bzw. die kleinste Energie E für einen gegebenen Impuls.

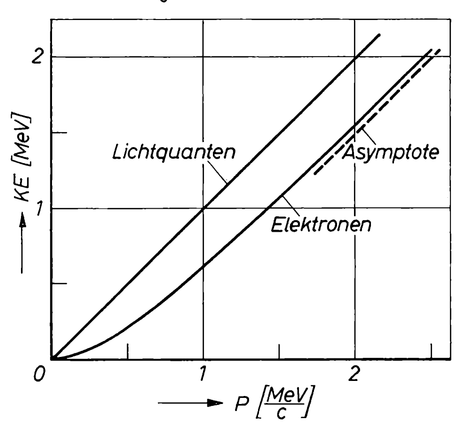


Fig. 8.1. Zusammenhang zwischen kinetischer Energie und Impuls (relativistisch) für Lichtquanten und Elektronen

Der Zusammenhang zwischen Impuls und *kinetischer* Energie lautet mit (8.2) und (8.4):

$$\left.\begin{aligned} &E^2=(KE+m_0 c^2)^2=c^2 p^2+m_0^2 c^4 \\ &\boxed{cp=\sqrt{KE(KE+2m_0 c^2)}}\,. \end{aligned}\right\} \tag{8.5}$$

Dieser Zusammenhang ist in Fig. 8.1 graphisch dargestellt.

Näherungen:

1. Nichtrelativistischer Grenzfall:

$$p \approx \frac{1}{c} KE \sqrt{\frac{2m_0 c^2}{\frac{1}{2} m_0 v^2}}=\frac{2KE}{v}=m_0 v.$$

2. Teilchen, die fast Lichtgeschwindigkeit haben:

$$cp \approx KE+m_0 c^2.$$

3. Teilchen mit $m_0=0$:

$$cp=KE.$$

Verglichen mit schweren Teilchen haben diese Teilchen den kleinsten Impuls für eine gegebene kinetische Energie (Gegensatz zu oben; dort war die Gesamtenergie E konstant angenommen worden).

b) Anwendung auf Kernreaktionen

Eine Kernreaktion sei durch das Schema (Fig. 8.2) dargestellt. Eventuelle Anregungsenergien der Teilchen werden durch E^* bezeichnet.

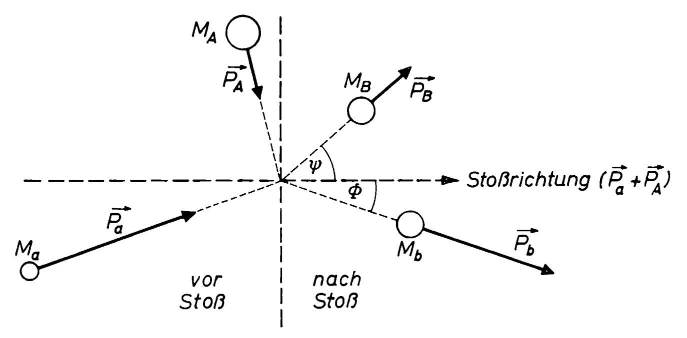


Fig. 8.2. Schema der Kernreaktion $a+A\rightarrow B+b$, dargestellt im Laborsystem. Meistens ist $|\vec{p}_A|\ll|\vec{p}_a|$

Die Erhaltungssätze für Energie und Impuls sind aus der elementaren Mechanik bekannt. Der Unterschied zwischen plastischem und elastischem Stoß entfällt bei Kernreaktionen, wenn die Anregungsenergien einbezogen werden. Die Erhaltungssätze lauten:

Energiesatz: $E_a+E_A=E_b+E_B$.

In den meisten praktischen Fällen ist höchstens einer der beteiligten Kerne, z.B. der Rückstoßkern B, in einem angeregten Zustand. E_B^* ist dann die Anregungsenergie des Rückstoßkerns, die dieser durch die Reaktion erhält; in anderen Worten: E_B^* ist nur dann von Null verschieden, wenn der Rückstoßkern in einem angeregten Zustand (Energie E_B^*) zurückbleibt. Mit (8.4) ergibt sich

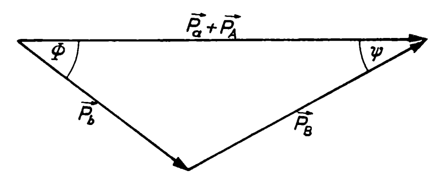


Fig. 8.3. Impulsdreieck

$$\left.\begin{aligned}&\sqrt{p_a^2c^2+M_a^2c^4}+\sqrt{p_A^2c^2+M_A^2c^4}\\&\quad=\sqrt{p_b^2c^2+M_b^2c^4}+\sqrt{p_B^2c^2+(M_Bc^2+E_B^*)^2}.\end{aligned}\right\}\tag{8.6}$$

Impulssatz: $\vec{p}_a+\vec{p}_A=\vec{p}_b+\vec{p}_B$.

Diese Beziehung läßt sich graphisch als Impulsdreieck (Fig. 8.3) darstellen. Der Kosinussatz in diesem Dreieck liefert

$$p_B^2=p_b^2+(\vec{p}_a+\vec{p}_A)^2-2p_b\,|\vec{p}_a+\vec{p}_A|\cos\Phi\,.\tag{8.7}$$

Aus (8.6) und (8.7) läßt sich p_B eliminieren. Es bleibt eine Gleichung, die die Unbekannten p_b und Φ mit den Bekannten $\vec{p}_a$, $\vec{p}_A$ und den Massen verknüpft. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines bestimmten Winkels Φ muß – wie in §2 – zusätzlich aus dem Wechselwirkungsansatz abgeleitet werden.

Eine Bestimmungsgleichung für den Winkel ψ erhält man durch Anwendung des Sinussatzes auf das Impulsdreieck:

$$p_b \sin \Phi = p_B \sin \psi\,. \tag{8.8}$$

Die Erhaltungssätze gelten in jedem nicht beschleunigten Bezugssystem. Wir wollen uns jetzt einigen wichtigen Spezialfällen der Energie- und Impulsgleichungen (8.6) und (8.7) zuwenden.

§ 9. Reaktionen nichtrelativistischer Teilchen (Q-Gleichung)

Wir betrachten den Fall, daß alle Teilchen nichtrelativistisch sind, außerdem sei das Teilchen A vor dem Stoß in Ruhe. In der Praxis ist dieser Fall verwirklicht bei Kernreaktionen, die von Protonen, Neutronen oder schwereren Teilchen mit Einfallsenergien bis zu etwa 100 MeV ausgelöst werden. Gleichung (8.6) liefert mit den Abkürzungen

$$Q = (M_a + M_A - M_b - M_B)\, c^2 \tag{9.1}$$

und

$$\varepsilon_i = \frac{p_i^2}{2M_i} = \text{kinetische Energie des Teilchens } i$$

die Gleichung (dabei ist ($E_B^* \ll M_B\, c^2$ vorausgesetzt):

$$Q + \varepsilon_a = \varepsilon_b + \varepsilon_B + E_B^*\,. \tag{9.2}$$

Wenn alle beteiligten Reaktionspartner im Grundzustand sind, kommt also die Energietönung der Reaktion durch etwaige Massendifferenzen, d.h. Bindungsenergieunterschiede, zustande.

Aus (8.7) ergibt sich

$$2 M_B \varepsilon_B = 2 M_b \varepsilon_b + 2 M_a \varepsilon_a - 2 \sqrt{2 M_a \varepsilon_a} \sqrt{2 M_b \varepsilon_b} \cos \Phi\,. \tag{9.3}$$

Die Elimination von ε_B aus (9.2) und (9.3) liefert die sogenannte Q-Gleichung

$$\boxed{Q - E_B^* = \varepsilon_b \left(1 + \frac{M_b}{M_B}\right) - \varepsilon_a \left(1 - \frac{M_a}{M_B}\right) - \frac{2}{M_B} \sqrt{M_a M_b \varepsilon_a \varepsilon_b} \cos \Phi}\,. \tag{9.4}$$

Durch Messung von ε_b unter dem Winkel Φ im Laborsystem kann man bei bekanntem ε_a (Einschußenergie) und bekannten Massen der Reaktionspartner die Werte für $(Q - E_B^*)$ und damit E_B^* für verschiedene Anregungsstufen des Kerns B bestimmen. Der Q-Wert der Grundzustandsreaktion ($E_B^* = 0$) liefert umgekehrt nach (9.1) eine Beziehung zwischen den Massen der Reaktionspartner.

Andererseits kann man bei bekanntem Q und bekannten Massen die Energie des unter einem bestimmten Winkel Φ herauskommenden Reaktionsprodukts b berechnen. Man löst (9.4) nach ε_b auf:

$$\varepsilon_b - \underbrace{\frac{\sqrt{M_a M_b}}{M_B+M_b}\sqrt{\varepsilon_a}}_{\alpha} 2\cos\Phi \sqrt{\varepsilon_b} - \underbrace{\left(\varepsilon_a \frac{M_B-M_a}{M_B+M_b} + \frac{M_B}{M_B+M_b}(Q-E_B^*)\right)}_{\beta} = 0 .$$

Dies ist eine quadratische Gleichung in $\sqrt{\varepsilon_b}$ mit der Lösung

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{\varepsilon_b} &= \alpha\cos\Phi \pm \sqrt{\alpha^2\cos^2\Phi+\beta} \\ \varepsilon_b &= \beta + 2\alpha^2\cos^2\Phi\left(1 \pm \sqrt{1+\frac{\beta}{\alpha^2\cos^2\Phi}}\right). \end{aligned}\right\} \tag{9.5}$$

Physikalisch sinnvoll ist eine Lösung nur dann, wenn

$$\sqrt{\varepsilon_b} = \frac{p_b}{\sqrt{2M_b}} > 0 \text{ und reell}$$

ist, da der Impulsbetrag $p_b > 0$ sein muß.

Die Beziehung (9.5) liefert den Zusammenhang zwischen der Energie des herauskommenden Teilchens b und dem Winkel Φ im Laborsystem in expliziter Form.

Entsprechende Gleichungen bekommt man für das Teilchen B, wenn man systematisch in (9.4) und (9.5) b durch B, B durch b und Φ durch ψ ersetzt.

Man nennt eine Kernreaktion „*elastische Streuung*“, wenn $a=b$ und $A=B$ ist und außerdem $E_B^*=0$. Dann folgt aus (9.5) mit

$$\begin{aligned} Q &= 0, \\ \alpha &= \frac{M_a}{M_A+M_a}\sqrt{\varepsilon_a}, \\ \beta &= \frac{M_A-M_a}{M_A+M_a}\varepsilon_a \end{aligned}$$

[meist ist $\beta > 0$, d.h. positives Vorzeichen in (9.5)] der Zusammenhang

$$\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_a} = \frac{\left(\frac{M_A}{M_a}\right)^2 + 1 - 2\sin^2\Phi + 2\cos\Phi\sqrt{\left(\frac{M_A}{M_a}\right)^2 - \sin^2\Phi}}{\left(\frac{M_A}{M_a}+1\right)^2}. \tag{9.6}$$

Durch Umrechnung über (2.7) sieht man die Übereinstimmung mit (2.8).

Das Verhältnis $\varepsilon_b/\varepsilon_a$ hängt also bei elastischer Streuung nur vom Winkel und vom Massenverhältnis M_a/M_A, nicht aber von der Einfallsenergie ε_a ab. Das Teilchen verliert je nach Winkel einen bestimmten Teil seiner Energie.

Eine Reaktion heißt „*inelastische Streuung*", wenn $a=b$ und $A=B$ ist, aber $E_B^*>0$. Dann muß das Teilchen a eine Mindestenergie („Schwellenenergie") haben, um die Reaktion einzuleiten. Es ist

$$Q=0\,,$$
$$\alpha=\frac{M_a}{M_A+M_a}\sqrt{\varepsilon_a}\,,$$
$$\beta=\frac{M_A-M_a}{M_A+M_a}\,\varepsilon_a-\frac{M_A}{M_A+M_a}\,E_B^*\,.$$

Der Radikand in (9.5) muß positiv sein, also

$$\alpha^2\cos^2\Phi+\beta>0\,,$$
$$\frac{M_a^2}{M_A+M_a}\,\varepsilon_a\cos^2\Phi+(M_A-M_a)\,\varepsilon_a-M_A\,E_B^*>0\,,$$
$$\varepsilon_a>\frac{M_A(M_A+M_a)}{M_A^2-M_a^2\sin^2\Phi}\,E_B^*\,.$$

Diese Beziehung ist für wachsendes ε_a zuerst für $\Phi=0$ erfüllt; dann wird

$$(\varepsilon_a)_{\text{Schwelle}}=\left(1+\frac{M_a}{M_A}\right)E_B^*\,. \tag{9.7}$$

Die Schwellenenergie ist größer als E_B^*, da die Geschwindigkeit des Schwerpunktes aufrechterhalten werden muß.

Die Größe β wird positiv für

$$\varepsilon_a>\frac{(\varepsilon_a)_{\text{Schwelle}}}{1-\left(\dfrac{M_a}{M_A}\right)^2}\,,$$

dann gilt das positive Vorzeichen in (9.5). Für

$$(\varepsilon_a)_{\text{Schwelle}}<\varepsilon<\frac{(\varepsilon_a)_{\text{Schwelle}}}{1-\left(\dfrac{M_a}{M_A}\right)^2}$$

sind beide Vorzeichen in (9.5) möglich; die gestreuten Teilchen verlassen das Target dann in Richtung $\Phi=0$ im Laborsystem in zwei Energiegruppen. Das kommt daher, daß auch die im Schwerpunktssystem nach „hinten" emittierten Teilchen b, deren Geschwindigkeit kleiner ist als die Schwer-

punktsgeschwindigkeit, im Laborsystem nach „vorne" fliegen. Vgl. auch Beispiel 1 unten.

Eine Kernreaktion heißt „*exoenergetisch*", wenn $Q > E_B^*$. Das kann nur sein, wenn die Teilchen b und B von a und A verschieden sind, also Kernumwandlungen vorkommen. Die freiwerdende Energie muß wieder zum Teil für die Aufrechterhaltung der Schwerpunktsbewegung verwendet werden. Da stets die Größe $\beta > 0$ ist, gilt das positive Vorzeichen in (9.5). Die Reaktion kann bereits mit $\varepsilon_a = 0$ ablaufen, d. h. es existiert keine Schwelle. Im Spezialfall $\varepsilon_a = 0$ ergibt sich

$$\alpha = 0,$$
$$\beta = \frac{M_B}{M_B + M_b}(Q - E_B^*),$$
$$\left.\begin{aligned}(\varepsilon_b)_{\varepsilon_a=0} &= \frac{M_B}{M_B + M_b}(Q - E_B^*)\\ (\varepsilon_B)_{\varepsilon_a=0} &= \frac{M_b}{M_B + M_b}(Q - E_B^*).\end{aligned}\right\} \tag{9.8}$$

Daraus folgt mit (9.5) der allgemein gültige Zusammenhang

$$\varepsilon_b - (\varepsilon_b)_{\varepsilon_a=0} = \varepsilon_a \left[\frac{M_B - M_a}{M_B + M_b} + 2\frac{M_a M_b}{(M_B + M_b)^2}\cos^2\Phi \times \right.$$
$$\left. \times \left\{1 + \sqrt{1 + \frac{(M_B - M_a)(M_B + M_b)}{M_a M_b \cos^2\Phi} + \frac{(M_B + M_b)^2}{M_a M_b}\frac{(\varepsilon_b)_{\varepsilon_a=0}}{\varepsilon_a \cos^2\Phi}}\right\}\right].$$

Die zusätzliche kinetische Energie des Teilchens b ist also bis auf eine kleine Korrektur proportional zu ε_a.

Numerische Berechnungen von ε_b als Funktion von ε_a, den Massen und dem Winkel Φ werden am einfachsten direkt aus (9.4) vorgenommen.

Eine Kernreaktion heißt „*endoenergetisch*", wenn $Q < E_B^*$. In diesem Falle gibt es wieder eine Schwellenenergie. Damit $\sqrt{\varepsilon_b}$ reell wird, muß

$$\alpha^2 \cos^2\Phi + \beta > 0$$

sein bei

$$\alpha = \frac{\sqrt{M_a M_b}}{M_B + M_b}\sqrt{\varepsilon_a};$$
$$\beta = \frac{M_B - M_a}{M_B + M_b}\varepsilon_a - \frac{M_B}{M_B + M_b}(E_B^* - Q).$$

Daraus folgt

$$\varepsilon_a > \frac{M_B(E_B^* - Q)}{M_B - M_a + \dfrac{M_a M_b}{M_B + M_b}\cos^2\Phi}.$$

Wieder ist diese Beziehung bei wachsendem ε_a zuerst bei $\Phi=0$ erfüllt, so daß

$$(\varepsilon_a)_{\text{Schwelle}}=(E_B^*-Q)\left(1+\frac{M_a}{M_B+M_b-M_a}\right). \tag{9.9}$$

Da für kleine ε_a die Größe β negativ sein kann, gibt es wieder einen Bereich, für den beide Vorzeichen in (9.5) möglich sind, d.h. ε_b zweiwertig wird. Dies bedeutet physikalisch, daß ein im Schwerpunktssystem nach „hinten“ emittiertes Teilchen b im Laborsystem nach „vorne“ fliegt.

Beispiele:

1. Wie groß ist die Minimalenergie der Protonen im Laborsystem, die die Reaktion $p+\mathrm{H}^3=n+\mathrm{He}^3$ [abgekürzte Schreibweise: $\mathrm{H}^3(p,n)\mathrm{He}^3$] auslösen können? Wie groß ist die Energie der Neutronen unter dem Winkel $\Phi=0$ als Funktion der Protonenenergie?

Lösung: Nach § 7 ist*

$$Q=c^2(M_{\mathrm{H}}+M_{\mathrm{H}^3}-m_n-M_{\mathrm{He}^3})=-0{,}765\,\mathrm{MeV}.$$

Es handelt sich also um eine endoenergetische Reaktion. Mit

$$M_a\approx M_b\approx 1\,m_u;\qquad M_A\approx M_B\approx 3\,m_u;\qquad E_B^*=0$$

folgt aus (9.9) für die Schwellenenergie

$$(\varepsilon_a)_{\text{Schwelle}}=(\varepsilon_p)_{\min}\approx 1{,}02\,\mathrm{MeV}\ \text{bei}\ \Phi=0.$$

Für $\Phi=0$ leitet man aus (9.5) den allgemeinen Ausdruck her:

$$\varepsilon_b=(\gamma+\delta)\,\varepsilon_a\pm 2\varepsilon_a\sqrt{\gamma\,\delta\left(1-\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_a}\right)-\gamma\,\varepsilon_s}$$

mit den Abkürzungen

$$\gamma=\frac{M_B(M_B+M_b-M_a)}{(M_B+M_b)^2};\qquad \delta=\frac{M_a\,M_b}{(M_B+M_b)^2};\qquad \varepsilon_s=(\varepsilon_a)_{\text{Schwelle}}.$$

Im vorliegenden Beispiel ist $\gamma=\frac{9}{16}$, $\delta=\frac{1}{16}$; damit wird

$$\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_s}=\frac{10}{16}\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_s}\pm\frac{6}{16}\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_s}\sqrt{1-\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_a}-\frac{9}{16}}.$$

Der Zusammenhang zwischen $\varepsilon_b/\varepsilon_s$ und $\varepsilon_a/\varepsilon_s$ ist in Fig. 9.1 dargestellt. Die Kurve nähert sich asymptotisch für große $\varepsilon_a/\varepsilon_s$ der (gestrichelt eingezeichneten) Geraden

$$\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_s}\to\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_s}-\frac{9}{16}.$$

---

* Beachte, daß bei einer solchen Rechnung das Proton stets als Wasserstoffatom angesehen wird, obwohl nur ein nacktes Proton aus dem Beschleuniger kommt. Das Elektron muß durch Erdung des Targets dazukommen.

Der Ast der Kurve, der dem negativen Vorzeichen in (9.5) entspricht, muß bei $\beta=0$ aufhören, d.h. bei

$$\varepsilon_a \frac{M_B - M_a}{M_B + M_b} + \frac{M_B}{M_B + M_b} Q = 0$$

oder

$$\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_s} = \frac{M_B}{M_B - M_a} \frac{M_B + M_b - M_a}{M_B + M_b} = \frac{9}{8} = 1{,}125 .$$

Für größere ε_a wird β positiv und damit gilt nur noch das positive Vorzeichen in (9.5).

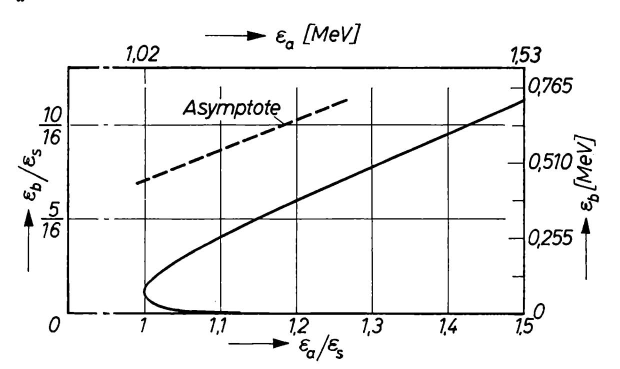


Fig. 9.1. Kernreaktion $H^3(p, n)He^3$, Schwelle 1,02 MeV. Kinetische Energie der im Laborsystem nach vorne ($\Phi=0$) emittierten Neutronen als Funktion der Protonen-Einfallsenergie

2. Schnelle Neutronen können durch die Reaktion $H^3(d, n)He^4$ mit einem VAN-DE-GRAAFF-Beschleuniger hergestellt werden. Welche Energie haben die Neutronen unter $\Phi=0°$ und $\Phi=90°$ im Laborsystem, wenn die Deuteronen mit einer Energie von 1 MeV bzw. 4 MeV im Laborsystem auf das Target treffen?

Lösung: Es handelt sich um eine exoenergetische Reaktion. Nach § 7 ist

$$Q = (B\,E)_{H^3} + (B\,E)_d - (B\,E)_{He^4} = +17{,}589 \text{ MeV} .$$

Es ist $E_B^* = 0$. Die Neutronen werden als Teilchen b aufgefaßt. Dann ist nach (9.5) für $\Phi = 0°$

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{5} \sqrt{\varepsilon_a}; \qquad \beta = \frac{2}{5} \varepsilon_a + \frac{4}{5} Q ,$$

$$\varepsilon_b = \begin{cases} 16{,}42 \text{ MeV} & \text{für } \varepsilon_a = 1 \text{ MeV} \\ 20{,}84 \text{ MeV} & \text{für } \varepsilon_a = 4 \text{ MeV} \end{cases}$$

für $\Phi = 90°$

$$\varepsilon_b = \beta = \frac{2}{5} \varepsilon_a + \frac{4}{5} Q = \begin{cases} 14{,}47 \text{ MeV} & \text{für } \varepsilon_a = 1 \text{ MeV} \\ 15{,}67 \text{ MeV} & \text{für } \varepsilon_a = 4 \text{ MeV} . \end{cases}$$

Die verhältnismäßig hohe Neutronenenergie bei der im Vergleich dazu kleinen Deuteronenenergie erklärt sich aus dem Freiwerden von Bindungsenergie bei der Bildung des He^4-Kerns.

§ 10. Reaktionen relativistischer Teilchen

Wir wollen Energie- und Impulssatz [(8.6) und (8.7)] auf zwei Beispiele anwenden: Die COMPTON-Streuung von Lichtquanten und die Streuung schneller Elektronen an Atomkernen.

a) COMPTON-Streuung von Lichtquanten

Der Elementarprozeß ist die Streuung eines Lichtquants an einem Elektron [symbolisch $e(\gamma, \gamma')e'$], wobei die an das Elektron übertragene Energie groß sein soll gegen die Bindungsenergie des Elektrons im Atomverband, so daß man den Prozeß so behandeln kann als stieße ein Lichtquant gegen ein freies Elektron, das vor dem Stoß in Ruhe war. Es ist dann

$$M_a = M_b = 0; \qquad M_A = M_B = m_e;$$

$$p_a = \frac{\hbar\,\omega_a}{c},$$

$$p_A = 0,$$

$$p_b = \frac{\hbar\,\omega_b}{c}.$$

Aus (8.6) folgt als Energiegleichung (mit $E_B^* = 0$)

$$\hbar\,\omega_a + m_e c^2 = \hbar\,\omega_b + \sqrt{p_B^2 c^2 + m_e^2 c^4}.$$

Die Impulsgleichung (8.7) wird zu

$$p_B^2 = \frac{\hbar^2}{c^2}(\omega_b^2 + \omega_a^2 - 2\,\omega_a\,\omega_b \cos\Phi).$$

Einsetzen ergibt

$$[\hbar(\omega_a - \omega_b) + m_e c^2]^2 = \hbar^2(\omega_b^2 + \omega_a^2) - 2\hbar^2\,\omega_a\,\omega_b \cos\Phi + m_e^2 c^4.$$

$$\boxed{\frac{\omega_a - \omega_b}{\omega_a\,\omega_b} = \frac{1}{\omega_b} - \frac{1}{\omega_a} = \frac{\hbar}{m_e c^2}(1 - \cos\Phi).} \tag{10.1}$$

Für die Wellenlängenänderung des Lichtquants

$$\Delta\lambda = \lambda_b - \lambda_a = 2\pi c\left(\frac{1}{\omega_b} - \frac{1}{\omega_a}\right)$$

folgt

$$\Delta\lambda = 2\pi\,\frac{\hbar}{m_e c}(1 - \cos\Phi).$$

Die Größe $\frac{\hbar}{m_e c}$ wird als „COMPTON-Wellenlänge des Elektrons“ bezeichnet.

Sie ist mit anderen Atomkonstanten verknüpft. Mit (5.9) ist

$$\left.\begin{aligned}
\lambda\!\!\!^{-}_e &= \frac{\hbar}{m_e c} = 384 \cdot 10^{-13}\,\text{cm} \quad \text{„Compton-Wellenlänge des Elektrons"}\\
\alpha\,\lambda\!\!\!^{-}_e &= \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2} = R_{\text{el}} = \frac{384}{137}\cdot 10^{-13}\,\text{cm}\\
&= 2{,}8 \cdot 10^{-13}\,\text{cm} \quad \text{„Klassischer Elektronenradius"}\\
\frac{1}{\alpha}\,\lambda\!\!\!^{-}_e &= \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{e^2 m_e} = r_{\text{H}} = 137 \cdot 384 \cdot 10^{-13}\,\text{cm}\\
&= 0{,}529 \cdot 10^{-8}\,\text{cm} \quad \text{„Radius der 1. Bohrschen Wasserstoffbahn".}
\end{aligned}\right\} \qquad (10.2)$$

Eine weitere Merkzahl ist die COMPTON-Wellenlänge des Protons:

$$\left.\begin{aligned}
\lambda\!\!\!^{-}_p &= \frac{\hbar}{m_p c} = \frac{m_e}{m_p}\,\lambda\!\!\!^{-}_e = \frac{384}{1836}\cdot 10^{-13}\,\text{cm}\\
&= 0{,}21 \cdot 10^{-13}\,\text{cm}.
\end{aligned}\right\} \qquad (10.3)$$

Diskussion von (10.1):

1. Energieverlust und Ablenkwinkel des Quants sind gekoppelt; die Wellenlängendifferenz hängt nur vom Streuwinkel, aber nicht mehr von der Einfallsenergie ab.

2. Das Quant behält nach dem COMPTON-Prozeß die Energie

$$\hbar\omega_b = \frac{\hbar\omega_a \cdot m_e c^2}{m_e c^2 + \hbar\omega_a(1-\cos\Phi)} = \hbar\omega_a \frac{1}{1+\frac{\hbar\omega_a}{m_e c^2}(1-\cos\Phi)}.$$

Das Elektron erhält als kinetische Energie den Differenzbetrag

$$KE_e = \hbar\omega_a - \hbar\omega_b.$$

Für $\Phi=0$ bleibt dem Quant als maximal mögliche Energie die Ausgangsenergie $\hbar\omega_a$, während die Minimalenergie des Quants nach dem Stoß von Null verschieden ist; für $\Phi=\pi$ ergibt sich

$$(\hbar\omega_b)_{\min} = \frac{\hbar\omega_a \cdot m_e c^2}{m_e c^2 + 2\hbar\omega_a} = \hbar\omega_a \frac{1}{1+2\frac{\hbar\omega_a}{m_e c^2}}.$$

In diesem Falle erhält das Elektron die maximal übertragbare Energie

$$(KE_e)_{\max} = \hbar\omega_a - (\hbar\omega_b)_{\min} = \hbar\omega_a \frac{1}{1+\frac{m_e c^2}{2\hbar\omega_a}}. \qquad (10.4)$$

Diese ist stets *kleiner* als $\hbar\omega_a$, das Elektron kann also nicht die gesamte Quantenenergie übernehmen. Der Grund dafür ist die Tatsache, daß der Lichtquantenimpuls kleiner ist als der Impuls eines Elektrons der gleichen kinetischen Energie [vgl. (8.5)], so daß der Impulssatz einen „Photoeffekt" am freien Elektron verbietet.

Beim Photoeffekt übernimmt das ganze Atom den Restbetrag des Impulses. Man kann den Photoeffekt also als Stoß eines Lichtquants mit einem ganzen Atom ansehen, wobei die Energie des Quants anschließend zum Teil an ein Elektron übertragen wird.

Für $\hbar\omega_a \gg m_e c^2$ erhält man aus (10.4):

$$(KE_e)_{\max} \approx \hbar\omega_a\left(1-\frac{m_e c^2}{2\hbar\omega_a}\right)=\hbar\omega_a-\frac{m_e c^2}{2},$$

d.h. die Differenz zwischen Einfallsenergie des Quants und der maximalen kinetischen Energie des Elektrons kann bis zur halben Ruhenergie des Elektrons betragen.

3. Die Wahrscheinlichkeit, mit der eine Streuung um den Winkel Φ vorkommt, bzw. der Wirkungsquerschnitt für COMPTON-Streuung, muß durch Betrachtung der Einzelheiten der Wechselwirkung zusätzlich berechnet werden (Formel von KLEIN-NISHINA).

b) Streuung schneller Elektronen an Atomkernen

Die kinetische Energie der einfallenden Elektronen soll groß sein gegen ihre Ruhenergie (0,511 MeV), d.h. größer als etwa 20 MeV. Dann wird näherungsweise

$$M_a=M_b\approx 0; \qquad M_A=M_B,$$

$$p_a=\frac{E_a}{c}; \qquad p_b=\frac{E_b}{c}; \qquad p_A=0.$$

Damit folgt aus (8.6)

$$E_a+M_A c^2=E_b+\sqrt{p_B^2 c^2+(M_A c^2+E_B^*)^2}$$

und aus (8.7)

$$p_B^2 c^2=E_b^2+E_a^2-2E_a E_b\cos\Phi. \tag{10.5}$$

Elimination von $p_B^2 c^2$ ergibt

$$E_a E_b(1-\cos\Phi)-(E_a-E_b)M_A c^2=-E_B^*(M_A c^2+\tfrac{1}{2}E_B^*).$$

Bei *elastischer* Streuung ist $E_B^*=0$; mit $1-\cos\Phi=2\sin^2\frac{\Phi}{2}$ folgt

$$\boxed{E_b=\frac{E_a}{1+\frac{2E_a}{M_A c^2}\sin^2\frac{\Phi}{2}}}. \tag{10.6}$$

Für $E_a \ll M_A c^2$, d.h. E_a etwa zwischen 20 MeV und 200 MeV, ist E_b nicht viel von E_a verschieden. Die Energieübertragung an den Rückstoßkern ist dann klein:

$$\varepsilon_B = E_a - E_b = E_a \frac{1}{1 + \dfrac{M_A c^2}{2 E_a \sin^2 \dfrac{\Phi}{2}}} \ll E_a .$$

Die Impulsübertragung ist aber nicht klein; sie folgt aus (10.5) und (10.6) zu

$$p_B = 2\sqrt{p_a p_b} \sin \frac{\Phi}{2} \sqrt{1 + \frac{p_a p_b}{M_A^2 c^2} \sin^2 \frac{\Phi}{2}}, \qquad (10.7)$$

was mit $E_a \ll M_A c^2$ bzw. $p_a \ll M_A c$ in

$$p_B \approx 2 p_a \sin \frac{\Phi}{2} \qquad (10.8)$$

übergeht. Das einfallende Elektron kann also, da es so leicht ist, bis zum Doppelten seines Impulses an den Kern übertragen.

Bei *inelastischer* Streuung, d.h. Streuung mit gleichzeitiger Anregung des Kerns A, wird

$$E_b = \frac{E_a - E_B^* - \dfrac{E_B^{*2}}{2 M_A c^2}}{1 + \dfrac{E_a}{M_A c^2}(1 - \cos \Phi)} . \qquad (10.9)$$

Für $E_a, E_B^* \ll M_A c^2$ ergibt sich näherungsweise das anschauliche Resultat

$$E_b \approx E_a - E_B^* .$$

Ein Ausdruck für den Wirkungsquerschnitt der elastischen Elektronenstreuung wird in §34 hergeleitet.

Weitere Beispiele für Reaktionen mit relativistischen Teilchen siehe §44 und §47 (Kernphotoeffekt).

V. Kernzerfälle

In diesem Kapitel soll die Phänomenologie solcher Kernreaktionen behandelt werden, bei denen ein Atomkern spontan in zwei oder mehr Bruchstücke zerfällt. Damit der spontane Zerfall eines Teilchens A möglich ist, muß notwendig $Q \geqq 0$ sein, d.h. der entstehende Tochterzustand muß eine geringere Ruhenergie bzw. -masse haben als der Mutterzustand.

Die Kinematik der Zerfallsreaktionen läßt sich im Falle des Zweiteilchenzerfalls nach den in Kapitel IV beschriebenen Methoden behandeln mit der Abwandlung, daß das die Reaktion einleitende Teilchen a nicht vorkommt; dafür kann aber $E_A^* \neq 0$ sein, d.h. der zerfallende Kern kann sich vorher in einem angeregten Zustand befinden.

Beim Dreiteilchenzerfall ist die Kinematik der Zerfallsprodukte weit weniger durch Energie- und Impulssatz vorherzusagen. Zwar gilt weiterhin, daß die Summe der Energien nach dem Zerfall gleich der Zerfallsenergie und die Impulssumme der Zerfallsteilchen gleich Null ist; über die Energieverteilung auf die einzelnen Teilchen kann man jedoch erst nach zusätzlichen Annahmen Aussagen machen. Ein Dreiteilchenzerfall liegt z.B. beim β-Zerfall vor; die Einzelheiten dieses Zerfalls werden in §50 behandelt. In diesem Kapitel wollen wir uns mit Pauschalaussagen begnügen.

In §11 werden die in der Natur vorkommenden Kernzerfälle vom energetischen Standpunkt diskutiert. Eine Behandlung der Zerfallswahrscheinlichkeiten benötigt quantentheoretische Hilfsmittel und wird erst in Kapitel XIV gegeben. Mit dem zeitlichen Verhalten eines radioaktiven Präparates werden wir uns in §12 beschäftigen.

§ 11. Energiebetrachtungen

a) γ-Zerfall und innere Konversion

Atomkerne haben auf Grund ihrer zusammengesetzten Struktur angeregte Zustände. Wie man sich die Anregung der Elektronenhülle im BOHRschen Modell als Anhebung eines Elektrons in einen energiereicheren Zustand vorstellen kann, so lassen sich auch die angeregten Kernzustände deuten als Neugruppierung der Nukleonen in energiereichere Konfigurationen. Der Übergang von einem angeregten Zustand in den Grundzustand – möglicherweise über Zwischenzustände – erfolgt dann unter Aussendung eines Lichtquants, dessen Frequenz sich aus der BOHRschen Regel (5.2) ergibt. Die Lichtquanten, die bei Kernübergängen emittiert werden, heißen γ-Quanten; ihre Energie liegt in der Größenordnung einiger keV bis MeV.

Mit der Nomenklatur von §8 und der Übereinkunft, daß das Teilchen b das γ-Quant, das Teilchen A der emittierende Kern sei (Teilchen B ist dann der emittierende Kern nach der Emission), und unter Berücksichtigung der Tatsache, daß im vorliegenden Fall das Teilchen A eine Anregungsenergie besitzt, lautet der Energiesatz (8.6):

$$M_A c^2 + E_A^* = M_A c^2 + (KE)_B + E_\gamma .$$

Wenn die Bewegung des Rückstoßkerns B nichtrelativistisch ist, ergibt der Impulssatz (8.7)

$$2M_A(KE)_B = \left(\frac{E_\gamma}{c}\right)^2.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} E_A^* &= E_\gamma\left(1+\frac{E_\gamma}{2M_A c^2}\right) \\ E_\gamma &= M_A c^2\left(-1+\sqrt{1+\frac{2E_A^*}{M_A c^2}}\right) = E_A^*\left(1-\frac{E_A^*}{2M_A c^2}+-\cdots\right). \end{aligned} \quad (11.1)$$

E_γ ist also im Laborsystem fast, aber nicht genau, gleich E_A^*.

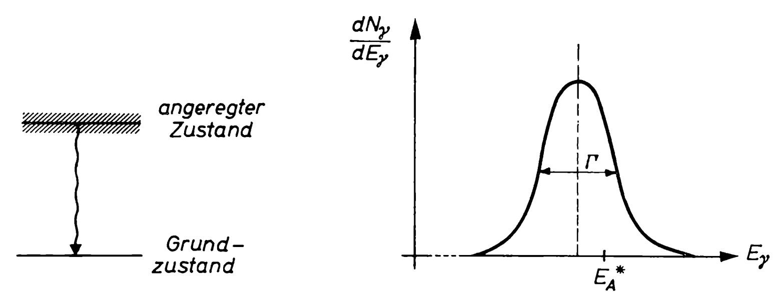


Fig. 11.1. Energiediagramm und Emissionsspektrum beim γ-Zerfall

Auf Grund der endlichen Lebensdauer des angeregten Zustandes ist das Niveau nicht unendlich energiescharf, sondern hat eine „natürliche Linienbreite" Γ, die sich nach der HEISENBERGschen Unschärferelation $\Delta E \cdot \Delta t \geqq \hbar$ (s. § 23) zu

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau} \quad (11.2)$$

(τ = mittlere Lebensdauer) ergibt. Das Spektrum der Lichtquanten, die bei vielen solchen Übergängen emittiert werden, hat dann die Form einer Spektrallinie der Halbwertsbreite Γ; ähnliche Verhältnisse sind aus der Atomphysik geläufig (s. Fig. 11.1). Die Linie wird verbreitert, wenn die Kerne M_A vor dem Zerfall nicht in Ruhe sind, sondern z.B. eine ungeordnete Bewegung ausführen (DOPPLER-Verbreiterung, s. auch § 42).

Ein beim Zerfall eines angeregten Kernzustandes mit dem γ-Zerfall konkurrierender Prozeß ist die *innere Konversion*. Hierbei tritt *kein* γ-Quant auf, sondern die freiwerdende Energie wird an eins der Hüllenelektronen übertragen, das daraufhin nach außen entweicht. Jetzt ist das Teilchen b ein Elektron, das aber zur Zeit des Zerfalls nicht frei, sondern im Atom gebunden war. Der Energiesatz ergibt mit $Q=0$

$$E_A^* = (KE)_B + (KE)_e + (BE)_e.$$

Aus der Impulserhaltung folgt

$$2M_B(KE)_B = 2m_e(KE)_e .$$

Damit wird

$$\left.\begin{aligned} E_A^* &= (KE)_e\left(1+\frac{m_e}{M_B}\right)+(BE)_e \approx (KE)_e+(BE)_e \\ (KE)_e &= \frac{M_B}{M_B+m_e}\,[E_A^*-(BE)_e] . \end{aligned}\right\} \qquad (11.3)$$

Da es für $(BE)_e$ mehrere mögliche diskrete Werte gibt, je nach der Schale, aus der das Elektron emittiert wird, besteht das Elektronenspektrum aus einzelnen Linien.

Anschließend an den Konversionsprozeß fehlt ein Elektron, meist in einer inneren Elektronenschale im Atomverband, so daß RÖNTGEN-Strahlung und AUGER-Elektronenemission zusammen mit der inneren Konversion auftreten.

Als „Konversionskoeffizient" wird die Größe

$$\alpha = \frac{\text{Zahl der pro Zeiteinheit emittierten Elektronen}}{\text{Zahl der pro Zeiteinheit emittierten } \gamma\text{-Quanten}} \qquad (11.4)$$

definiert. Vergleicht man nur die Zahl der aus der K-Schale stammenden Konversionselektronen mit der Zahl der γ-Quanten, so erhält man den partiellen Konversionskoeffizienten α_K; entsprechend kann man α_L, α_M usw. definieren. Es gilt allgemein

$$\alpha = \alpha_K + \alpha_L + \alpha_M + \cdots . \qquad (11.5)$$

Die Konversionskoeffizienten wachsen mit Z^3 und nehmen mit einer hohen Potenz von E_A^* ab (vgl. §49). Bei leichten Kernen überwiegt meist der γ-Zerfall; bei schweren Kernen sind die Zerfälle der untersten angeregten Zustände oft vollständig konvertiert. Weitere Diskussion s. §49.

b) β^--Zerfall

Beim β^--Zerfall eines Kernzustandes werden ein Elektron (e^-) und ein Antineutrino ($\bar{\nu}$) gleichzeitig emittiert, die Kernladungszahl Z erhöht sich dabei um 1. Es handelt sich um einen Dreiteilchenzerfall (das dritte Teilchen ist der Rückstoßkern).

Der Prototyp des β^--Zerfalls ist der Zerfall des Neutrons:

$$n \to p + e^- + \bar{\nu} .$$

Da das Neutron schwerer ist als die Summe der Ruhmassen von Proton und Elektron und das Antineutrino sehr wahrscheinlich die Ruhmasse Null

hat, ist der Prozeß energetisch beim freien Neutron möglich ($Q = 0{,}783$ MeV). Das freie Neutron ist also radioaktiv und zerfällt (mit einer Halbwertszeit von 12 min) in ein Proton, ein Elektron und ein Antineutrino. Man stellt sich vor, daß beim β^--Zerfall eines schweren Kerns ebenfalls diese Reaktion an einem der im Kern vorhandenen Neutronen stattfindet. Daß die Neutronen im allgemeinen innerhalb des Kerns stabil bleiben und nicht zerfallen, ist eine Folge der Kernkräfte.

Es ist wichtig zu bemerken, daß man aus der Tatsache, daß Elektronen beim β^--Zerfall erscheinen, *nicht* schließen kann, daß Elektronen im Kern vorhanden wären. Sie werden vielmehr zusammen mit dem Antineutrino im Moment des Zerfalls gebildet.

Das Antineutrino ist ein Teilchen, das ursprünglich zur Aufrechterhaltung der Erhaltungssätze für Energie, Impuls und Drehimpuls gefordert wurde; inzwischen ist es gelungen, seine Existenz experimentell nachzuweisen. Es hat eine extrem geringe Wechselwirkung mit Materie und verläßt im allgemeinen seinen Entstehungsort, ohne in der Umgebung wieder eingefangen zu werden. Für alle praktischen Erwägungen „verschwindet“ die Energie, die das Antineutrino mitbekommt.

Die Massenbilanz beim β^--Zerfall in *Kern*massen ($\overline{M}$), d.h. ohne die Hüllenelektronen der Atome, lautet

$$Q_{\beta^-} = c^2 ({}_Z\overline{M}^A - {}_{Z+1}\overline{M}^A - m_e - m_{\bar{\nu}}) .$$

Zählt man auf der rechten Seite Z Elektronenmassen zu und ab und vernachlässigt die Differenz der Bindungsenergien der Elektronen von Mutter- und Tochteratom, so kann man in Atommassen (M) schreiben (mit $m_{\bar{\nu}} = 0$):

$$Q_{\beta^-} = c^2 ({}_ZM^A - {}_{Z+1}M^A) . \tag{11.6}$$

Die Energieerhaltung verlangt, daß

$$E_A = E_B + E_e + E_{\bar{\nu}} ,$$

also mit (8.6) und (9.1)

$$Q_{\beta^-} = (KE)_B + (KE)_e + (KE)_{\bar{\nu}} + E_B^* +$$
$$+ \text{Unterschiede der Elektronenbindungsenergien} .$$

Die Unterschiede der Elektronenbindungsenergien sowie die kinetische Energie des Rückstoßteilchens B (= Kern nach dem Zerfall) sind meist so klein, daß sie gegen die anderen Größen vernachlässigt werden können. Die Summe

$$(KE)_e + (KE)_{\bar{\nu}} = (KE)_{\beta^-, \max}$$

muß konstant sein, da Q_{β^-} konstant ist.

Die Aufteilung der Energie auf Elektron und Antineutrino bewirkt die Ausbildung eines kontinuierlichen Elektronenspektrums. $(KE)_{\beta^-,\max}$ ist die Energie, die maximal auf das Elektron übertragen wird, nämlich dann, wenn das Antineutrino keine kinetische Energie mitbekommt. $(KE)_{\beta^-,\max}$

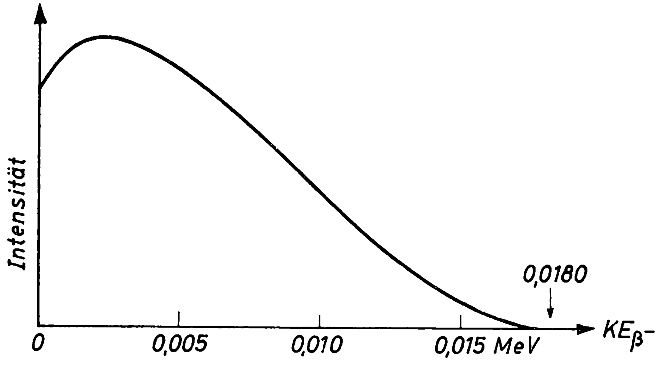


Fig. 11.2. β^--Spektrum beim Zerfall des H^3 (Tritium)

kann durch Extrapolation aus dem gemessenen Elektronenspektrum bestimmt werden (vgl. § 50). Ein typisches (erlaubtes, s. hierzu § 50) β^--Spektrum zeigt Fig. 11.2. Angenähert ist also

$$Q_{\beta^-} \approx (KE)_{\beta^-,\max} \; [+E_B^*]. \tag{11.7}$$

Wenn der β^--Zerfall direkt in den Grundzustand des Tochterkerns erfolgt, entfällt das Glied E_B^*. Mißt man die Größen der rechten Seite von (11.7), so erhält man mit (11.6) direkt den Massenunterschied zweier benachbarter Isobare.

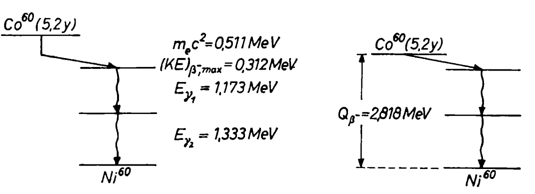


Fig. 11.3. Zerfallsschema des Co^{60} im Kernmassen-Diagramm (links) und im Atommassendiagramm (rechts)

Die Impulserhaltung verlangt, daß die Vektorsumme aus Elektronenimpuls, Neutrinoimpuls und Rückstoßimpuls des zerfallenden Kerns gleich Null ist. Mißt man nur Betrag und Richtung des Impulses eines der Zerfallsteilchen, z. B. für das Elektron, so kann man *nicht* auf die Impulse der anderen Teilchen schließen. Nur in Grenzfällen liegt die Kinematik fest, so z. B. wenn das Zerfallselektron die Maximalenergie und das Neutrino die Energie Null hat. Dann liegt vom Energie- und Impulsstandpunkt ein Zweiteilchenzerfall vor; das Neutrino sorgt nur noch für die Erfüllung der weiteren Erhaltungssätze (z. B. Drehimpuls, Teilchenzahl).

Beispiel: β^--Zerfall des Co^{60}. $(KE)_{\beta^-,\max}=0{,}312$ MeV. Der Tochterkern Ni^{60} zerfällt anschließend in seinen Grundzustand durch Aussendung zweier γ-Quanten in Kaskade ($E_{\gamma_1}=1{,}173$ MeV und $E_{\gamma_2}=1{,}333$ MeV). Damit ist $Q_{\beta^-}=2{,}818$ MeV. Fig. 11.3 zeigt das Zerfallsschema im Kernmassen- und Atommassendiagramm. Der Q_{β^-}-Wert kann im normalerweise angegebenen Atommassendiagramm direkt als Energieunterschied der Grundzustände von Mutter- und Tochterkern abgelesen werden.

c) β^+-Zerfall und Elektroneneinfang

Beim β^+-Zerfall eines Kernzustandes wird ein Positron (e^+, positiv geladenes Teilchen mit Elektronenmasse) und ein Neutrino (ν) emittiert*. Prototyp dieser Reaktion ist der Zerfall des Protons

$$p \to n + e^+ + \nu\,,$$

der allerdings wegen $Q<0$ im freien Zustand nicht ablaufen kann. Daß er im Kernverband dennoch zuweilen stattfindet, ist eine Folge der Kernkräfte. Wiederum liegt ein Dreiteilchenzerfall vor mit kontinuierlichem Positronenspektrum. Das Positronenspektrum beim β^+-Zerfall sieht so ähnlich aus wie das Elektronenspektrum beim β^--Zerfall, nur treten bei kleinen Energien des emittierten β-Teilchens Unterschiede auf, die qualitativ darauf zurückzuführen sind, daß positive Teilchen vom Kern abgestoßen, negative vom Kern angezogen werden. Das Positronenspektrum enthält daher weniger langsame Teilchen als das Elektronenspektrum (vgl. auch §50).

Die Massenbilanz ist in *Kern*massen (die Ruhmasse des Neutrinos ist wahrscheinlich Null):

$$Q_{\beta^+}=c^2({}_Z\overline{M}^A-{}_{Z-1}\overline{M}^A-m_e)\,.$$

Durch Zu- und Abzählen von Z Elektronenmassen erhält man in *Atom*massen:

$$Q_{\beta^+}=c^2({}_ZM^A-{}_{Z-1}M^A-2m_e)\,. \tag{11.8}$$

Wie beim β^--Zerfall ergibt der Energieerhaltungssatz die Beziehung

$$Q_{\beta^+}=(KE)_{\beta^+,\max}\ [+E_B^*]\,. \tag{11.9}$$

Der β^+-Zerfall kann also nur auftreten, wenn der Atommassenunterschied von Mutter- und Tochteratom mindestens gleich $2m_e$ ist, d.h. die Grundzustände der beiden Kerne einen Energieabstand von mindestens

---

* Das Positron ist das „Anti-Teilchen" zum Elektron, das Antineutrino das Antiteilchen zum Neutrino. Elektron, Positron, Neutrino und Antineutrino (sowie das instabile Müon) gehören zur Elementarteilchengruppe der „Leptonen" (leichte Teilchen). Für die Leptonenzahl gibt es den Erhaltungssatz, daß niemals ein Lepton ohne ein Anti-Lepton erzeugt oder vernichtet werden kann. Ein entsprechendes Gesetz der Erhaltung der „Baryonen"-Zahl (schwere Teilchen, dazu gehören die Nukleonen) wurde in §6 erwähnt.

$2m_e c^2 = 1{,}022$ MeV haben. Während nämlich beim β^--Zerfall das vom Kern emittierte Elektron durch den Einfang eines Elektrons in die Hülle ausgeglichen wird, vernichtet sich das Positron *außerhalb* des Atoms mit einem Elektron und erzeugt dort Strahlung einer Energie von insgesamt 1,022 MeV. Die Elektronenbilanz kommt dadurch in Ordnung, daß das Tochteratom ein Elektron weniger in seiner Hülle benötigt.

Beispiel: β^+-Zerfall des Na^{22}. $(KE)_{\beta^+,\,\max} = 0{,}542$ MeV. Der Tochterkern Ne^{22} zerfällt anschließend unter Aussendung eines γ-Quants der Energie 1,277 MeV in seinen Grundzustand. Also $Q_{\beta^+} = 1{,}819$ MeV. Der Massenunterschied ist

$$(M)_{Na^{22}} - (M)_{Ne^{22}} = \frac{1}{c^2}(Q_{\beta^+} + 2m_e c^2) = 2{,}841 \frac{\text{MeV}}{c^2}.$$

Fig. 11.4 zeigt das Zerfallsschema im Kernmassen- und Atommassendiagramm. Im normalerweise gebräuchlichen Atommassendiagramm unterscheiden sich der Energieabstand von Mutter- und Tochterkern und der Wert von Q_{β^+} um $2m_e c^2 = 1{,}022$ MeV.

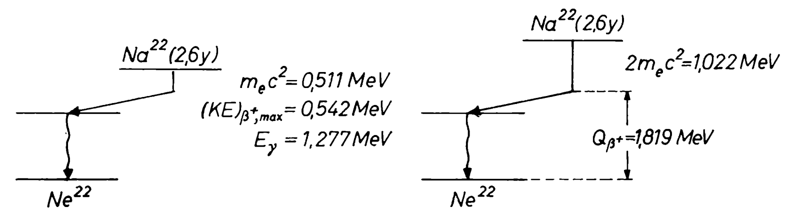


Fig. 11.4. Zerfallsschema des Na^{22} im Kernmassen-Diagramm (links) und im Atommassendiagramm (rechts)

Ein mit dem β^+-Zerfall konkurrierender Zerfallsmechanismus ist der *Elektroneneinfang* („electron capture", *EC*). Ein Elektron aus der Hülle des Atoms wird vom Kern eingefangen, ein Neutrino ausgesandt (Zweiteilchenzerfall: Linienspektrum der Neutrinos):

$$A + e^- = B + \nu.$$

Der Prozeß ist nur durch die Beobachtung der sekundär entstehenden Röntgen- und Auger-Strahlung oder des Rückstoßes des zerfallenden Kerns nachweisbar. Die Energie- und Impulsbeziehungen (Rückstoßteilchen nicht relativistisch) liefern mit

$$Q_{EC} = c^2({}_Z\overline{M}^A + m_e - {}_{Z-1}\overline{M}^A) = c^2({}_Z M^A - {}_{Z-1}M^A)$$
$$= Q_{\beta^+} + 2m_e c^2$$

die Gleichungen

$$Q_{EC} = (KE)_B + E_\nu + (BE)_e \quad [+E_B^*]$$

und

$$p_B = \sqrt{2M_B(KE)_B} = \frac{E_\nu}{c}.$$

Elimination der Neutrinoenergie ergibt

$$Q_{EC}=c^2({}_Z M^A - {}_{Z-1}M^A)=c\,p_B\left(1+\frac{p_B\,c}{2M_B\,c^2}\right)+(BE)_e\;\;[+E_B^*]. \qquad (11.10)$$

In den meisten Fällen ist $p_B\,c \ll 2M_B\,c^2$, dann wird

$$Q_{EC}\approx\sqrt{2M_B\,c^2(KE)_B}+(BE)_e\;\;[+E_B^*].$$

Der Elektroneneinfangsprozeß ist möglich für alle $Q>(BE)_e$; für $Q>2m_e\,c^2$ konkurrieren β^+-Zerfall und Elektroneneinfang. In diesem Bereich nimmt das Verhältnis der Zahl der EC-Prozesse zur Zahl der β^+-Zerfallsprozesse mit Z^3 zu, d.h. der Einfang wird für schwerere Kerne wahrscheinlicher. Physikalisch kommt dies daher, daß die Elektronenbahnen dichter am Kern verlaufen; die Aufenthaltswahrscheinlichkeit der K-Elektronen (und aller anderen s-Elektronen) am Kernort wächst stark mit Z.

Je nach der Schale, aus der das eingefangene Elektron stammt, unterscheidet man K-, L-, M-, ...-Einfang. Wenn K-Einfang energetisch möglich ist [Bedingung: $Q_{EC}>(BE)_K$], nimmt die Häufigkeit der Prozesse K-, L-, M-, ...-Einfang in dieser Reihenfolge ab. [Für $(BE)_L<Q_{EC}<(BE)_K$ ist kein K-, aber L-Einfang möglich, dieser ist dann am häufigsten; für $Q_{EC}<(BE)_L$ gibt es nur noch M-, N-, ...-Einfang]. Dies liegt wiederum daran, daß die Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Elektronen am Kernort, zu der die Einfangswahrscheinlichkeit proportional ist, in derselben Reihenfolge abnimmt.

Ein Beispiel (Zerfall des K^{40}) wird in §12 behandelt.

d) α-Zerfall

Manche Kerne emittieren spontan ein α-Teilchen (${}_2He^4$-Kern). Hierbei tritt kein drittes Teilchen auf, es handelt sich also um einen Zweiteilchenzerfall. Beispiel:

$${}_{92}U^{238}\rightarrow{}_{90}Th^{234}+{}_2He^4+\text{Energietönung}.$$

Die Energiebilanz lautet:

$$\left.\begin{aligned} Q_\alpha &= c^2({}_Z M^A - {}_{Z-2}M^{A-4} - m_\alpha) \\ &= (KE)_B + (KE)_\alpha\;\;[+E_B^*]. \end{aligned}\right\} \qquad (11.11)$$

Die Masse des α-Teilchens ist vergleichbar mit der Masse des Tochterkerns, deshalb darf hier die Rückstoßenergie nicht vernachlässigt werden. Aus dem Impulssatz folgt

$$2M_B\,(KE)_B = 2m_\alpha\,(KE)_\alpha,$$

so daß

$$Q_\alpha = \left(1 + \frac{m_\alpha}{M_B}\right)(KE)_\alpha \;\; [+E_B^*]\,. \tag{11.12}$$

Der natürliche α-Zerfall tritt vorwiegend bei schweren Kernen auf.

e) Andere Zerfälle

Auch die Protonen-, Neutronen- oder Deuteronen-Emission kann als „Zerfall" aufgefaßt werden. Sie erfolgt jedoch innerhalb sehr kurzer Zeiten (weniger als etwa 10^{-12} sec). Die Mutterkerne können daher nur durch Kernreaktionen erzeugt werden. Diese Prozesse wurden bereits in Kapitel IV behandelt. Die einzige weitere spontan mögliche und auch in der Natur vorkommende Zerfallsreaktion ist die Kernspaltung, die in §15 ausführlich besprochen wird.

Tabelle 11.1. *Kernzerfälle*

Zerfall	Ausgangs-atom	Endatom	Ausgesandte Teilchen	Spektrum der Zerfalls-teilchen	Energiebeziehung
γ-Zerfall	$_ZM^{A*}$	$_ZM^A$	γ	γ-Linie	$E_A^* = E_\gamma\left(1 + \frac{E_\gamma}{2M_A c^2}\right)$
Konversion	$_ZM^{A*}$	$_ZM^A$	e^-, Rö + Auger	e^--Linien Rö-Linien	$E_A^* \approx (KE)_e + (BE)_e$
β^--Zerfall	$_ZM^A$	$_{Z+1}M^{A(*)}$	e^-, $\bar{\nu}$, (γ)	$\frac{\Delta N_{e^-}}{\Delta(KE)_{e^-}}$; $(KE)_{e^-}$; $(KE)_{\beta^- max}$	$Q_{\beta^-} \approx (KE)_{\beta^-,\max}$ $[+E_{Z+1}^*M]$
β^+-Zerfall	$_ZM^A$	$_{Z-1}M^{A(*)}$	e^+, ν, (γ)	$\frac{\Delta N_{e^+}}{\Delta(KE)_{e^+}}$; $(KE)_{e^+}$; $(KE)_{\beta^+ max}$	$Q_{\beta^+} \approx (KE)_{\beta^+,\max}$ $[+E_{Z-1}^*M]$
Elektronen-Einfang	$_ZM^A$	$_{Z-1}M^{A(*)}$	ν, Rö + Auger, (γ)	ν-Linie (n)	$Q_{EC} \approx c\,p_B\left(1 + \frac{p_B}{2M_B c}\right) + (BE)_e\,[+E_{Z-1}^*M]$
α-Zerfall	$_ZM^A$	$_{Z-}M^{A-4(*)}$	α, (γ)	α-Linie	$Q_\alpha = \left(1 + \frac{m_\alpha}{M_B}\right)(KE)_\alpha$ $[+E_{Z-2}^*M]$

§ 12. Radioaktives Zerfallsgesetz

a) Zerfallskonstante und Halbwertszeit

Die Kernzerfälle sind dadurch charakterisiert, daß sie spontan erfolgen. Die Wahrscheinlichkeit, daß der Mutterzustand zerfällt, ist für jeden Kern

zu jeder Zeit gleich groß, unabhängig von der Vorgeschichte und auch weitgehend unabhängig von der Umgebung. (Druck, Temperatur usw. haben bei irdischen Größenordnungen keinen Einfluß auf die Zerfallskonstante; hingegen spielt die chemische Bindung bei solchen Zerfällen eine geringe Rolle, die unter Einbeziehung der Elektronenhülle stattfinden, wie *EC* und Konversion.)

Sei λdt die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein gegebener Kernzustand im Zeitelement dt zerfällt. Sind N Kerne zur Zeit t in diesem Zustand vorhanden, so zerfallen *im statistischen Mittel** $N\lambda dt$ Kerne in der Zeit dt. Dies ist gleich der Abnahme der Zahl N während der Zeit dt, also

$$dN = -N\lambda dt. \tag{12.1}$$

Integration über die Zeit von t_0 bis $(t+t_0)$ liefert

$$N = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = N_0 2^{-\frac{t}{T}}. \tag{12.2}$$

Dabei ist

$\tau = \frac{1}{\lambda}$ die „mittlere Lebensdauer des Zustandes",

$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \tau \cdot \ln 2$ die „Halbwertszeit",

N_0 die Zahl der zur Zeit t_0 vorhandenen Kerne im betrachteten Zustand.

Die Halbwertszeit ist diejenige Zeitspanne, nach der *im Mittel* noch die Hälfte der ursprünglich vorhandenen Kerne nicht zerfallen sind. Nach zwei Halbwertszeiten sind nur noch 1/4 der Kerne da, nach drei Halbwertszeiten 1/8 usw., nach zehn Halbwertszeiten noch 1/1024, d.h. etwa $1^0/_{00}$.

Die Zeitspanne τ hat drei anschauliche Bedeutungen: Sie beschreibt die mittlere Lebensdauer des einzelnen Kerns im betrachteten Zustand, denn

$$\frac{1}{N_0}\int_0^\infty t\left|\frac{dN}{dt}\right| dt = \tau.$$

Weiter sind nach Verstreichen der Zeit τ im Mittel noch $1/e \approx 37\%$ der ursprünglich vorhandenen Kerne nicht zerfallen. Schließlich schneidet die im Punkt $t=0$ an die Zerfallskurve gelegte Tangente die Zeitachse im Punkt $t=\tau$, denn die Tangentensteigung ist

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{t=0} = -N_0\lambda = -\frac{N_0}{\tau},$$

---

* Siehe § 12e.

so daß die Tangente die Gleichung hat

$$y = -\frac{N_0}{\tau} t + N_0 = N_0 \left(1 - \frac{t}{\tau}\right).$$

Bei $y=0$ ist also $t=\tau$ (vgl. Fig. 12.1).

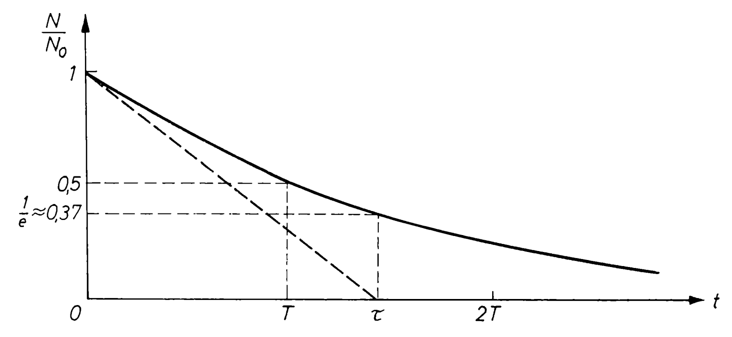


Fig. 12.1. Bestimmungsgrößen der Exponentialfunktion beim radioaktiven Zerfall

Wird mit M die Zahl der Atome im Mutterzustand, mit N die Zahl der Atome im Tochterzustand bezeichnet und ist $N_{(t=0)}=0$, so ist die Zahl der Tochterkerne zur Zeit t:

$$N_{(t)} = M_0 - M_{(t)} = M_0 (1 - e^{-\lambda t}).$$

Daraus folgt

$$\frac{N_{(t)}}{M_{(t)}} = e^{\lambda t} - 1. \tag{12.3}$$

Bestimmt man experimentell die Größe $N_{(t)}/M_{(t)}$, d.h. das zur Zeit t vorhandene Atomzahlenverhältnis, so kann man daraus unter der Voraussetzung $N_{(t=0)}=0$ die Größe λt gewinnen. Ist λ bekannt, so folgt das „Alter" t der Probe; ist das Alter bekannt, so ergibt sich die Zerfallskonstante bzw. die Halbwertszeit. Gleichung (12.3) liegt vielen Methoden zur Bestimmung des Absolutalters von Gesteinen und anderen natürlichen Objekten zugrunde.

b) Dualer Zerfall

Es gibt Fälle, in denen der Mutterzustand mehrere Zerfallsmöglichkeiten hat. Ein Beispiel ist der Kern K^{40}, dessen Grundzustand sowohl durch β^--Emission als auch durch *EC* zerfallen kann. Fig. 12.2 zeigt das Zerfallsschema. Die Übergänge direkt in den Grundzustand des A^{40} sind so selten, daß sie hier vernachlässigt werden können. Es gibt also zwei unabhängige

„Todesursachen", somit addieren sich zwei Zerfallswahrscheinlichkeiten:

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 .$$

Wenn der Index 1 das eine, der Index 2 das andere Tochterprodukt kennzeichnet, gilt

$$M = M_0\, e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t},$$
$$dN_1 = \lambda_1 M\, dt,$$
$$dN_2 = \lambda_2 M\, dt.$$

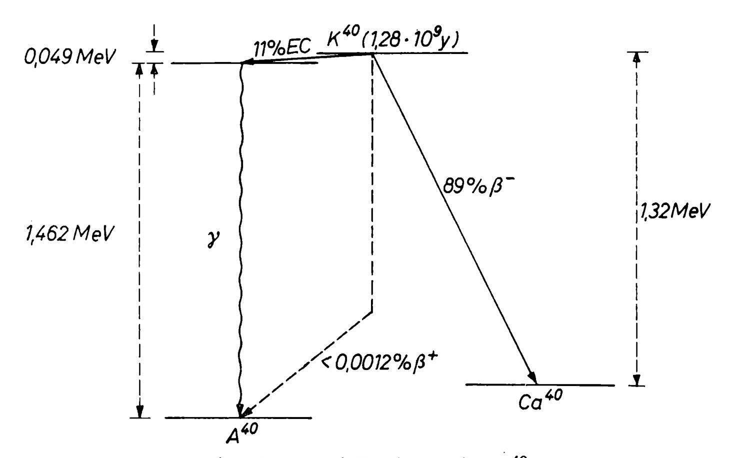


Fig. 12.2. Zerfallsschema des K^{40}

Daraus folgt durch Integration mit der Anfangsbedingung, daß zur Zeit $t=0$ die Anzahl M_0 an Kernen des Mutterisotops und kein Tochterprodukt vorhanden war:

$$N_{1(t)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} M_0 \left(1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\right),$$
$$= \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} M_{(t)} \left(e^{(\lambda_1+\lambda_2)t} - 1\right),$$
$$N_{2(t)} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} M_{(t)} \left(e^{(\lambda_1+\lambda_2)t} - 1\right).$$

Für $t \ll 1/(\lambda_1+\lambda_2)$ ist näherungsweise

$$\frac{N_{1(t)}}{M_{(t)}} \approx \lambda_1 t; \quad \frac{N_{2(t)}}{M_{(t)}} \approx \lambda_2 t,$$

so daß nach kleinen Zeitintervallen (klein verglichen mit den Halbwertszeiten) die Mengen der entstehenden Tochtersubstanzen unabhängig von der

Dualität des Zerfalls sind. Solange $t \ll T$ ist, darf man also beide Zerfälle getrennt voneinander betrachten und „partielle" Halbwertszeiten definieren. So ist beim K^{40}

$$T_{\beta^-} = \frac{0{,}693}{\lambda_{\beta^-}} = 1{,}44 \cdot 10^9 \text{ y},$$

$$T_{EC} = \frac{0{,}693}{\lambda_{EC}} = 1{,}15 \cdot 10^{10} \text{ y},$$

während insgesamt

$$T = \frac{0{,}693}{\lambda_{\beta^-} + \lambda_{EC}} = 1{,}28 \cdot 10^9 \text{ y}$$

ist.

Zu allen Zeiten gilt die Beziehung

$$\frac{N_{1\,(t)}}{N_{2\,(t)}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{T_2}{T_1},$$

d.h. das Verhältnis der Atomzahlen der Tochterprodukte ist umgekehrt proportional dem Verhältnis der partiellen Halbwertszeiten.

c) Säkulares Gleichgewicht

Ist bei einem radioaktiven Zerfall das Tochterprodukt seinerseits radioaktiv, so entstehen im Zeitelement *dt im Mittel* nur

$$dN = (\lambda_M M - \lambda_N N)\, dt$$

Atome des Tochterproduktes. dN wird gleich Null, d.h. N zeitlich konstant, wenn $\lambda_M M = \lambda_N N$. Dies kann nur dann über längere Zeit erfüllt werden, wenn λ_M klein (d.h. T_M groß) gegen die Beobachtungsdauer ist, so daß $\lambda_M M \approx \lambda_M M_0$ bleibt. Dann ist

$$N = \frac{\lambda_M}{\lambda_N} M_0 = \text{const} \qquad \text{(säkulares Gleichgewicht)}\,.$$

Ein wichtiges Beispiel ist der Zerfall des Sr^{90}:

$$Sr^{90} \xrightarrow[28\,y]{\beta^-} Y^{90} \xrightarrow[64{,}8\,h]{\beta^-} Zr^{90} \text{ (stabil)}.$$

Geht man von einem Vorrat an reinem Sr^{90} aus, so wächst die Zahl der Y^{90}-Atome zunächst mit $(1 - e^{-\lambda_{Y^{90}} t})$ an, erreicht (fast) den Sättigungswert

$$N_{Y^{90}} = \frac{\lambda_{Sr^{90}}}{\lambda_{Y^{90}}} (N_0)_{Sr^{90}}$$

und fällt dann mit der Halbwertszeit des Sr^{90} langsam ab.

Ist zweites, drittes ... Tochterprodukt ebenfalls radioaktiv, so spricht man von einer *Zerfallskette*. Die Bedingung für säkulares Gleichgewicht ist dann

$$M_{(t)} \approx M_0 ;$$

$$\lambda_i N_i = \lambda_{i-1} N_{i-1} = \cdots$$

oder

$$\frac{N_i}{T_i} = \text{const} \quad (\text{für alle } i),$$

d.h. im säkularen Gleichgewicht verhalten sich die Atomzahlen jedes Tochterproduktes wie deren Halbwertszeiten. Solche Zerfallsketten existieren bei den schweren Elementen Uran, Thorium und Neptunium, die stabilen Endprodukte der Ketten sind Blei- und Wismutisotope.

d) Aktivität

Als „Aktivität" eines Präparates wird die mittlere Zahl der Zerfälle pro Zeiteinheit, also die Größe dN/dt oder λN, bezeichnet. Die Einheit der Aktivität ist das „Curie". Definition:

$$1 \text{ Curie} = 3{,}70 \cdot 10^{10} \text{ Zerfallsakte/sec}.$$

1 Curie ist etwa (aber nicht genau) gleich der Zahl der α-Zerfälle pro sec von 1 g Ra^{226}. Da das Ra^{226} eine Halbwertszeit von fast genau 1600 y hat, entspricht 1 Curie einer Substanz etwa der Menge

$$\frac{(A)}{226} \frac{T}{1600\,\text{y}} \text{ g}$$

der Substanz.

Auch die Aktivität fällt mit der Halbwertszeit des radioaktiven Zustandes zeitlich ab.

e) Zählstatistik

Das radioaktive Zerfallsgesetz (12.2) mit allen Folgen gilt nur „im Mittel", d.h. als Mittelwert über sehr viele Zerfälle. Im einzelnen schwankt die Zahl Z der in der Zeit t gemessenen Zerfälle um den Mittelwert $\bar{Z}$ nach der POISSON-Verteilung: Die Wahrscheinlichkeit $W_{(Z,\bar{Z})}$, bei einem bekannten Mittelwert $\bar{Z}$ die Zerfallszahl Z zu registrieren, ist gegeben durch

$$W_{(Z,\bar{Z})} = \frac{\bar{Z}^Z}{Z!} e^{-\bar{Z}}. \tag{12.4}$$

Dabei ist die Größe Z nur ganzzahliger positiver Werte fähig, während $\bar{Z}$ irgendeine positive relle Zahl sein kann *.

Herleitung: Sei $\bar{a} = \bar{Z}/t$ die mittlere Zerfallsrate des Präparates. Dann ist in einem kleinen Zeitintervall dt die Wahrscheinlichkeit für *einen* Zerfallsakt gegeben durch

$$W_{1(dt)} = \bar{a}\, dt;$$

für sehr kleine dt ist die Wahrscheinlichkeit, daß zwei oder mehr Atome in dt zerfallen, vernachlässigbar klein. Weiter ist die Wahrscheinlichkeit, daß *kein* Atom in dt zerfällt,

$$W_{0(dt)} = 1 - \bar{a}\, dt.$$

Um einen Ausdruck zu gewinnen für die Wahrscheinlichkeit $W_{Z(t+dt)}$, daß Z Atome in der Zeit $t+dt$ zerfallen, zerlegt man das Zeitintervall in die Abschnitte t und dt. $W_{Z(t+dt)}$ setzt sich dann zusammen aus den Anteilen:

$(Z-1)$ Zerfälle in t und 1 Zerfall in dt

und

Z Zerfälle in t und kein Zerfall in dt.

Also

$$W_{Z(t+dt)} = W_{Z-1(t)}\, W_{1(dt)} + W_{Z(t)}\, W_{0(dt)},$$

$$W_{Z(t)} + \frac{d W_Z}{dt} dt = W_{Z-1(t)}\, \bar{a}\, dt + W_{Z(t)}(1 - \bar{a}\, dt)$$

$$\frac{d W_Z}{dt} = \bar{a}(W_{Z-1(t)} - W_{Z(t)}).$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$W_{Z(t)} = \frac{(\bar{a}\, t)^Z}{Z!} e^{-\bar{a} t} = \frac{\bar{Z}^Z}{Z!} e^{-\bar{Z}},$$

wie man durch Zurückdifferenzieren leicht bestätigt. $W_{Z(t)}$ ist aber die Wahrscheinlichkeit, daß bei einem Mittelwert $\bar{Z} = \bar{a} t$ gerade Z Zerfallsakte in der Zeit t vorkommen, also ist $W_{Z(t)}$ identisch mit der oben definierten Größe $W_{(Z, \bar{Z})}$.

Es gilt

$$\sum_{Z=0}^{\infty} W_{(Z,\bar{Z})} = 1 \quad \text{und} \quad \int_0^{\infty} W_{(Z,\bar{Z})}\, d\bar{Z} = 1,$$

so daß $W_{(Z,\bar{Z})}$ eine normierte Wahrscheinlichkeitsfunktion ist.

Umgekehrt kann (12.4) aufgefaßt werden als die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Mittelwert $\bar{Z}$ ist, wenn Z Atome in der Zeit t zerfallen sind. Denn die Wahrscheinlichkeit, daß bei gegebenem $\bar{Z}$ gerade Z Atome in der

---

* Für große Z und $\bar{Z}$ geht (12.4) über in die Gauss-Verteilung

$$W_{(Z,\bar{Z})} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{Z-\bar{Z}}{\sigma}\right)^2\right],$$

s. L. J. Rainwater und C. S. Wu, Nucleonics **1**, 60—69 (1947).

Zeit t zerfallen, ist genau so groß wie die Wahrscheinlichkeit, daß bei Z Zerfallsprozessen der Mittelwert den Wert $\bar{Z}$ hat.

Die mittlere quadratische Abweichung des Wertes $\bar{Z}$ von der gemessenen Zerfallszahl Z wird als „einfacher statistischer Fehler" σ bezeichnet. Es ist

$$\sigma^2 = \int_0^\infty (Z-\bar{Z})^2 W_{(Z,\bar{Z})} d\bar{Z} = \int_0^\infty (Z-\bar{Z})^2 \frac{\bar{Z}^Z}{Z!} e^{-\bar{Z}} d\bar{Z}.$$

Mit

$$\int_0^\infty \bar{Z}^n e^{-\bar{Z}} d\bar{Z} = n!$$

ergibt sich

$$\sigma^2 = Z^2 - 2Z(Z+1) + (Z+1)(Z+2) = Z+2.$$

Für große Z (praktisch immer gegeben) kann man die 2 vernachlässigen und erhält

$$\sigma = \sqrt{Z}, \tag{12.5}$$

d.h. eine Messung von Z Zerfallsakten in der Zeit t ist mit dem einfachen statistischen Fehler $\pm\sqrt{Z}$ behaftet. Praktisch bedeutet dies, daß mit etwa 68% Wahrscheinlichkeit der wahre Wert $\bar{Z}$ innerhalb des Intervalls $Z-\sqrt{Z}<\bar{Z}<Z+\sqrt{Z}$ liegt; mit etwa 96% Wahrscheinlichkeit liegt er innerhalb des Intervalls $Z-2\sqrt{Z}<\bar{Z}<Z+2\sqrt{Z}$.

Eine aus der Messung von Z und t (letztere als fehlerlos angenommen) hergeleitete Zählrate $\dot{Z}=Z/t$ hat den einfachen statistischen Fehler $\sqrt{\dot{Z}/t}$, da

$$\frac{Z\pm\sqrt{Z}}{t} = \dot{Z} \pm \sqrt{\frac{\dot{Z}}{t}}.$$

Um eine Zählrate auf 1% genau zu messen, muß man also 10000 Zerfallsakte zählen, bei 1‰ Genauigkeit ist die Messung von 10^6 Zerfallsakten erforderlich.

Um von der gemessenen Zählrate auf die Aktivität

$$\bar{A} = \overline{\frac{dN}{dt}} = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$$

zu schließen, muß zusätzlich die Ansprechwahrscheinlichkeit η der Zählanordnung für die untersuchte Strahlung bekannt sein; dann ist

$$\bar{A} = \frac{1}{\eta}\left(\dot{Z} \pm \sqrt{\frac{\dot{Z}}{t}}\right).$$

Dabei ist η das Verhältnis der Zahl der registrierten zur Zahl der wahren Zerfallsakte.

VI. Tröpfchenmodell des Atomkerns

§ 13. WEIZSÄCKERsche Formel

Um eine anschauliche Vorstellung vom Zustandekommen der in § 6 eingeführten Kernbindungsenergien zu gewinnen, ist eine Modellvorstellung des Kerns nützlich. Ein – sicher zu primitives – Modell ist ein kleines Flüssigkeitströpfchen, dessen „Moleküle" die Nukleonen sind. Ein solches Tröpfchen hat eine Volumen-(Kondensations-)energie und eine Oberflächenenergie. Die Ladung der Protonen im Kern verursacht darüber hinaus eine Verringerung der Bindung, da sich die Protonen elektrisch gegenseitig abstoßen. Ausgehend von diesem Modell stellte v. WEIZSÄCKER eine Formel für die Kernbindungsenergie auf; zusätzlich zu den oben erwähnten drei Termen erhält sie einen „Symmetrieterm" und einen Term der „Paarungsenergie". Sicher ist dieses Modell zu sehr vereinfacht. Die Tatsache, daß es trotzdem die Bindungsenergien recht befriedigend wiedergibt, spricht aber für die Realität der zugrundeliegenden physikalischen Annahmen.

Die Terme sind im einzelnen:

a) Kondensationsterm

Aufgrund der Kernkräfte ziehen sich die Nukleonen an und „kondensieren". Dabei wird eine Energiemenge frei, die proportional zur Nukleonenzahl A ist *. Dieser Term wird größer sein als 8 MeV pro Nukleon [vgl.(6.4)], da z.B. die Abstoßung der Protonen der Bindungstendenz entgegenwirkt.

$$(BE)_{\text{Kond.}} = -a_1 A. \tag{13.1}$$

b) Oberflächenterm

Die an der Oberfläche des Kerntröpfchens befindlichen Nukleonen werden nicht so fest gebunden. Der Term (13.1) muß also verkleinert werden:

$$(BE)_{\text{Oberfl.}} = +\text{const} \cdot 4\pi R^2.$$

Eine vernünftige und mit (13.1) verträgliche Annahme ist, daß das Volumen des Kerntröpfchens (Kugel mit Radius R) proportional der Nukleonenzahl A ist, also

$$\frac{4\pi}{3} R^3 \text{ prop. } A$$

oder

$$R \approx R_0 A^{\frac{1}{3}} \quad \text{mit} \quad R_0 \approx 1{,}2 \cdot 10^{-13}\,\text{cm} \tag{13.2}$$

* Aber die Zahl der Nukleonenpaare ist $\frac{1}{2}A(A-1)$.

(experimenteller Bestwert; genaues s. § 34). Damit ergibt sich der Oberflächenterm zu

$$(BE)_{\text{Oberfl.}} = +a_2 A^{\frac{2}{3}}. \tag{13.3}$$

Durch eine grobe Abschätzung kann man sich einen Zusammenhang zwischen den Konstanten a_2 und a_1 herleiten:

Der einem einzelnen Nukleon zur Verfügung stehende Raum im Kern ist mit (13.2)

$$\frac{1}{A}\frac{4\pi}{3}R^3.$$

Wenn man den Kern in Gedanken in eine Oberflächenschicht der Dicke

$$R_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{A}\frac{4\pi}{3}R^3}$$

und ein Inneres zerlegt, befinden sich in der Oberflächenschicht näherungsweise

$$\frac{4\pi R^2 R_1}{\frac{1}{A}\frac{4\pi}{3}R^3} = 3\sqrt[3]{\frac{4\pi}{3}}\,A^{\frac{2}{3}} = 4{,}8\,A^{\frac{2}{3}}$$

Nukleonen. Diese werden nicht von allen Seiten angezogen; der dem einzelnen Nukleon zur Verfügung stehende Raum zeigt mit rund $\frac{1}{4}$ seiner Oberfläche nach außen, wo keine Bindungskräfte wirken. Also ist

$$(BE)_{\text{Oberfl.}} \approx +\tfrac{1}{4}a_1 \cdot 4{,}8\,A^{\frac{2}{3}}.$$

Vergleich mit (13.3) liefert

$$a_2 \approx 1{,}2\,a_1.$$

Dabei ist der Faktor $\frac{1}{4}$ roh geschätzt, so daß nur die Aussage $a_2 \approx a_1$ sinnvoll erscheint. Es herrscht qualitative Übereinstimmung mit dem aus den Meßdaten bestimmten Wert (s. u.).

c) Elektrische Abstoßung der Protonen

Das Kerntröpfchen ist Z-fach positiv geladen. Das bewirkt eine Verringerung der Bindungsenergie um

$$(BE)_{\text{el. Abstoßung}} = +a_3 \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}}. \tag{13.4}$$

Herleitung: Die Grundgleichung der Elektrostatik lautet

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Mit dem Gaussschen Satz

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint \rho\, dV = \iint E_n\, df$$

ergibt sich unter der Annahme, daß die Ladung Ze des Kerns homogen über das Tröpfchen verschmiert ist, bei Integration über eine Kugel des Radius $r<R$

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\rho\frac{4\pi}{3}r^3=\iint E_n\,df.$$

Dabei ist

$$\rho=\frac{Ze}{\frac{4\pi}{3}R^3}=\frac{3Ze}{4\pi R^3}.$$

Aus Symmetriegründen hat $\vec{E}$ nur eine Radialkomponente E_r, so daß

$$\iint E_n\,df=\iint E_r\,r^2\,d\Omega=4\pi r^2 E_r.$$

Also ist die elektrische Feldstärke für $r<R$ gegeben durch

$$E_r=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze}{R^3}r.$$

Das elektrische Potential folgt aus

$$\varphi=-\int\vec{E}\cdot d\vec{r}$$

zu

$$\varphi_{(r)}-\varphi_{(R)}=-\int_R^r\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r\,dr}{R^3}=\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left(\frac{R^2}{2}-\frac{r^2}{2}\right)\quad\text{für}\quad r<R.$$

Für $r\geqq R$ kann die Kernladung als punktförmig am Ursprung aufgefaßt werden, deren Potential mit der Festsetzung

$$\varphi_{(\infty)}=0$$

gegeben ist durch

$$\varphi_{(r)}=\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\quad\text{für}\quad r\geqq R.$$

Insbesondere gilt also

$$\varphi_{(R)}=\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R},$$

so daß insgesamt (s. auch Fig. 13.1)

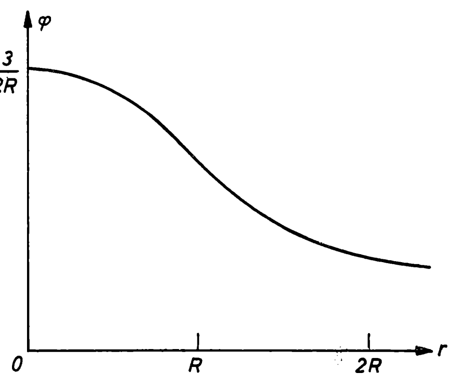


Fig. 13.1. Elektrisches Potential als Funktion des Abstandes vom Mittelpunkt einer homogen geladenen Kugel des Radius R

$$\varphi_{(r)}=\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\begin{cases}\dfrac{1}{2R}\left(3-\dfrac{r^2}{R^2}\right) & \text{für}\quad r\leqq R\\[2ex] \dfrac{1}{r} & \text{für}\quad r\geqq R.\end{cases}\qquad(13.5)$$

Die Selbstenergie der geladenen Kernkugel folgt dann aus der Formel der Elektrostatik

$$PE = \tfrac{1}{2}\int_0^R \varphi\,\rho\,dV = \tfrac{1}{2}\int_0^R \varphi\,\rho\,4\pi\,r^2\,dr$$

zu

$$PE = \frac{3}{5}\,\frac{(Ze)^2}{4\pi\,\varepsilon_0 R}\,.$$

Dieser Ausdruck stimmt mit (13.4) überein und liefert einen theoretischen Wert für die Konstante a_3:

$$a_3 = \frac{3}{5}\,\frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0 R_0}\,.$$

Die Gleichung (13.4) läßt sich damit folgendermaßen schreiben:

$$(BE)_{\text{el.Abstoßung}} = \frac{3}{5}\underbrace{m_e c^2}_{0{,}511\,\text{MeV}}\,\underbrace{\frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,m_e c^2}}_{R_{\text{el}}}\,\frac{1}{R_0}\,\frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}}\,.$$

Mit (10.2) und (13.2) folgt

$$(BE)_{\text{el. Abstoßung}} \approx 0{,}72\,\text{MeV}\,\frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}}\,. \tag{13.6}$$

Man erwartet also einen Wert $a_3 = 0{,}72$ MeV.

Auf Grund der Vorstellung, daß die Ladung jedes einzelnen Protons über den ganzen Kern verschmiert ist, die Abstoßung der Einzelelemente eines Protons aber in dessen Ruhmasse enthalten ist, sollte Zmal die COULOMB-Energie eines Protons abgezogen werden. Statt Z^2 stünde dann in (13.6) ein Faktor $Z(Z-1)$. Wir wollen diese Korrektur aber nicht vornehmen, da sie sich beim Vergleich mit dem Experiment (außer bei kleinen Nukleonenzahlen) als unnötig ergeben hat.

d) Symmetrieterm

Solange die elektrische Abstoßung der Protonen vernachlässigt wird, findet man, daß Kerne mit $Z = N$ am stabilsten sind. Dieses Verhalten läßt sich durch Betrachtung der Nukleonen als degeneriertes Gas *, das das Kernvolumen $\frac{4\pi}{3} R^3$ ausfüllt, verstehen.

Es ergibt sich ein Beitrag zur Bindungsenergie der Größe

$$(BE)_{Z-N\text{-Symmetrie}} = +a_4\,\frac{(N-Z)^2}{A}\,. \tag{13.7}$$

Herleitung: Zunächst werde das Protonengas allein betrachtet. Der Protonenimpuls sei mit p bezeichnet. Die Anzahl n der Protonenzustände im vollständig degenerierten Grundzustand des Kerns bei einem Kernvolumen von $\frac{4\pi}{3} R^3$ wird gegeben durch das

* Da sowohl Protonen als auch Neutronen den Spin $\frac{1}{2}$ haben, befolgen sie die FERMI-DIRAC-Statistik, es handelt sich also um ein FERMI-Gas. Siehe auch § 24, Abschnitt 5.

quantisierte Phasenintegral (Faktor 2 wegen der beiden möglichen Spineinstellungen):

$$2 \iiint_0^{p_{\max}} \iiint_0^{\frac{4\pi}{3}R^3} dx\,dy\,dz\,dp_x\,dp_y\,dp_z = n h^3. \tag{13.8}$$

Wenn je ein Proton einen Quantenzustand besetzt, ist $n=Z$. Damit und mit (13.2) ist wegen $h=2\pi\hbar$

$$2\frac{4\pi}{3} R_0^3 A \cdot 4\pi \frac{p_{\max}^3}{3} = Z(2\pi\hbar)^3.$$

Daraus

$$p_{\max}^{(\text{Protonen})} = \frac{\hbar}{R_0}\sqrt[3]{\frac{9\pi}{4}\frac{Z}{A}}. \tag{13.9}$$

Entsprechend gilt für das Neutronengas (Neutronenzahl N):

$$p_{\max}^{(\text{Neutronen})} = \frac{\hbar}{R_0}\sqrt[3]{\frac{9\pi}{4}\frac{N}{A}}.$$

Die gesamte kinetische Energie aller Protonen (die Summe über die Z Protonen wird näherungsweise durch ein Integral ersetzt) ist gegeben durch

$$(KE)^{\text{Protonen}} = \int_0^Z \frac{p^2}{2m_p}\,dn,$$

wobei sich dn aus (13.8) berechnet:

$$2\frac{4\pi}{3} R_0^3 A \cdot 4\pi p^2\,dp = (2\pi\hbar)^3\,dn,$$

$$dn = \frac{4}{3\pi\hbar^3} R_0^3 A p^2\,dp,$$

also

$$(KE)^{(\text{Protonen})} = \int_0^{p_{\max}^{(\text{Protonen})}} \frac{p^2}{2m_p}\,\frac{4}{3\pi\hbar^3} R_0^3 A p^2\,dp$$

$$= \frac{2}{3\pi}\,\frac{AR_0^3}{m_p\hbar^3}\,\frac{(p_{\max}^{(\text{Protonen})})^5}{5}$$

$$= \frac{3}{10}\left(\frac{9\pi}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{m_p R_0^2} Z \left(\frac{Z}{A}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$(KE)^{(\text{Protonen})} = C Z\left(\frac{Z}{A}\right)^{\frac{2}{3}} \quad \text{mit} \quad C = \frac{3}{10}\left(\frac{9\pi}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{m_p R_0^2} = 32{,}6\ \text{MeV}.$$

Entsprechend ergibt sich für die gesamte kinetische Energie der Neutronen:

$$(KE)^{(\text{Neutronen})} = C N\left(\frac{N}{A}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Ein Kern mit Z Protonen und N Neutronen hat dann den Energieinhalt (hier wird *nur* die kinetische Energie betrachtet, nicht die Oberflächen- und die elektrische Abstoßungsenergie)

$$E=C\left[Z\left(\frac{Z}{A}\right)^{\frac{2}{3}}+N\left(\frac{N}{A}\right)^{\frac{2}{3}}\right].$$

Wird der Neutronenüberschuß $\Delta=N-Z$ eingeführt, so erhält man

$$N=\frac{A+\Delta}{2}; \quad Z=\frac{A-\Delta}{2},$$

$$E=\frac{C}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\left[(A-\Delta)\left(1-\frac{\Delta}{A}\right)^{\frac{2}{3}}+(A+\Delta)\left(1+\frac{\Delta}{A}\right)^{\frac{2}{3}}\right].$$

Entwickelt man bis zu Gliedern in $\left(\frac{\Delta}{A}\right)^2$, so folgt mit

$$(1+x)^{\frac{2}{3}}=1+\tfrac{2}{3}x-\tfrac{1}{9}x^2+-\cdots$$

$$E\approx\frac{C}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\left[2A+\frac{10}{9}\frac{\Delta}{A}\right]=C\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\left[A+\frac{5}{9}\frac{(N-Z)^2}{A}\right].$$

Man sieht, daß als Folge der Betrachtung der Nukleonen als FERMI-Teilchen ein Energiebeitrag auftritt, der proportional zu A und ein weiterer, der proportional zu $\frac{1}{A}(N-Z)^2$ ist. Die Modellwerte der Vorfaktoren haben die gleiche Größenordnung wie die experimentellen Bestwerte (s.u.).

e) Paarungsenergieterm

Die Kernkräfte haben die Eigenschaft, daß sie die Spins zweier gleicher Nukleonen antiparallel ausrichten (s. § 27). Der Zustand mit einem solchen (abgesättigten) Paar liegt energetisch niedriger als einer mit zwei einzelnen Nukleonen. Bezeichnet man mit g eine gerade Anzahl, mit u eine ungerade Anzahl von Protonen bzw. Neutronen, so werden g-g-Kerne (d.h. solche, die eine gerade Protonen- und eine gerade Neutronenzahl haben) relativ am stärksten, g-u- und u-g-Kerne mittelstark und u-u-Kerne am schwächsten gebunden sein. Dieser Tatsache trägt man Rechnung durch einen Paarungsenergieterm in der Bindungsenergie

$$(B\,E)_{\text{Paarung}}=\lambda\,\delta_{(A,\,Z)} \tag{13.10}$$

mit

$$\lambda=\begin{cases}-1 & \text{für } g\text{-}g\text{-Kerne}\\ 0 & \text{für } g\text{-}u\text{- und } u\text{-}g\text{-Kerne}\\ +1 & \text{für } u\text{-}u\text{-Kerne.}\end{cases}$$

Näherungsweise ergibt sich aus den Meßdaten

$$\delta \approx a_5 A^{-\frac{3}{4}}, \tag{13.11}$$

allerdings hängt δ etwas von Z ab und ist für Neutronenpaare und Protonenpaare geringfügig verschieden.

Die Bindungsenergie eines Kerns der Protonenzahl Z, der Neutronenzahl N und der Nukleonenzahl $A = Z + N$ läßt sich dann nach dem Tröpfchenmodell mit (13.1), (13.3), (13.4), (13.7) und (13.11) schreiben als

$$\boxed{{}_Z(BE)_N^A = -a_1 A + a_2 A^{\frac{2}{3}} + a_3 \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + a_4 \frac{(N-Z)^2}{A} + a_5 \lambda A^{-\frac{3}{4}}.} \tag{13.12}$$

Dies ist die WEIZSÄCKERsche Formel für die Kernbindungsenergie.

Aus dem Vergleich mit experimentellen Massenwerten ergeben sich für die Konstanten a_1 bis a_5 folgende Zahlenwerte:

$$\begin{aligned} a_1 &\approx 15{,}5\ \text{MeV} \\ a_2 &\approx 16{,}8\ \text{MeV} \\ a_3 &\approx 0{,}72\ \text{MeV} \\ a_4 &\approx 19\quad \text{MeV} \\ a_5 &\approx 33{,}5\ \text{MeV}. \end{aligned}$$

Der Einfluß der verschiedenen Anteile ist in Fig. 13.2 dargestellt. Die beste Übereinstimmung mit den experimentellen Daten gibt die folgende Massenformel (in m_u), die nach (6.1) und (13.12) angepaßt wurde:

$$ {}_Z M_N^A = 1{,}0143\, A + 0{,}018\, A^{\frac{2}{3}} + 0{,}0419 \left\{ \frac{(Z - Z_A)^2}{Z_A} - Z_A \right\} + \frac{0{,}036\, \lambda}{A^{\frac{3}{4}}} \tag{13.13}$$

mit

$$Z_A = \frac{A}{1{,}98067 + 0{,}01496\, A^{\frac{2}{3}}}.$$

Diskussion: Der stabilste Kern (kleinste Masse) hat bei gegebenem A denjenigen Z-Wert, der Z_A am nächsten liegt; die Funktion $Z = Z_A$ beschreibt die „Sohle" des „Tals der stabilen Kerne". Die gebräuchlichen Isotopenkarten sind Rastertabellen, in denen Z als diskrete Ordinate und $N = A - Z$ als diskrete Abszisse aufgetragen ist. Die Sohle des Energietals ist dann eine Linie, die mit einer Steigung von fast genau 45° aus dem Ursprung kommt und für schwere Kerne etwas zur N-Achse abbiegt, so daß für die schwersten Kerne $N \approx 1{,}42\, Z$ ist.

Für konstantes A ist $_ZM_N^A$ eine quadratische Funktion (Parabel) in Z. Für ungerades A ist $\lambda=0$, also gibt es nur *eine* Parabel und damit nur einen stabilen Kern. Die anderen Kerne sind radioaktiv und können sich durch β-Zerfall oder EC in den stabilen umwandeln. Für gerades A (zwei Parabeln) gibt es bis zu drei stabile Kerne, da Zerfallsprozesse, bei denen sich gleichzeitig zwei Protonen in Neutronen oder zwei Neutronen in Protonen um

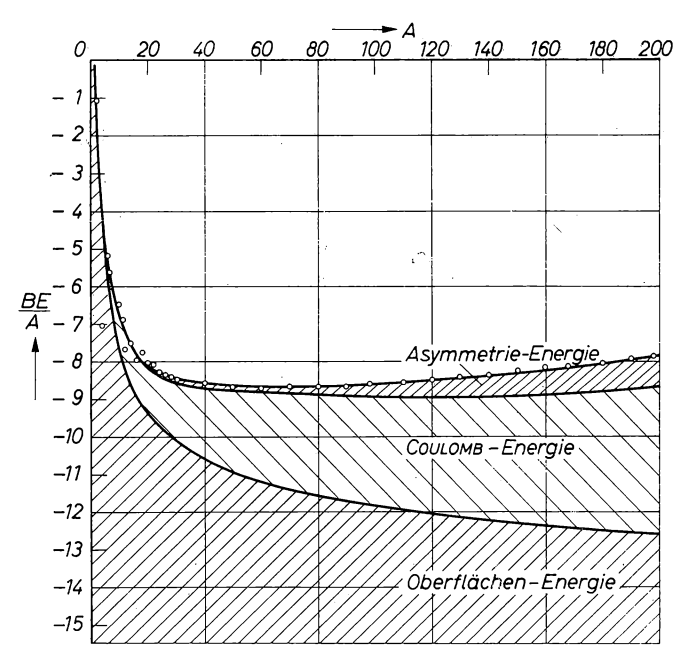


Fig. 13.2. Schematische Darstellung der Terme der WEIZSÄCKER-Formel als Funktion der Nukleonenzahl A. Der Term der Paarungsenergie wurde nicht berücksichtigt. Die (nur vereinzelt eingezeichneten) Meßpunkte sind Fig. 6.1a entnommen. Man sieht gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment für $A \gtrsim 25$

wandeln („doppelter β-Zerfall"), bisher nicht beobachtet wurden. Die stabilen Kerne sind meist g-g-Kerne, da die zugehörige Parabel energetisch niedriger liegt (Beispiele s. Fig. 13.3). Von den u-u-Kernen sind nur wenige stabile bekannt ($_1H^2$, $_3Li^6$, $_5B^{10}$, $_7N^{14}$). Dies sind sehr leichte Kerne, bei denen die Parabelöffnungen klein, also die Parabeln steil sind.

Da für β-Zerfälle (s. § 50) gilt

$$f\,T = \text{const},$$

(f = Maß für die Zerfallsenergie, T = Halbwertszeit), alternieren oft die Halbwertszeiten bei geradem A.

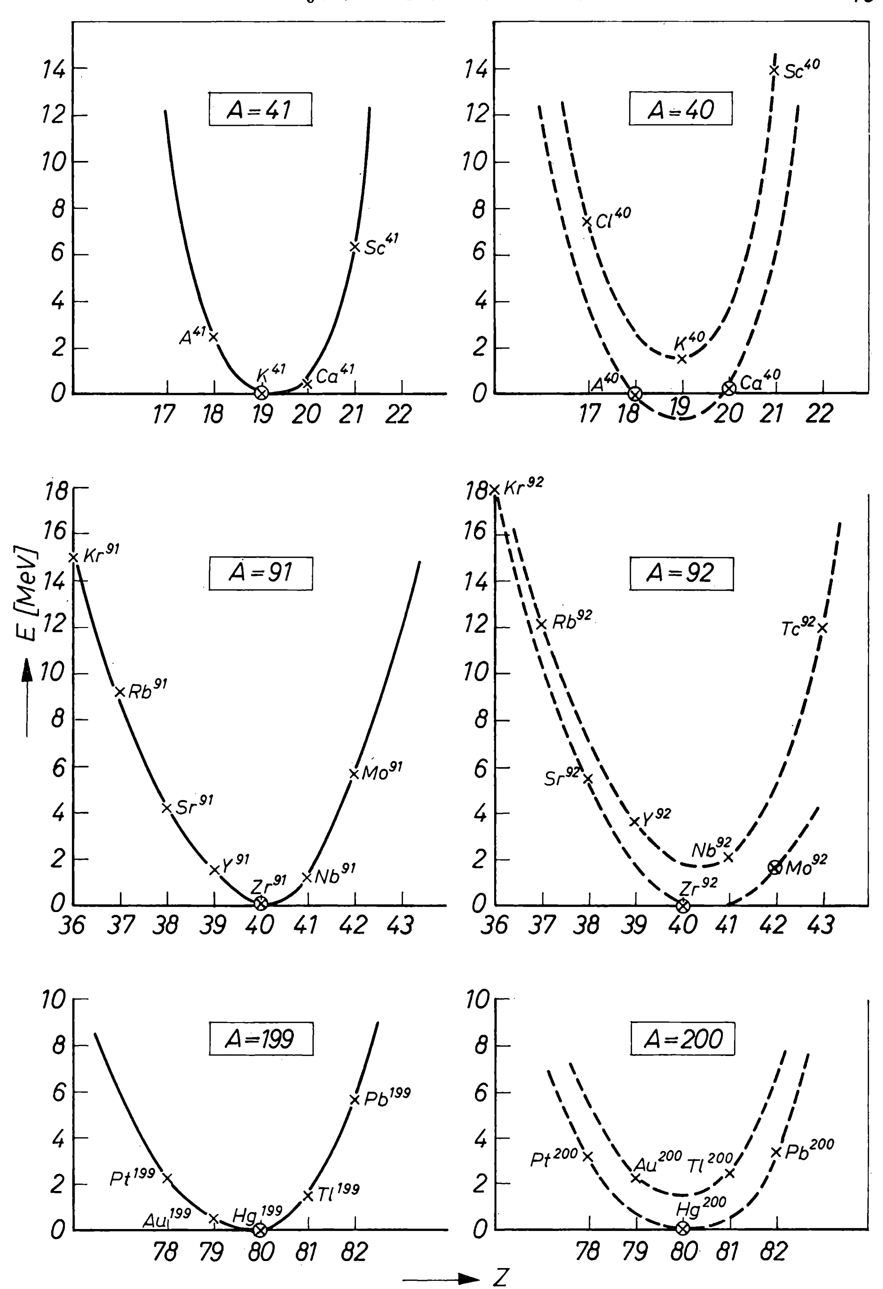


Fig. 13.3. Bindungsenergien bei konstanter Nukleonenzahl A. Beachte die mit A ansteigenden Parabelöffnungen

Kerne mit zwei Zerfallsmöglichkeiten (β^- und β^+ bzw. *EC*) sind immer *u*-*u*-Kerne, die in der Nähe der Sohle des Energietals liegen (z.B. K^{40}).

Die Formeln (13.12) und (13.13) geben natürlich keine Feinheiten wieder und sind für genaue Massenberechnungen unbrauchbar. Aber für Überschlagsbetrachtungen sind sie recht gut geeignet. Sie haben den Vorteil, daß sie auf einem anschaulichen Modell beruhen.

Mit Hilfe des Tröpfchenmodells ist man auch in der Lage, manche angeregten Zustände der Atomkerne als Schwingungen bzw. Rotationen des Tröpfchens zu deuten (vgl. § 51).

§ 14. Anwendung auf *Q*-Werte von Kernreaktionen

Die WEIZSÄCKER-Formel (13.12) kann zur Interpretation von gemessenen *Q*-Werten herangezogen werden. Dies soll an einigen Beispielen demonstriert werden.

Aus (9.1) und (6.1) folgt

$$\left.\begin{aligned} Q=&(Z_a+Z_A-Z_b-Z_B)\,m_H c^2+(N_a+N_A-N_b-N_B)\,m_n c^2+\\ &+(BE)_a+(BE)_A-(BE)_b-(BE)_B\,. \end{aligned}\right\} \quad (14.1)$$

In vielen Fällen reduziert sich die rechte Seite von (14.1) auf die Bindungsenergieterme, nämlich immer dann, wenn Protonen- und Neutronenzahl für sich bei der Reaktion erhalten bleiben.

Wir wollen zwei Beispiele betrachten: Die Bestimmung von „lokalen" Paarungsenergien aus (d, α)-Reaktionen und die Bestimmung der COULOMB-Abstoßung der Protonen aus β^+-Zerfallsdaten von Spiegelkernen.

a) Paarungsenergie aus (d, α)-Reaktionen

Aus (14.1) folgt mit (13.12) für den *Q*-Wert einer (d, α)-Reaktion am Kern (Z, A):

$$\begin{aligned} Q_{(d,\alpha)}=&(BE)_d-(BE)_\alpha-2a_1+a_2\left[A^{\frac{2}{3}}-(A-2)^{\frac{2}{3}}\right]+\\ &+a_3\left[\frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}}-\frac{(Z-1)^2}{(A-2)^{\frac{1}{3}}}\right]-a_4\frac{2\Delta^2}{A(A-2)}+\delta(\lambda_{Z,A}-\lambda_{Z-1,A-2})\,. \end{aligned}$$

Dabei ist δ die „lokale" Paarungsenergie, d.h. der Wert von δ in der Umgebung der Nukleonenzahl A [nach (13.11) hängt δ nicht stark von A ab]. Ist A ungerade, dann ist

$$\lambda_{Z,A}=\lambda_{Z-1,A-2}=0\,,$$

dann ist keine Aussage über δ durch die Messung von Q möglich. Sind aber Z und A gerade, so ergibt sich

$$\lambda_{Z,A}-\lambda_{Z-1,A-2}=-2\,,$$

so daß sich also bei (d, α)-Reaktionen an g-g-Kernen die lokale Paarungsenergie bestimmen lassen sollte. In Anbetracht der Unsicherheiten, die mit den Zahlenwerten von a_1, a_2, a_3, a_4 verbunden sind, erscheint es jedoch sinnvoll, mehrere Messungen derart zu kombinieren, daß der Einfluß dieser Konstanten auf die Bestimmung von δ weitgehend ausgeschaltet wird. Mißt man z.B. außer dem Q-Wert der (d, α)-Reaktion an einem g-g-Kern (Z, A) noch den Q-Wert der (d, α)-Reaktion am benachbarten u-g-Kern $(Z+1, A+1)$, so ergibt sich für die Differenz der Q-Werte

$$\begin{aligned}\Delta Q = Q_{Z,A} - Q_{Z+1,A+1} = a_2 A^{\frac{2}{3}}\left[1-\left(1-\frac{2}{A}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(1+\frac{1}{A}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(1-\frac{1}{A}\right)^{\frac{2}{3}}\right]+ \\ +a_3\frac{1}{A^{\frac{1}{3}}}\left[Z^2-\frac{(Z-1)^2}{\left(1-\frac{2}{A}\right)^{\frac{1}{3}}}-\frac{(Z+1)^2}{\left(1+\frac{1}{A}\right)^{\frac{1}{3}}}+\frac{Z^2}{\left(1-\frac{1}{A}\right)^{\frac{1}{3}}}\right]- \\ -2a_4\left(\frac{\Delta^2}{A(A-2)}-\frac{(\Delta-1)^2}{(A+1)(A-1)}\right)-2\delta.\end{aligned}$$

Entwicklung nach $1/A$ bis zu quadratischen Gliedern und Umformung des a_4-Terms ergibt

$$\left.\begin{aligned}\Delta Q = \frac{4}{9} a_2 A^{-\frac{4}{3}} - a_3 A^{-\frac{1}{3}}\left[2-\frac{6Z-1}{3A}+\frac{2}{9A^2}(4Z^2-6Z+5)\right]- \\ -\frac{2a_4}{A^2-1}\left(\frac{2A-1}{A(A-2)}\Delta^2+2\Delta-1\right)-2\delta.\end{aligned}\right\} \quad (14.2)$$

Schon bei verhältnismäßig niedrigen Werten von A wird der Hauptanteil von ΔQ durch das Glied (-2δ) geliefert.

Zahlenbeispiel: Die Q-Werte folgender (d, α)-Reaktionen wurden gemessen:

$$\begin{aligned} Si^{30}(d,\alpha)\,Al^{28} \quad & Q=(3{,}120\pm 0{,}010)\text{ MeV}, \\ P^{31}(d,\alpha)\,Si^{29} \quad & Q=(8{,}158\pm 0{,}011)\text{ MeV}. \end{aligned}$$

Mit $A=30$, $Z=14$, $\Delta=2$ folgt aus (14.2):

$$-5{,}038\text{ MeV} = 0{,}00475\,a_2 - 0{,}404\,a_3 + 0{,}00730\,a_4 - 2\delta$$

$$\delta \approx \frac{5{,}038}{2}\text{ MeV} - \frac{0{,}072}{2}\text{ MeV} = 2{,}48\text{ MeV}.$$

Vergleich: Aus (13.11) folgt

$$\delta = a_5 A^{-\frac{3}{4}} = \frac{33{,}5}{12{,}85}\text{ MeV} = 2{,}60\text{ MeV}.$$

Die Übereinstimmung ist befriedigend.

b) COULOMB-Abstoßung der Protonen aus dem β^+-Zerfall von Spiegelkernen

Unter Spiegelkernen versteht man Kernpaare, bei denen sich die Protonenzahl Z und die Neutronenzahl N um eine Einheit unterscheiden und die durch $p \rightleftharpoons n$-Kernumwandlung auseinander hervorgehen, z. B. ${}_4\mathrm{Be}_5^9$ und ${}_5\mathrm{B}_4^9$, ${}_5\mathrm{B}_6^{11}$ und ${}_6\mathrm{C}_5^{11}$, ${}_6\mathrm{C}_7^{13}$ und ${}_7\mathrm{N}_6^{13}$ usw. Da die Nukleonenzahl A für jedes der Paare eine ungerade Zahl ist, muß mindestens einer der Kerne

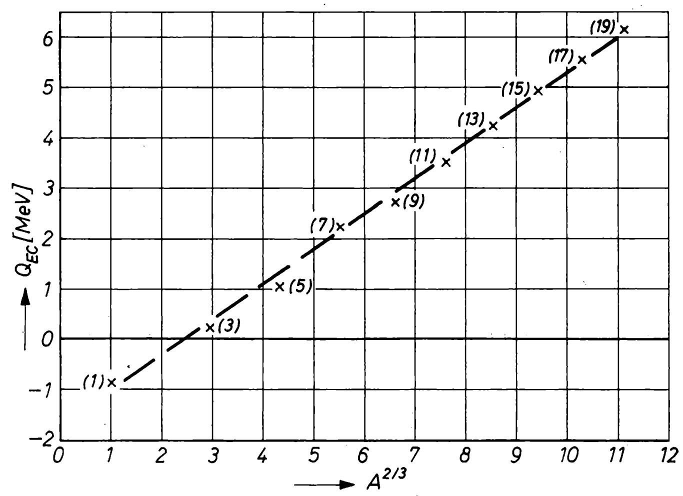


Fig. 14.1. Q_{EC} ist für Kerne mit $Z=N+1$ gegen $A^{\frac{2}{3}}$ aufgetragen. Aus der Steigung der Kurve kann man auf a_3 schließen. Nukleonenzahlen in Klammern. Für β^+-Strahler wurden die Q-Werte auf Q_{EC} umgerechnet. Werte aus: LANDOLT-BÖRNSTEIN, Zahlenwerte und Funktionen aus Naturwissenschaft und Technik, Neue Serie Bd. I, 1, Springer-Verlag 1961

radioaktiv sein. Für kleine A ist der andere stabil, meistens der neutronenreichere der beiden Kerne. Der radioaktive Kern zerfällt durch β^+-Zerfall oder EC. Der Q-Wert für EC-Zerfall, der nach (11.10) der Massendifferenz der beiden Kerne entspricht, ergibt sich mit (6.1) zu

$$Q_{EC}=({}_ZM_N^A-{}_{Z-1}M_{N+1}^A)\,c^2=(m_H-m_n)\,c^2+(B\,E)_{Z,A}-(B\,E)_{Z-1,A}\,.$$

Mit (13.12) folgt daraus

$$Q_{EC}=(m_H-m_n)\,c^2+a_3\,\frac{2Z-1}{A^{\frac{1}{3}}}\,.$$

Für die Spiegelkerne ist $A=2Z-1$, so daß

$$Q_{EC}=-0{,}783\,\mathrm{MeV}+a_3\,A^{\frac{2}{3}}$$

sein sollte.

Man kann die β^+-Zerfälle der Spiegelkerne weiter in 2 Gruppen einteilen, je nachdem ob die Zahl Z des zerfallenden Kerns gerade oder ungerade ist. Ist Z gerade, dann muß beim Zerfall ein Protonenpaar aufbrechen und ein Neutronenpaar gebildet werden. Ist Z ungerade, dann wird nur ein unpaariges Proton in ein unpaariges Neutron verwandelt. Im letzteren Fall ist der Paarungsenergieunterschied, auch bei leichten Kernen, sicher exakt gleich Null. Darum werden meist nur die Zerfälle mit ungeradem Z betrachtet. Trägt man die gemessenen Werte von Q_{EC} gegen $A^{\frac{2}{3}}$ auf (s. Fig. 14.1), dann ergibt die Steigung einen experimentellen Wert für a_3 *.

Man entnimmt der Kurve (Fig. 14.1) den Wert $a_3 = 0{,}72$ MeV in guter Übereinstimmung mit (13.6). Dies bedeutet, daß der Wert von R_0 aus (13.2) den experimentellen Gegebenheiten entspricht.

§ 15. Kernspaltung

Aus Fig. 6.1 ist zu ersehen, daß die am festesten gebundenen Kerne eine Nukleonenzahl von etwa 60 bis 80 haben. Durch die Fusion von leichteren Kernen oder die Spaltung von schwereren Kernen würde man also freiwerdende Bindungsenergie gewinnen, falls diese Prozesse stattfinden. Wir wollen dies am Beispiel der symmetrischen Spaltung eines schweren Kerns untersuchen, also an der Reaktion

$$_{Z}M_{N}^{A} \to 2\,_{Z/2}M_{N/2}^{A/2}\,.$$

Die dabei freiwerdende Energie ist mit (14.1)

$$Q = (B\,E)_{Z,A} - 2\,(B\,E)_{Z/2,\,A/2}\,.$$

Die WEIZSÄCKER-Formel (13.12) liefert

$$(B\,E)_{Z,A} = -a_1\,A + a_2\,A^{\frac{2}{3}} + a_3\,\frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + a_4\,\frac{(A-2Z)^2}{A} + a_5\,\lambda_{(Z,A)}\,A^{-\frac{3}{4}}$$

$$2(BE)_{Z/2,\,A/2} = -a_1\,A + 2a_2\left(\frac{A}{2}\right)^{\frac{2}{3}} + 2a_3\,\frac{(Z/2)^2}{(A/2)^{\frac{1}{3}}} + \\ +2a_4\,\frac{\left(\frac{A}{2}-Z\right)^2}{A/2} + 2a_5\,\lambda_{(Z/2,\,A/2)}\left(\frac{A}{2}\right)^{-\frac{3}{4}}.$$

* Die Parallelverschiebung der Kurve gegenüber der theoretischen Vorhersage liegt an der Vernachlässigung der elektrostatischen Selbstenergie des Protons [vgl. Diskussion von (13.6)].

Daraus ergibt sich

$$Q = a_2 A^{\frac{2}{3}}(1-\sqrt[3]{2}) + a_3\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)\frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + a_5 A^{-\frac{3}{4}}(\lambda_{Z,A} - 2^{\frac{7}{4}}\lambda_{Z/2,A/2})$$

$$Q = A^{\frac{2}{3}}\left(-0{,}260\,a_2 + 0{,}370\,\frac{Z^2}{A}\,a_3\right) + \text{Paarungsenergieunterschied}\,.$$

Der Paarungsenergieunterschied ist klein und kann näherungsweise außer acht gelassen werden. Dann ist mit den Zahlenwerten für a_2 und a_3 (s. § 13)

$$Q \approx A^{\frac{2}{3}}\left(-4{,}3\ \text{MeV} + 0{,}26\ \text{MeV}\ \frac{Z^2}{A}\right).$$

Man sieht, daß Q positiv wird für

$$\frac{Z^2}{A} \geqq \frac{4{,}3}{0{,}26} \approx 16\,.$$

Daher ist für alle Kerne mit etwa $Z > 35$, $A > 80$ eine Spaltung mit Energiegewinn verbunden. Bei der symmetrischen Spaltung von U^{238} gewinnt man die beträchtliche Energiemenge von

$$Q \approx (238)^{\frac{2}{3}}\left(-4{,}3 + 0{,}26\,\frac{92^2}{238}\right)\text{MeV} \approx 190\ \text{MeV}.$$

Man wundert sich zunächst, daß die schweren Kerne nicht alle sofort spontan spalten. Dies wird dadurch verhindert, daß der Verformung des kugelförmigen Kerntröpfchens (es müssen ja zwei kleine Tröpfchen daraus entstehen) nach dem Tröpfchenmodell Rückstellkräfte (Oberflächenkräfte) im Wege stehen. Es müssen bei Uran etwa 7 Mev aufgewendet werden, um diese zu überwinden und das Tröpfchen zu zerreißen, erst dann wird die Energie Q frei. Dieser Sachverhalt läßt sich durch eine Potentialschwelle beschreiben, die von den Spaltprodukten durchdrungen werden muß (quantenmechanischer Tunneleffekt, vgl. § 22). Die entsprechende Wahrscheinlichkeit ist sehr gering, was sich in den langen Halbwertszeiten für die spontane Spaltung von $1{,}0 \cdot 10^{16}$ y bei U^{238} bzw. $1{,}8 \cdot 10^{17}$ y bei U^{235} ausdrückt.

Aber durch Neutroneneinfang ist es möglich, die Spaltung zu beschleunigen. Mit langsamen (thermischen) Neutronen gelingt dies jedoch nicht bei allen schweren Kernen. Um zu sehen, warum z.B. U^{235} durch die Anlagerung eines langsamen Neutrons spontan spaltet, U^{238} aber nicht, kann man wiederum auf die Weizsäcker-Formel (13.12) zurückgehen. Ohne den Paarungsenergieterm ist die Bindungsenergie pro Nukleon in der Gegend des Urans etwa 7 MeV, also genau so hoch wie die Potentialschwelle; der Term δ hat etwa die Größe 0,5 MeV. Für die verschiedenen Kerne ergeben

sich die Energiediagramme der Fig. 15.1. Beim Neutroneneinfang des U^{235} (Bildung von U^{236}) werden etwa 7,5 MeV frei, während zur Überwindung der Potentialschwelle nur 7 MeV gebraucht werden. Daher spaltet U^{235} schon mit langsamen Neutronen. Zur Spaltung von U^{238} und Np^{237} müssen die Neutronen eine Energie von etwa 0,5 MeV mitbringen, ehe der Wirkungsquerschnitt in die Nähe von 0,1 barn $=10^{-25}$ cm^2 [vgl. (4.6)] kommt. Ist die Neutronenenergie niedriger, so hemmt die Potentialschwelle die Spaltung stark, d.h. der Wirkungsquerschnitt fällt schnell mit abnehmender Neutronenenergie. Die Spaltungsreaktionen an U^{238} und Np^{237}

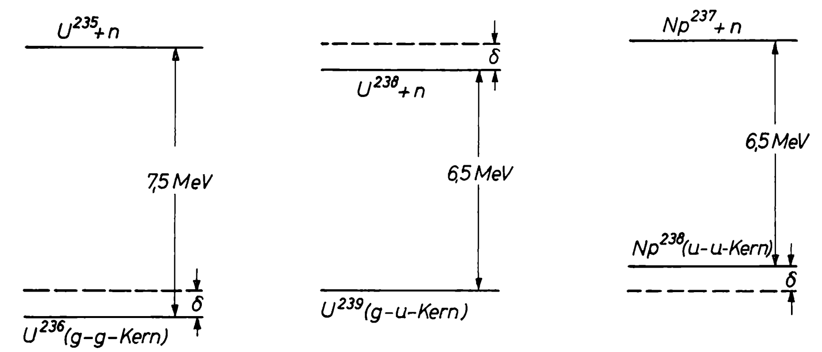


Fig. 15.1. Energiediagramme (schematisch) zum Neutroneneinfang an schweren Kernen. Der Einfluß der Paarungsenergie auf die beim Einfang freiwerdende Energie ist dargestellt. Die Höhe der „scheinbaren" Potentialschwelle für Spaltung ist etwa 7 MeV

haben „scheinbare" Schwellen, unterhalb deren zwar $Q>0$, aber der Wirkungsquerschnitt dennoch praktisch Null ist. Wie U^{235} verhalten sich U^{233} und alle *g*-*u*- und *u*-*u*-Kerne, wie U^{238} verhalten sich Th^{232} und alle *g*-*g*- und *u*-*g*-Kerne.

Vom Standpunkt des Tröpfchenmodells überrascht die Isotopenhäufigkeitsverteilung der Spaltprodukte. Fig. 15.2 zeigt eine gemessene Abhängigkeit der Spaltproduktausbeute als Funktion der Nukleonenzahl der Spaltprodukte. Die Spaltung erfolgt unsymmetrisch! Dies ist ein Hinweis darauf, daß das Tröpfchenmodell der Ergänzung bzw. Änderung bedarf.

Die Spaltprodukte sind im allgemeinen nicht stabil, sondern β^--aktiv, da sie einen Neutronenüberschuß aufweisen. Außerdem werden „prompte" Neutronen emittiert, die vermutlich kurz nach der Teilung des Kerns entstehen. Diese sekundären Neutronen können eine Kettenreaktion dadurch in Gang setzen, daß sie weitere Spaltungen auslösen.

Mit thermischen Neutronen entstehen im Mittel*
$2{,}51 \pm 0{,}03$ Neutronen bei der Spaltung von U^{233},
$2{,}47 \pm 0{,}03$ Neutronen bei der Spaltung von U^{235},
$2{,}90 \pm 0{,}04$ Neutronen bei der Spaltung von Pu^{239}.

* Siehe Report ANL-5800

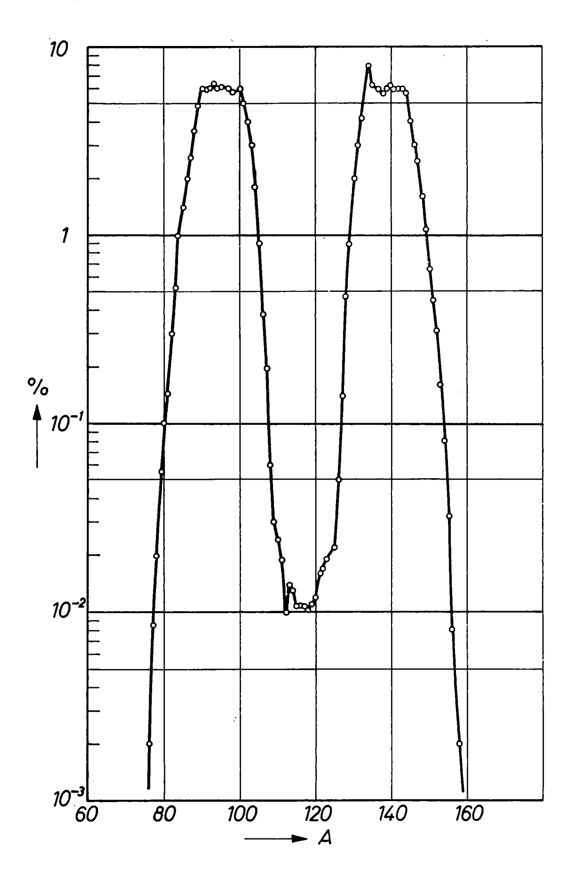


Fig. 15.2. Häufigkeitsverteilung der Spaltprodukte bei der Spaltung von U^{235} mit thermischen Neutronen. Die Kurve ist nicht völlig symmetrisch um $\frac{235}{2}$, weil bei der Spaltung eine wechselnde Zahl von Neutronen emittiert wird

Die entstehenden Spaltneutronen haben im Mittel eine Energie von etwa 2 MeV, sind also „schnelle“ Neutronen.

Nach Zeiten bis zu Minuten treten zusätzlich „verzögerte“ Neutronen auf, die anschließend an einen β^--Zerfall des Mutterkerns emittiert werden. Diese verzögerten Neutronen spielen eine wesentliche Rolle bei der Regelung des Neutronenflusses im Reaktor.

Beispiel: Nachdem das Br^{87} als eins der Spaltprodukte entstanden ist, zerfällt es durch β^--Emission zu Kr^{87}, und zwar teilweise in

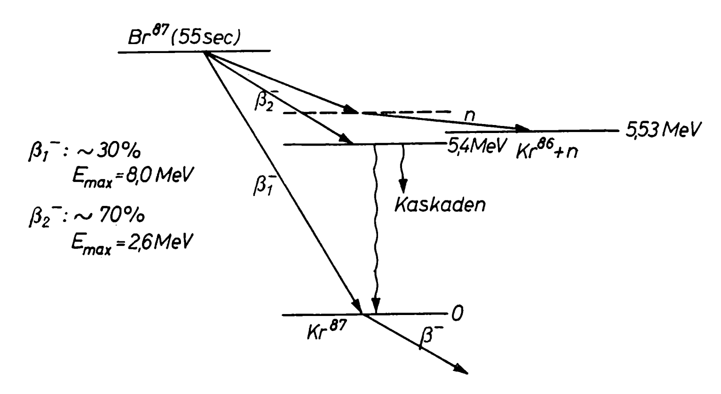


Fig. 15.3. Zerfallsschema des Br^{87}. Beachte die Möglichkeit der Emission von verzögerten Neutronen (anschließend an den β^--Zerfall mit $T=55$ sec)

angeregte Zustände dieses Isotops. Die Bindungsenergie des letzten Neutrons in Kr^{87} ist aber sehr niedrig (vgl. §7), so daß hoch angeregte Zustände des Kr^{87} durch Neutronenemission zerfallen können. Diese Neutronen erscheinen dann mit einer zeitlichen Verzögerung, wie sie dem β^--Zerfall des Br^{87} entspricht (s. Fig. 15.3).

Tabelle 15.1. *Strahlungen bei der Spaltung des U^{235}*

Zeitliche Entstehung	Räumliche Dissipation	Strahlung	Energiebetrag	Bemerkungen
prompt ($t \leq 10^{-12}$ sec)	Brennstoff	*KE* leichtes Bruchstück *KE* schweres Bruchstück	98 MeV 67 MeV	zusammen 165 MeV. Vgl. etwa 190 MeV bei symmetrischer Spaltung
	Umgebung	prompte γ-Strahlung	8 MeV	Mittl. Energie ≈ 1 MeV, größte ≈ 8 MeV. Jedes Fragment ist im Mittel um $\frac{1}{2}$ $BE \approx 4$ MeV angeregt, daher insges. 8 MeV γ-Energie pro Spaltung
	Umgebung	prompte Neutronen *	5 MeV *	Es entstehen im Mittel 2,47 Neutronen der mittl. Energie 1,98 MeV. Verzög. Neutronen können hier vernachl. werden, da ihre Anzahl klein ist.
verzögert, teilweise Jahre	Nahe Umgebung	β-Strahlung der Spaltprodukte	9 MeV *	Im Mittel 3 Zerfälle mit je 1,5 MeV bei jedem der beiden Fragmente
	Umgebung	γ-Strahlung der Spaltprodukte	7 MeV *	in Be^9 und D noch Photoneutronen
		Für U^{235}:	194 MeV	für U^{233}: 191 MeV für Pu^{239}: 201 MeV
		Neutrinos	[12 MeV] [206 MeV]	mehr als β^--Energie! Nicht verwertbar.

* Ein Neutron wird zur Aufrechterhaltung der Kettenreaktion benötigt, die anderen 1,47 werden eingefangen. Dabei tritt Einfang-γ-Strahlung auf [(n, γ)-Prozeß], es werden etwa 7 MeV pro eingefangenes Neutron frei oder insgesamt etwa 10 MeV γ-Energie (eventuell wieder Photoneutronen in Be und D). Falls radioaktive Isotope entstehen, kommt (verzögerte) β^--Strahlung hinzu. Insgesamt erhält man zusätzlich rund 12 MeV in der Umgebung dissipierte Energie. Dies addiert sich zur obigen Energieausbeute. Man erhält somit insgesamt im Mittel etwa 206 MeV/Spaltung.

Eine Übersicht über die bei der Spaltung des U^{235} durch thermische Neutronen freiwerdende Energie und ihre Aufteilung auf die verschiedenen Strahlungen gibt Tabelle 15.1. Auf diesen Werten beruhen die Überlegungen zur Energiegewinnung und Energieabführung beim Reaktorbetrieb und zum Strahlenschutz in der Umgebung des Reaktors. Wie sich aus der Zusammenstellung ergibt, gewinnt man bei der Spaltung eines U^{235}-Kerns im Mittel etwa

$$206\ \text{MeV/Spaltung}.$$

Vergleiche: Die Verbrennungswärme von 1 Atom C ist etwa 3 eV.

Soll ein Reaktor eine Leistung von 1 Watt erzeugen, so müssen $3 \cdot 10^{10}$ Spaltungen pro sec erfolgen. Im Gleichgewicht entspricht dies $20 \cdot 10^{10}$ β^--Zerfällen pro sec der Spaltprodukte (6 Curie). Aus der Spaltung von 1 g U^{235} kann man eine Energie von etwa 1 Megawattag gewinnen.

Die pro Spaltung freiwerdende Energie von etwa 200 MeV entspricht 1/5 der Nukleonenmasse oder 1/1000 der Uranatommasse. Also entstehen 999 g Spaltprodukte aus 1 kg U^{235}. Es verschwinden aber keine Nukleonen (Erhaltung der Baryonenzahl!), nur Bindungsenergie wird freigesetzt.

§ 16. Grenzen des Tröpfchenmodells, Hinweis auf „magische Zahlen“

Es gibt eine Anzahl ausgezeichneter Protonen- und Neutronenzahlen (2, 8, 20, [28], [40], 50, 82, 126). Bei Kernen, für die Z oder N gleich einer dieser „magischen“ Zahlen ist, treten Besonderheiten auf, die aus dem Tröpfchenmodell nicht verständlich sind, da im Tröpfchenmodell ja keine Nukleonengruppen ausgezeichnet sind. Das Phänomen der magischen Zahlen hat gewisse Ähnlichkeit mit dem der Zahlen 2, 8, 18 ... in der Elektronenhüllenphysik, die bekanntlich als Schalenabschluß im Hüllenaufbau gedeutet werden (Edelgaskonfiguration). Wir werden später sehen (s. §32), daß sich mit einem „Schalenmodell“ des Atomkerns die magischen Zahlen erklären lassen. Die Protonen und Neutronen im Kern sind also offenbar nicht alle gleichberechtigt, wie wir es bei der Einführung des Tröpfchenmodells vorausgesetzt hatten.

Wir wollen hier zunächst auf einige phänomenologische Hinweise für die Existenz der magischen Zahlen aufmerksam machen.

a) Die Häufigkeit der Elemente ${}_2He$, ${}_8O$, ${}_{20}Ca$, (${}_{28}Ni$), (${}_{40}Zr$), ${}_{50}Sn$ und ${}_{82}Pb$ ist relativ zu der der Nachbarelemente besonders hoch.

b) Die Häufigkeit der Isotone mit $N=2$, 8, 20, (28), (40), 50, 82, 126 ist ebenfalls auffallend hoch.

Trägt man die Häufigkeit der Isotope (mit geradem A) bei konstantem Z gegen N auf, so ergibt sich im Normalfall eine symmetrische Kurve (Beispiel $_{46}$Pd, s. Fig. 16.1). Durchläuft aber der Wertevorrat von N eine der magischen Zahlen, so ergibt sich eine auffallende Unregelmäßigkeit (Beispiel $_{42}$Mo, s. Fig. 16.1).

c) $_{50}$Sn hat die meisten stabilen Isotope von allen Elementen, nämlich 10; $N=50$ hat 6 stabile Isotone, $N=82$ sogar 7.

d) $_{82}\mathrm{Pb}_{126}^{208}$ ist der schwerste stabile Kern, er ist doppelt magisch. Die Existenz des doppelt magischen, stabilen Isotops $_{20}\mathrm{Ca}_{28}^{48}$ weit außerhalb des

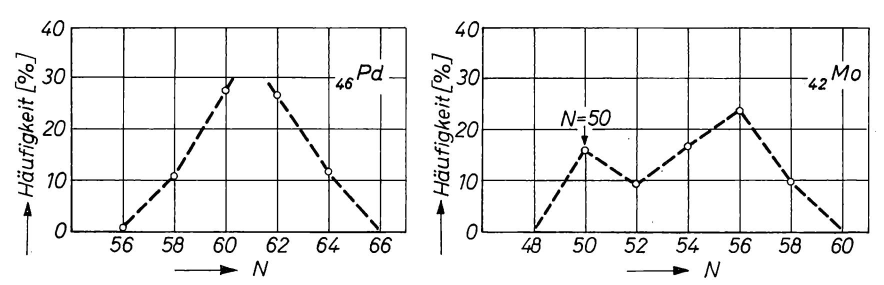


Fig. 16.1. Häufigkeitsverteilung der Isotope von Pd und Mo. Die Unregelmäßigkeit bei $N=50$ fällt auf

Energietals ist eine Ungewöhnlichkeit. Überhaupt sind die doppelt magischen Kerne $_2\mathrm{He}_2^4$, $_8\mathrm{O}_8^{16}$, $_{20}\mathrm{Ca}_{20}^{40}$, $_{20}\mathrm{Ca}_{28}^{48}$ und $_{82}\mathrm{Pb}_{126}^{208}$ besonders fest gebunden, d.h. sie haben im Vergleich zu ihren Nachbarn besonders niedrige Massendefekte.

e) Die Bindungsenergie des nächsten Neutrons oder Protons nach der magischen Zahl ist besonders klein. Dies kann man z.B. aus einem der Fig. 14.1 ähnlichen Diagramm sehen (s. Fig. 16.2). Wieder ist Q_{EC} aufgetragen, diesmal aber gegen A (A ungerade), für die Ausgangskerne $(Z=N+1)$, $(Z=N-1)$ und $(Z=N-3)$. Man sieht, daß Q_{EC} nach magischen Neutronenzahlen fällt und nach magischen Protonenzahlen wächst, während ein solches Verhalten nach dem Tröpfchenmodell nicht zu erwarten wäre:

$$\left.\begin{array}{ll}(Z=N+1): & Q_{EC}=(m_H-m_n)\,c^2+a_3\,A^{\frac{2}{3}}\\ (Z=N-1): & Q_{EC}=(m_H-m_n)\,c^2+a_3\,\dfrac{A-2}{A^{\frac{1}{3}}}-8\,a_4\,\dfrac{1}{A}\\ (Z=N-3): & Q_{EC}=(m_H-m_n)\,c^2+a_3\,\dfrac{A-4}{A^{\frac{1}{3}}}-16\,a_4\,\dfrac{1}{A}\end{array}\right\}\quad A=\text{ungerade Zahl}.$$

Das Tröpfchenmodell liefert ein glattes Verhalten von Q_{EC} als Funktion von A; die in Fig. 16.2 ersichtlichen Abweichungen stellen einen Effekt dar, der von diesem Modell nicht gedeutet wird.

Ebenso wird eine Änderung der Bindungsenergie des letzten Neutrons um $N=126$ und eine Änderung der Bindungsenergie des letzten Protons um $Z=82$ deutlich, wenn man die α-Zerfallsenergien der schweren Kerne vergleicht *. Auch daß die Spaltprodukte $_{36}Kr^{87}_{51}$ und $_{54}Xe^{137}_{83}$ verzögerte Neutronen emittieren, wie in §7 und §15 erläutert wurde, läßt sich auf die geringe Bindungsenergie des 51. und 83. Neutrons zurückführen.

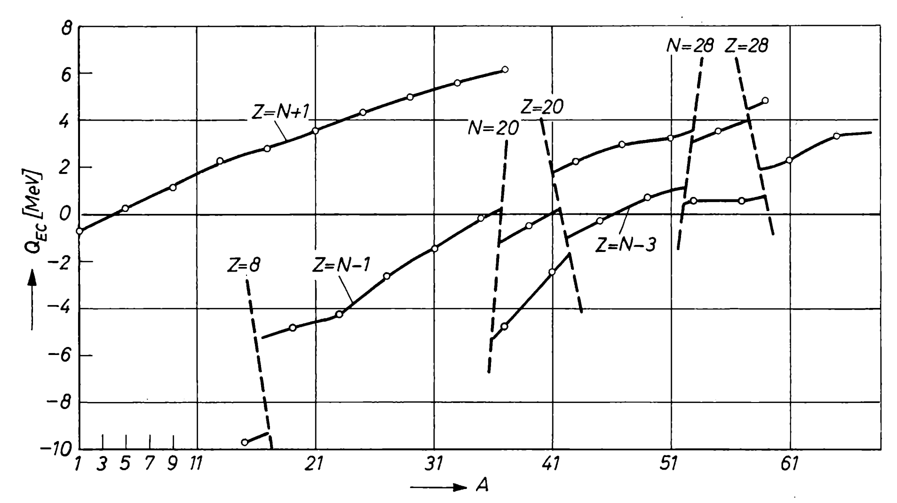


Fig. 16.2. Q_{EC} ist gegen (ungerades) A aufgetragen für Kerne mit $Z=N+1$, $Z=N-1$ und $Z=N-3$. Man sieht die Unregelmäßigkeiten bei magischen Protonen- und Neutronenzahlen. Werte aus LANDOLT-BÖRNSTEIN, Zahlenwerte und Funktionen aus Naturwissenschaft und Technik, Neue Serie Bd. I, 1, Springer-Verlag 1961

f) Die Asymmetrie der Uranspaltung könnte durch die Substruktur der Kerne, die sich in den magischen Zahlen ausdrückt, hervorgerufen werden; die größte Zahl der Spaltprodukte hat entweder $N>50$ oder $N>82$ (vgl. Fig. 15.2).

VII. Elementare Neutronenphysik

In diesem Kapitel sollen die elementaren Grundlagen der Neutronenphysik besprochen werden, auf denen die Wirkungsweise der Kernreaktoren und auch der Neutronendetektoren beruht. Da die Reaktoren ein großes Interesse von technischer Seite verdienen, ist die Darstellung der nächsten Paragraphen hauptsächlich auf diesen Punkt zugeschnitten. An Voraussetzungen für das Verständnis dieses Kapitels sind nur die Kenntnis der §§1, 2, 3, 4 und 15 erforderlich.

---

* Eine ausführliche Diskussion findet sich bei M. GOEPPERT-MAYER und J.H.D. JENSEN, Elementary Theory of Nuclear Shell Structure, Wiley, 1955.

Im Rahmen der hier versuchten Einführung wird allerdings auf Vollständigkeit kein Wert gelegt. In §17 wird die Streuung und Bremsung von langsamen Neutronen abgehandelt, soweit man sie mit Methoden der klassischen Physik beschreiben kann. Die gewonnenen Erkenntnisse werden in §18 und §19 auf den Reaktor angewandt, wobei die Kettenreaktion und die Neutronendiffusionsgleichung mit Lösungen bei einfachen Geometrien im Vordergrund stehen. Auf das zeitliche Verhalten des Reaktors und die Regelung des Neutronenflusses wird hier nicht eingegangen, wie überhaupt zum Studium der Reaktorphysik die Spezialliteratur * herangezogen werden sollte.

§ 17. Streuung und Bremsung von langsamen Neutronen

a) Streuung

Wie sich exakt zeigen läßt (s. §36), ist die Streuung langsamer Neutronen (KE bis zu einigen keV) im Schwerpunktssystem isotrop, d.h.

$$\frac{d\sigma_{\text{str}}(\theta)}{d\Omega} = \text{const}. \tag{17.1}$$

Daher kann man die klassische Modellvorstellung des elastischen Stoßes einer kleinen Billardkugel gegen eine große Kugel auf die Neutronenstreuung übertragen, denn auch hierbei ergibt sich das Gesetz (17.1).

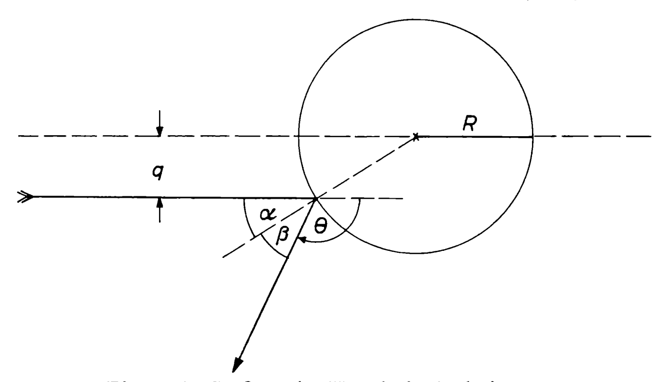


Fig. 17.1. Stoß zweier Kugeln im Relativsystem

Herleitung: Eine (kleine) anfliegende Kugel stoße mit einem Stoßparameter q auf eine zweite, ruhende Kugel vom Radius R (s. Fig. 17.1). Die Wechselwirkungskräfte

* z.B.: R. Schulten und W. Güth, Reaktorphysik, B.I.-Hochschultaschenbücher Bd. 6 und Bd. 11, Mannheim 1960 bzw. 1962; S. Glasstone und M.C. Edlund, The Elements of Nuclear Reactor Theory, D. van Nostrand Co., Princeton 1952; A.M. Weinberg und E.P. Wigner, The Physical Theory of Neutron Chain Reactors, University of Chicago Press, Chicago 1958.

seien von kurzer Reichweite und abstoßend, so daß ein elastischer Stoß erfolgt (d.h. $\alpha=\beta$). Wir betrachten den Stoß im Relativsystem. Dieses fällt nur dann mit dem Laborsystem zusammen, wenn der Rückstoß der großen Kugel vernachlässigt werden kann. Das mit dem Stoßparameter $q=R\sin\alpha$ anfliegende Teilchen wird um den Winkel $\theta=\pi-2\alpha$ abgelenkt. Nach § 4 ist

$$d\sigma=2\pi q\,dq=\pi\,d(q^2)=\pi R^2\,d(\sin^2\alpha)=\pi R^2\,d\left(\sin^2\frac{\pi-\theta}{2}\right)$$

$$=-\pi R^2\frac{1}{2}\sin\theta\,d\theta=\frac{\pi}{2}R^2\,d(\cos\theta).$$

Das Minuszeichen hat nur die Bedeutung, daß σ kleiner wird, wenn θ wächst; es kann weggelassen werden (vgl. § 4). Mit

$$d\Omega=2\pi\sin\theta\,d\theta$$

folgt

$$\frac{d\sigma_{(\theta)}}{d\Omega}=\frac{1}{4}R^2,$$

d.h. die Streuverteilung ist im Relativsystem (und damit auch im Schwerpunktssystem, s. § 2) isotrop.

Der integrale Wirkungsquerschnitt für Streuung ergibt sich zu

$$\sigma=\int_0^\pi\left|\frac{d\sigma}{d\theta}\right|d\theta=\pi R^2,$$

was anschaulich bedeutet, daß das gestoßene Teilchen aus dem ankommenden Teilchenstrom ein Teilbündel von der Größe seines geometrischen Querschnitts herausnimmt und gleichmäßig in alle Richtungen streut.

Wie bereits in (4.11) benutzt, hängen der Wirkungsquerschnitt im Schwerpunktssystem und der Wirkungsquerschnitt im Laborsystem wie folgt zusammen:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{SPS}=\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{LS}\frac{d\Omega_{LS}}{d\Omega_{SPS}}.$$

Mit (4.12) und der Abkürzung

$$\frac{m_2}{m_1}=A' \tag{17.2}$$

(A' ist fast, aber nicht genau, gleich der Nukleonenzahl A des gestoßenen Kerns, wenn das anfliegende Teilchen ein Neutron ist) folgt

$$\frac{d\sigma_{(\Phi)}}{d\Omega}=\frac{d\sigma_{(\theta)}}{d\Omega}\left[\frac{2}{A'}\cos\Phi+\frac{1+\frac{1}{A'^2}\cos 2\Phi}{\sqrt{1-\frac{1}{A'^2}\sin^2\Phi}}\right]. \tag{17.3}$$

Φ ist dabei der Streuwinkel im Laborsystem. Der Klammerausdruck ergibt

$$\left(1+\frac{1}{A'}\right)^2 \text{ für } \Phi=0, \quad \sqrt{1-\frac{1}{A'^2}} \text{ für } \Phi=90° \text{ und } \left(1-\frac{1}{A'}\right)^2 \text{ für } \Phi=180°,$$

so daß im Laborsystem die Vorwärtsrichtung bevorzugt wird. (Beachte: für $m_2 \gg m_1$, d.h. $A' \to \infty$, fallen Relativsystem und Laborsystem zusammen.)

Im speziellen Fall der Streuung von Neutronen am Wasserstoff ($A' \approx 1$) wird mit (17.1) und (17.3)

$$\frac{d\sigma_{(\Phi)}}{d\Omega} = \text{const} \cdot 4\cos\Phi, \tag{17.4}$$

d.h. es resultiert eine $\cos\Phi$-Verteilung der gestreuten Neutronen im Laborsystem; Rückwärtsstreuung kann nicht vorkommen (dies folgt auch schon aus dem elementaren Impulssatz). Aus (2.7) entnimmt man, daß beim Stoß von Neutronen mit Wasserstoffkernen (Protonen)

$$\operatorname{tg}\Phi_n = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

ist, und da Proton und Neutron im Schwerpunktssystem unter 180° auseinanderfliegen, ist nach Fig. 2.2

$$\operatorname{tg}\Phi_p = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}.$$

Man erhält

$$\operatorname{tg}\Phi_n \cdot \operatorname{tg}\Phi_p = \frac{\sin^2\theta}{1-\cos^2\theta} = 1,$$

also

$$\Phi_p + \Phi_n = \frac{\pi}{2}. \tag{17.5}$$

Proton und Neutron schließen also nach dem Stoß im Laborsystem den Winkel 90° ein. Daher ist die Winkelverteilung der Rückstoßprotonen charakterisiert durch die Funktion

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \Phi_p\right) = \sin\Phi_p,$$

wobei auch $|\Phi_p| \leqq \pi/2$ ist.

b) Bremsung

Aus Gleichung (2.8) ist zu ersehen, daß sich beim Stoß von Neutronen (Masse m_n) mit Kernen der Masse $A'm_n$ die kinetische Energie ε des

Neutrons nach dem Stoß zur kinetischen Energie ε_0 vor dem Stoß verhält wie

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}=\frac{(KE_n')_{LS}}{(KE_n)_{LS}}=\frac{A'^2+1+2A'\cos\theta}{(A'+1)^2}. \tag{17.6}$$

Da $d\sigma$ proportional zu $d(\cos\theta)$ ist, kommt jeder Wert von $\cos\theta$ gleich häufig vor, somit führt der erste Stoß mit konstanter Wahrscheinlichkeit

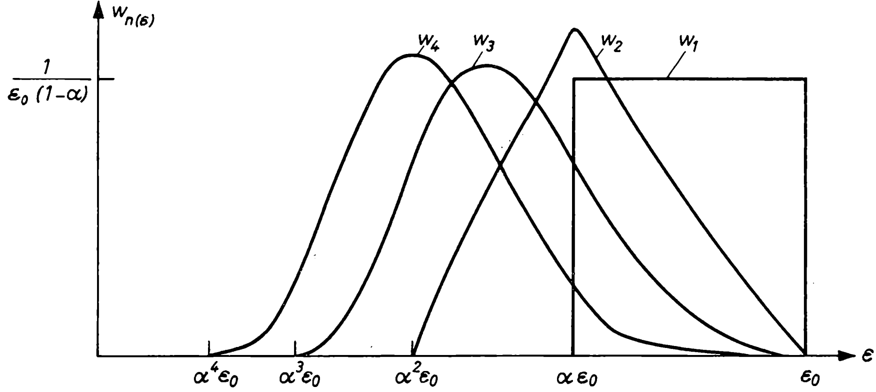


Fig. 17.2. Wahrscheinlichkeit, daß ein Neutron der Anfangsenergie ε_0 nach 1, 2, 3, 4 Stößen die Energie ε hat. Dargestellt für C^{12} $(\alpha=\frac{121}{169})$

zwischen die Werte $\left(\frac{A'-1}{A'+1}\right)^2\varepsilon_0$ (entspricht $\cos\theta=-1$) und ε_0 (entspricht $\cos\theta=+1$) der Endenergie, also

$$\alpha\varepsilon_0<\varepsilon<\varepsilon_0$$

mit

$$\alpha=\left(\frac{A'-1}{A'+1}\right)^2. \tag{17.7}$$

Die normierte Wahrscheinlichkeitsfunktion $w_1(\varepsilon)\,d\varepsilon$, die angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Neutron von anfänglicher Energie ε_0 nach dem Stoß eine Energie zwischen ε und $\varepsilon+d\varepsilon$ hat, lautet dann („Kasten"-Form, s. Fig. 17.2):

$$w_1(\varepsilon)\,d\varepsilon=\left\{\begin{array}{lll}\dfrac{d\varepsilon}{\varepsilon_0(1-\alpha)}=w_{1,1}\,d\varepsilon & \text{für} & \alpha\varepsilon_0<\varepsilon<\varepsilon_0\\ 0 & \text{für} & \varepsilon<\alpha\varepsilon_0 \quad\text{und}\quad \varepsilon>\varepsilon_0\end{array}\right\} \tag{17.8}$$

mit

$$\int_0^\infty w_1(\varepsilon)\,d\varepsilon=1.$$

Bei den eingeführten Abkürzungen $w_{n,m}$ bedeutet der erste Index die Anzahl der Stöße, der zweite die Lage des Energieintervalls, definiert durch

$$\alpha^m\varepsilon_0<\varepsilon<\alpha^{m-1}\varepsilon_0.$$

Für den zweiten Stoß ist die Ausgangsenergie ε_1 mit $\alpha\varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$. Die Wahrscheinlichkeit, daß das Neutron nach dem zweiten Stoß im Energieintervall $d\varepsilon$ landet, ist dann mit

$$w_{(\varepsilon_0 \to \varepsilon_1)}\, d\varepsilon_1 = \frac{d\varepsilon_1}{\varepsilon_0(1-\alpha)}$$

und

$$w_{(\varepsilon_1 \to \varepsilon)}\, d\varepsilon = \frac{d\varepsilon}{\varepsilon_1(1-\alpha)}$$

gegeben durch

$$w_2(\varepsilon)\, d\varepsilon = \begin{cases} \displaystyle\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{d\varepsilon_1}{\varepsilon_0(1-\alpha)} \cdot \frac{d\varepsilon}{\varepsilon_1(1-\alpha)} = \frac{1}{\varepsilon_0(1-\alpha)^2} \ln\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\, d\varepsilon \\ \qquad = w_{2,1}\, d\varepsilon \quad \text{für} \quad \alpha\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0; \\ \displaystyle\int_{\alpha\varepsilon_0}^{\varepsilon/\alpha} \frac{d\varepsilon_1}{\varepsilon_0(1-\alpha)} \cdot \frac{d\varepsilon}{\varepsilon_1(1-\alpha)} = -\frac{1}{\varepsilon_0(1-\alpha)^2} \left(\ln\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} + 2\ln\alpha\right) d\varepsilon \\ \qquad = w_{2,2}\, d\varepsilon \quad \text{für} \quad \alpha^2\varepsilon_0 < \varepsilon < \alpha\varepsilon_0; \\ 0 \quad \text{für} \quad \varepsilon < \alpha^2\varepsilon_0 \quad \text{und} \quad \varepsilon > \varepsilon_0. \end{cases}$$

Nach drei Stößen ergibt sich entsprechend (s. auch Fig. 17.2)

$$w_3(\varepsilon)\, d\varepsilon = \begin{cases} \displaystyle\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} w_{2,1}(\varepsilon_2)\, d\varepsilon_2 \frac{d\varepsilon}{\varepsilon_2(1-\alpha)} = \frac{1}{2\varepsilon_0(1-\alpha)^3} \left(\ln\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^2 d\varepsilon \\ \qquad = w_{3,1}\, d\varepsilon \quad \text{für} \quad \alpha\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0; \\ \displaystyle\int_{\alpha\varepsilon_0}^{\varepsilon_0/\alpha} w_{2,1}(\varepsilon_2)\, d\varepsilon_2 \frac{d\varepsilon}{\varepsilon_2(1-\alpha)} + \int_{\varepsilon}^{\alpha\varepsilon_0} w_{2,2}(\varepsilon_2)\, d\varepsilon_2 \frac{d\varepsilon}{\varepsilon_2(1-\alpha)} \\ \qquad = -\frac{1}{2\varepsilon_0(1-\alpha)^3} \left[2\left(\ln\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^2 + 6\ln\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\ln\alpha + 3(\ln\alpha)^2\right] d\varepsilon \\ \qquad = w_{3,2}\, d\varepsilon \quad \text{für} \quad \alpha^2\varepsilon_0 < \varepsilon < \alpha\varepsilon_0; \\ \displaystyle\int_{\alpha^2\varepsilon_0}^{\varepsilon/\alpha} w_{2,2}(\varepsilon_2)\, d\varepsilon_2 \frac{d\varepsilon}{\varepsilon_2(1-\alpha)} = \frac{1}{2\varepsilon_0(1-\alpha)^3} \left(\ln\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} + 3\ln\alpha\right)^2 d\varepsilon \\ \qquad = w_{3,3}\, d\varepsilon \quad \text{für} \quad \alpha^3\varepsilon_0 < \varepsilon < \alpha^2\varepsilon_0; \\ 0 \quad \text{für} \quad \varepsilon < \alpha^3\varepsilon_0 \quad \text{und} \quad \varepsilon > \varepsilon_0. \end{cases}$$

Das Verfahren läßt sich für höhere Stoßzahlen fortsetzen. Allgemein gilt die Rekursionsvorschrift (erster Index: Stoßzahl, zweiter Index: Energieintervall):

$$\left.\begin{aligned}
w_{n+1,1}\,d\varepsilon &= \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} w_{n,1}(\varepsilon_n)\,d\varepsilon_n \frac{d\varepsilon}{\varepsilon_n(1-\alpha)} \quad \text{für} \quad \alpha\varepsilon_0<\varepsilon<\varepsilon_0\\
w_{n+1,m+1}\,d\varepsilon &= \begin{cases} \displaystyle\int\limits_{\alpha^m\varepsilon_0}^{\varepsilon/\alpha} w_{n,m}(\varepsilon_n)\,d\varepsilon_n \frac{d\varepsilon}{\varepsilon_n(1-\alpha)} + \int\limits_{\varepsilon}^{\alpha^m\varepsilon_0} w_{n,m+1}(\varepsilon_n)\,d\varepsilon_n \frac{d\varepsilon}{\varepsilon_n(1-\alpha)}\\ \text{für} \quad \alpha^{m+1}\varepsilon_0<\varepsilon<\alpha^m\varepsilon_0 \quad \text{mit} \quad 1\leqq m<n-1 \end{cases}\\
w_{n+1,n+1}\,d\varepsilon &= \int\limits_{\alpha^n\varepsilon_0}^{\varepsilon/\alpha} w_{n,n}(\varepsilon_n)\,d\varepsilon_n \frac{d\varepsilon}{\varepsilon_n(1-\alpha)} \quad \text{für} \quad \alpha^{n+1}\varepsilon_0<\varepsilon<\alpha^n\varepsilon_0\\
w_{n+1}\,d\varepsilon &= 0 \quad \text{für} \quad \varepsilon<\alpha^{n+1}\varepsilon_0 \quad \text{und} \quad \varepsilon>\varepsilon_0\,.
\end{aligned}\right\} \tag{17.9}$$

Dabei gilt die Normierung

$$\int\limits_0^\infty w_n(\varepsilon)\,d\varepsilon = \int\limits_0^{\varepsilon_0} \sum_{m=1}^{n} w_{n,m}(\varepsilon)\,d\varepsilon = 1.$$

Die Wahrscheinlichkeit $p_m\,d\varepsilon$, daß ein Neutron während des Abbremsvorganges überhaupt das Energieintervall $d\varepsilon$ im Bereich

$$\alpha^m\varepsilon_0<\varepsilon<\alpha^{m-1}\varepsilon_0$$

erreicht, ist

$$p_m\,d\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} w_{n,m}\,d\varepsilon\,. \tag{17.10}$$

Diese Summe läßt sich im Bereich $m=1$ geschlossen als Funktion von ε darstellen. Mit der Abkürzung

$$x = \frac{1}{1-\alpha}\ln\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}$$

ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}
p_1\,d\varepsilon &= \sum_{n=1}^{\infty} w_{n,1}\,d\varepsilon = \frac{d\varepsilon}{\varepsilon_0(1-\alpha)}\left[1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\cdots\right]\\
&= \frac{d\varepsilon}{\varepsilon_0(1-\alpha)}\,e^x\\
p_1\,d\varepsilon &= \frac{1}{\varepsilon_0(1-\alpha)}\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} d\varepsilon\,.
\end{aligned}\right\} \tag{17.11}$$

(17.11) hat besondere Bedeutung, wenn die Neutronen in Wasserstoff gebremst werden. Dort ist $\alpha=0$, also gibt es überhaupt nur das Intervall $m=1$, der „Wahrscheinlichkeitskasten" (17.8) für w_1 erstreckt sich bis zu $\varepsilon=0$. Es ist nach (17.11) also

$$(p\,d\varepsilon)_{\text{Wasserstoff}}=\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}. \tag{17.12}$$

Die Aufsummierung in den Bereichen für $m>1$ ist nicht elementar. Um eine Näherung zu gewinnen, rechnet man einfacher mit der „Lethargie" (Langsamkeit) u der Neutronen, die durch

$$u=\ln\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \tag{17.13}$$

definiert ist, und benutzt die Tatsache, daß die Lethargie pro Stoß um den Betrag [s. (17.6)]

$$\Delta u=\ln\frac{(A'+1)^2}{A'^2+1+2A'\cos\theta}$$

zunimmt. Die über alle Raumrichtungen gemittelte Lethargiezunahme pro Stoß ist dann

$$\begin{aligned}\xi=\overline{\Delta u}=\int\Delta u\frac{d\Omega}{4\pi}&=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\ln\frac{(A'+1)^2}{A'^2+1+2A'\cos\theta}\,d(\cos\theta)\\&=1+\frac{(A'-1)^2}{2A'}\ln\frac{A'-1}{A'+1}.\end{aligned}$$

ξ ist unabhängig von ε_0 und für jeden Stoß dasselbe. Im Mittel sind dann $\frac{1}{\xi}\ln\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}$ Stöße nötig, um ein Neutron von der Energie ε_0 auf die Energie ε abzubremsen.

Damit das Neutron auf die Energie $\varepsilon-d\varepsilon$ gebremst wird, braucht es eine Anzahl von

$$\frac{1}{\xi}\ln\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon-d\varepsilon}$$

Stößen. Also ist die mittlere Stoßzahl im Intervall $d\varepsilon$, d.i. – bei einem einzelnen Neutron – die Wahrscheinlichkeit $p\,d\varepsilon$ für Stoß im Intervall $d\varepsilon$, gegeben durch

$$\left.\begin{aligned}p\,d\varepsilon&=\frac{1}{\xi}\ln\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon-d\varepsilon}-\frac{1}{\xi}\ln\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}=\frac{1}{\xi}\ln\frac{\varepsilon}{\varepsilon-d\varepsilon}\\p\,d\varepsilon&\approx\frac{1}{\xi\varepsilon}\,d\varepsilon.\end{aligned}\right\} \tag{17.14}$$

Damit ist ein genäherter Wert für die Summe (17.10) gefunden. Werte für ξ entnimmt man der Tabelle 17.1.

Tabelle 17.1. *Werte für die gemittelte Lethargiezunahme pro Stoß* ξ

Substanz	A	ξ
Wasserstoff	1	1
Deuterium	2	0,725
Kohlenstoff	12	0,159
Uran	238	0,0088

(17.14) stimmt für Wasserstoff exakt mit (17.12) überein. Für alle anderen Bremsmedien kann (17.14) in der Nähe von $\varepsilon=\alpha\varepsilon_0$ nicht genau mit (17.10) koinzidieren, da die wahre Summe, wie man auch aus Fig. 17.2 sieht, bei $\varepsilon=\alpha\varepsilon_0$ wegen des Abfalls von w_1 einen Sprung der Höhe $\dfrac{1}{\varepsilon_0(1-\alpha)}$ aufweist. Fig. 17.3 stellt die wahre Funktion $\varepsilon\cdot p_{(\varepsilon)}$ („PLACZEK-Funktion") und die Näherungsfunktion (17.14) für Deuterium ($\alpha=1/9$) dar.

Die Funktion $p_{(\varepsilon)}$ beschreibt das Bremsspektrum der Neutronen und ist wichtig für die Berechnung der Energieabhängigkeit des Neutronenflusses im Reaktor, wie in §18 gezeigt wird.

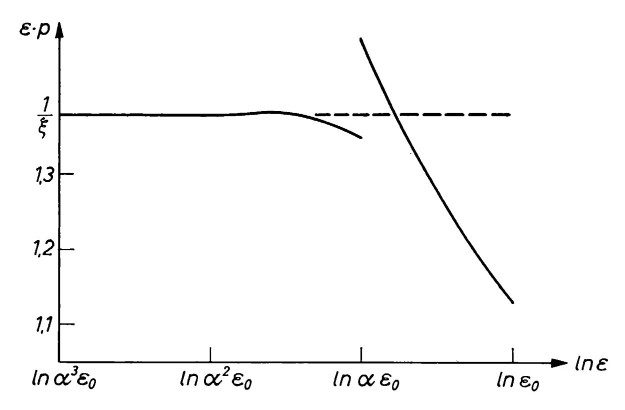


Fig. 17.3. Darstellung der Funktion εp für Deuterium (PLACZEK-Funktion). Gestrichelt: Näherungsfunktion (17.14)

§ 18. Neutronenfluß im homogenen Bremsmedium, Kettenreaktion

a) Energieabhängigkeit des Neutronenflusses

Werden laufend Q Neutronen der Energie ε_0 pro sec und cm^3 erzeugt (etwa durch Uranspaltung) und befinden sie sich in einem Medium, dessen Kerne die A'-fache Neutronenmasse haben, so werden sie durch Stöße abgebremst. Die Absorption wird zunächst vernachlässigt. Um die Zahl der Neutronen im Energieintervall $d\varepsilon$ und in 1 cm^3 zu bestimmen, muß man die

Zahl der pro sec in das Energieintervall $d\varepsilon$ gelangenden Neutronen $Qp_m\, d\varepsilon$ mit der mittleren Aufenthaltsdauer des Neutrons im Energieintervall $d\varepsilon$ multiplizieren. Wenn $v=\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m_n}}$ die Neutronengeschwindigkeit und $\frac{1}{\Sigma_{\mathrm{str}}}$ die mittlere freie Weglänge für Streuung ist [vgl. (4.13)], dann ist die Aufenthaltsdauer $(v\,\Sigma_{\mathrm{str}})^{-1}$. Damit ergibt sich die Zahl der Neutronen im Energieintervall $d\varepsilon$ und im cm^3 im stationären Zustand, d.h. bei zeitlich konstanter Quelle, zu

$$\left(\frac{dn}{d\varepsilon}\right)_m d\varepsilon=\frac{Q\,p_m}{v\,\Sigma_{\mathrm{str}}}\,d\varepsilon,$$

wobei mit n die Neutronendichte bezeichnet ist, also die Zahl der Neutronen pro cm^3. Der Index m bestimmt die Lage des Energieintervalls $d\varepsilon$ auf der Energieskala:

$$\alpha^m\,\varepsilon_0<\varepsilon<\alpha^{m-1}\,\varepsilon_0\,.$$

Als „Neutronenflußdichte“ Φ [$\mathrm{cm}^{-2}\,\mathrm{sec}^{-1}$] oder auch kurz als „Neutronenfluß“ bezeichnet man das Produkt aus Neutronendichte und Betrag der Neutronengeschwindigkeit, d.i. diejenige Zahl von Neutronen, die je sec aus beliebigen Richtungen mit der Geschwindigkeit v in eine Kugel vom Querschnitt 1 cm^2 hineinlaufen. Damit wird

$$\left(\frac{d\Phi}{d\varepsilon}\right)_m d\varepsilon=\frac{Q}{\Sigma_{\mathrm{str}}}\,p_m\,d\varepsilon\,.$$

Für Wasserstoff gilt mit (17.12) streng für alle Energien $\gtrsim 1$ eV die Beziehung

$$\frac{d\Phi}{d\varepsilon}=\frac{Q}{\Sigma_{\mathrm{str}}\,\varepsilon}, \tag{18.1}$$

sonst mit (17.14) angenähert

$$\frac{d\Phi}{d\varepsilon}\approx\frac{Q}{\xi\,\Sigma_{\mathrm{str}}\,\varepsilon}\,. \tag{18.2}$$

Die Neutronenflußdichte ist also der Energie der Neutronen umgekehrt proportional, die Neutronendichte ist proportional zu $\varepsilon^{-\frac{3}{2}}$. Die Formeln (18.1) und (18.2) gelten nicht herab bis $\varepsilon=0$, da für die Herleitung von (17.6) vorausgesetzt war, daß die kinetische Energie der Neutronen groß ist gegen die der Stoßzentren. Dies gilt für $\varepsilon\lesssim 1$ eV nicht mehr, da die Stoßzentren ihrerseits thermische Bewegungen und Schwingungen ausführen und sich außerdem Einflüsse der chemischen Bindung (unelastische Stöße verbunden mit Dissoziation von Molekülen) bemerkbar machen.

Wenn die Neutronen nicht eingefangen werden, werden sie durch fortwährende Stöße abgebremst, bis sie bei ihren Stößen im Mittel keine Energie-

änderung mehr erfahren. Hat die Umgebung die Temperatur T, so ist die wahrscheinlichste Geschwindigkeit der Neutronen

$$v_0 = \frac{2kT}{m_n}$$

bzw. ihre wahrscheinlichste kinetische Energie

$$\varepsilon_0 = \tfrac{1}{2} m_n v_0^2 .$$

Für diese „thermischen" Neutronen wird man im stationären Zustand etwa mit einer MAXWELLschen Geschwindigkeitsverteilung rechnen können. Als Standardwert, auf den sich alle Tabellenangaben beziehen, hat man $v_0 = 2200$ m/sec, d.h. $\varepsilon_0 = 0{,}0253$ eV bzw. $T = 20{,}4°$ C festgesetzt. In einem Reaktor ist normalerweise $T > 20{,}4°$ C.

Für langsame Neutronen ist der Wirkungsquerschnitt für Einfang, d.h. für (n, γ)- oder (n, Spaltung)-Prozesse, im wesentlichen proportional zu $1/v$, so daß der Einfang um so wahrscheinlicher wird, je langsamer die Neutronen sind *. Die MAXWELL-Verteilung wird daher in der Weise gestört, daß zu wenig sehr langsame und zu viele schnelle Neutronen vorhanden sind.

Der Fluß an thermischen Neutronen wird natürlich im Laufe der Zeit nicht unendlich groß, da die Neutronen schließlich entweder eingefangen werden oder durch die Begrenzung des Bremsmaterials („Moderators") nach außen entkommen. Trotzdem ist der thermische Fluß im Reaktor im allgemeinen groß gegen den schnellen Fluß.

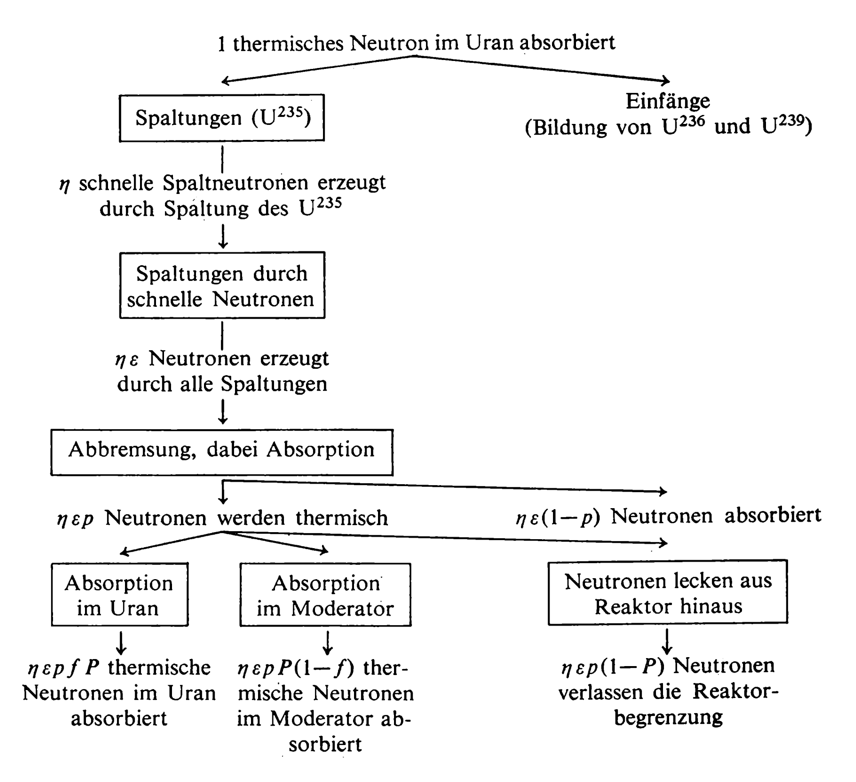
b) Kettenreaktion

Wird ein Neutron in einem spaltbaren Stoff (z.B. Uran) eingefangen, dann hat es eine bestimmte Chance, den betreffenden Kern zu spalten; dabei werden erneut schnelle Neutronen (mittlere Energie etwa 2 MeV) frei. Diese werden anschließend abgebremst. Wenn sie thermisch geworden sind, haben sie eine bestimmte Chance, wiederum eingefangen zu werden, und das Spiel kann von vorn beginnen. Eine Kettenreaktion, die sich gerade selbst erhält, kommt zustande, wenn für jedes Neutron im Mittel genau ein Nachfolger erzeugt wird.

Wir wollen uns die Neutronenbilanz bei der Neutronen-Kettenreaktion im homogenen Reaktor schematisch zusammenstellen. Der Brennstoff sei

* Das $1/v$-Gesetz läßt sich qualitativ folgendermaßen einsehen: Damit ein Neutron eingefangen werden kann, muß es sich eine bestimmte Zeitlang in der Nähe des Kerns aufhalten. Wenn das Neutron eine kleine Geschwindigkeit hat, wird die Zeit zum Durchqueren einer vorgegebenen Strecke, und damit die Einfangswahrscheinlichkeit, größer sein als bei einem schnellen Neutron. Die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts von der Geschwindigkeit folgt daraus zu $1/v$. Eine quantitative Begründung wird in § 41 gegeben.

z. B. eine Mischung aus den Uranisotopen U^{235} und U^{238} und sei homogen mit dem Bremsmaterial (D_2O oder C) vermengt. Alle Angaben gelten im Mittel über viele Beobachtungen.



Dabei gelten die folgenden Definitionen:

$$\eta = \frac{\text{Mittlere Zahl der im Brennstoff erzeugten Neutronen pro Zeit}}{\text{Mittlere Zahl der im Brennstoff absorbierten Neutronen pro Zeit}}$$

= „Spaltneutronenausbeute",

$$\varepsilon = \frac{\text{Zahl der Spaltneutronen, erzeugt durch Neutronen aller Energien}}{\text{Zahl der Spaltneutronen, erzeugt durch thermische Neutronen allein}}$$

= „Schnellspaltfaktor",

$$p = \frac{\text{Zahl der thermisch gewordenen Neutronen}}{\text{Zahl der Spaltneutronen}}$$

= „Resonanzentkommwahrscheinlichkeit",

$$f = \frac{\text{Zahl der vom Uran absorbierten thermischen Neutronen}}{\text{Zahl aller absorbierten thermischen Neutronen}}$$

= „Thermische Nutzung“,

$$P = \frac{\text{Zahl der absorbierten thermischen Neutronen}}{\text{Zahl aller thermischen Neutronen}}$$

= „Leckfaktor“.

Für den unendlich großen Reaktor ist $P=1$; man nennt die Größe

$$k_\infty = \eta\,\varepsilon\,p\,f = \frac{\text{Zahl der Neutronen einer Generation}}{\text{Zahl der Neutronen der vorangehenden Generation}} \tag{18.3}$$

„Unendlicher Multiplikationsfaktor“.

Für endlich große Reaktoren ist

$$k_{\text{eff}} = P\,k_\infty \tag{18.4}$$

der „effektive Multiplikationsfaktor“.

Es ist die Aufgabe der Reaktorphysik, die Größen η, ε, p, f und P aus den kernphysikalischen Daten und der Reaktorgeometrie zu berechnen und dafür zu sorgen, daß im fertig konstruierten Reaktor k_{eff} genau gleich 1 gemacht werden kann. Für $k_{\text{eff}} > 1$ wächst die Neutronendichte an, für $k_{\text{eff}} < 1$ fällt sie ab.

c) Reaktorkonstanten

Über die Reaktorgrößen lassen sich folgende allgemeine Feststellungen treffen:

1. Die Spaltneutronenausbeute η wird der prompten Neutronenausbeute ν proportional sein (vgl. §15), ist aber wesentlich kleiner als ν, weil viele Neutronen im Brennstoff absorbiert werden, ohne den einfangenden Kern zu spalten. Ist h_{235} die relative Häufigkeit des Uranisotops U^{235}, h_{238} diejenige des U^{238}, so ist mit Benutzung der Wirkungsquerschnitte für Einfang, Spaltung und Absorption

$$\eta = \frac{h_{235}\,\sigma_{\text{Spaltg}\,235}\,\nu_{235} + h_{238}\,\sigma_{\text{Spaltg}\,238}\,\nu_{238}}{h_{235}\,\sigma_{\text{abs}\,235} + h_{238}\,\sigma_{\text{abs}\,238}}$$

mit

$$\sigma_{\text{abs}} = \sigma_{\text{Spaltg}} + \sigma_{\text{Einfang}}\,.$$

Zahlenwerte für thermische Neutronen (vgl. auch Tabelle 18.1):

$$\text{Reines } U^{235}: \quad \eta = \nu_{235}\,\frac{\sigma_{\text{Spaltg}\,235}}{\sigma_{\text{abs}\,235}} = 2{,}07 \pm 0{,}02\,,$$

Natururan (99,28% U^{238}, 0,72% U^{235}, 0,0058% U^{234}): $\eta = 1{,}34$.

Bei reinem U^{235} ist für *alle* Neutronenenergien $\eta > 1,3$, woraus sich die Möglichkeit der Atombombe ergibt.

Ist η viel größer als 1, so kann man die übrigen Neutronen zur Erzeugung neuen Brennstoffs benutzen („brüten"), z. B. durch Förderung der Reaktion

$$U^{238} + n \rightarrow U^{239} \xrightarrow{\beta^-} Np^{239} \xrightarrow{\beta^-} Pu^{239}.$$

Das Isotop Pu^{239}, das in der Natur nicht vorkommt, ist wieder mit großem Wirkungsquerschnitt thermisch spaltbar.

2. Der Schnellspaltfaktor ε ist im allgemeinen nahe bei 1, da die Wirkungsquerschnitte für Uranspaltung durch schnelle Neutronen sehr klein sind.

3. Die Resonanzentkommwahrscheinlichkeit p ist im reinen Uran fast gleich Null, da U^{238} für Neutronen im Energiebereich $6\text{ eV} \lesssim \varepsilon \lesssim 70\text{ eV}$ eine relativ hohe Einfangswahrscheinlichkeit hat (s. §42). Es ist also sinnvoll, die Neutronen im Reaktor durch eine vom Uran verschiedene Substanz (Moderator) abzubremsen. Als Moderator eignen sich am besten solche Stoffe, die kleines Atomgewicht (wenig Stöße reichen zur Thermalisierung!) und kleine Absorptionswahrscheinlichkeit für Neutronen haben, wie z. B. C, D_2O und H_2O. Quantitative Behandlung siehe §42.

Die Resonanzentkommwahrscheinlichkeit wird durch eine heterogene Anordnung des Urans im Moderator (Stäbe) stark erhöht, weil so die Bremsung fast nur im Moderator stattfindet und erst die thermisch gewordenen Neutronen wieder durch Diffusion zum Uran gelangen.

4. Die thermische Nutzung f hängt stark vom Verhältnis der Atomzahlen von Brennstoff und Moderator ab; z. B. ist im homogenen kohlenstoffmoderierten Uranreaktor (N = Zahl der Kerne pro Volumeinheit)

$$f = \frac{N_U \, \sigma_{\text{abs (U)}}}{N_U \, \sigma_{\text{abs (U)}} + N_C \, \sigma_{\text{abs (C)}}}.$$

Zahlenwerte siehe Tabelle 18.2.

5. Der Leckfaktor P ist der Anteil der Neutronen, der *nicht* aus dem Reaktor herausläuft. Zu seiner Berechnung ist die Theorie der Neutronendiffusion nötig, die in §19 behandelt wird. Die geometrischen Reaktordimensionen werden sich nach P zu richten haben. Ein zu kleiner Reaktor hat $k_{\text{eff}} < 1$, wird also nicht „kritisch", ein zu großer Reaktor mit $k_{\text{eff}} > 1$ „geht durch".

Die folgenden Tabellen geben einige numerische Daten für unendlich große, homogene Uranreaktoren.

Tabelle 18.1. *Wirkungsquerschnitte für thermische Neutronen*

Element	σ_{abs}	σ_{Spaltg}	$\sigma_{Einfang}$	σ_{str}
H^1	0,33 b			20,4 b
H^2	0,46 mb			7 b
C^{12}	4 mb			4,8 b
O^{16}				4,2 b
Th^{232}	7,6 b		7,3 b	
U^{233}	581 b	527 b	54 b	
U^{235}	680 b	576 b	104 b	
U^{238}	2,8 b		2,7 b	

Tabelle 18.2. *Reaktorkonstanten für homogene Natururan-Graphit-Mischungen*

N_C/N_U	Σ_s/N_C [b]	$\bar{\xi}$	p	f	k_∞
0	8,3	0,00838	0	1	(0)
100	488	0,152	0,50	0,96	0,64
400	1930	0,157	0,72	0,85	0,82 (max)
1000	4800	0,158	(0,88)	0,69	(0,81)
∞	∞	0,158	1	0	0

Tabelle 18.3. k_∞ *für homogene Mischungen (Natururan), günstigste Werte*

Moderator	$\frac{\text{Moleküle Moderator}}{\text{Atome Uran}}$	p	f	k_∞
H_2O	2,43	0,755	0,828	0,838 **
$D_2O+0{,}2\%\ H_2O$ *	167	0,910	0,955	1,145
C	452	0,757	0,837	0,849

Aus Tabelle 18.3 ergibt sich, daß bei Verwendung von Natururan als Brennstoff ein homogener Reaktor nur mit schwerem Wasser als Moderator betrieben werden kann. Bei Benutzung anderer Moderatoren muß der Brennstoff in U^{235} angereichert sein.

* Noch reineres D_2O ist nur mit extremem Aufwand herstellbar.

** $k_\infty = 0{,}838$ bedeutet Neutronenvervielfachung um den Faktor

$$1 + k_\infty + k_\infty^2 + k_\infty^3 + \cdots = \frac{1}{1-k_\infty} = 6{,}2\,.$$

Dies ist der Faktor, um den die Neutronendichte (*mit* Quelle) größer ist als ohne Vervielfachung. Für einen Reaktor im Betrieb (ohne Quelle) muß $\frac{1}{1-k_\infty} \to \infty$, d.h. $k_\infty = 1$ sein.

§ 19. Neutronendiffusion, kritische Reaktorgröße

Das Ziel der folgenden Betrachtungen wird sein, den Nichtausflußfaktor P und damit die kritische Größe des Reaktors zu berechnen. Die Betrachtungsweise ist jedoch nicht auf den Reaktor beschränkt, sondern kann auf das Verhalten der Neutronen aus einer beliebigen Quelle in jedem Medium angewandt werden.

a) Diffusionsgleichung für thermische Neutronen

Der Einfachheit halber betrachten wir zunächst die Diffusion thermischer Neutronen, d.h. wir vernachlässigen die schnellen Komponenten.

Die zeitliche Änderung der Zahl der Neutronen im Volumelement $dx\,dy\,dz$ wird hervorgerufen durch die Entstehung neuer thermischer Neutronen (z.B. durch Spaltung mit anschließender Abbremsung), durch Absorption thermischer Neutronen und durch einen Nettostrom von Neutronen durch die Wände des Volumelements aufgrund der Diffusion.

Sei mit q_{th} die Zahl der pro cm³ und sec neu entstehenden thermischen Neutronen bezeichnet.

Die Zahl der pro sec absorbierten Neutronen ergibt sich mit (4.8) zu

$$\dot{Z}_{\text{abs}} = \dot{Z}_G\, \Sigma_{\text{abs}}\, \Delta x\,,$$

wobei $\dot{Z}_G$ mit der in § 18 eingeführten Neutronenflußdichte verknüpft ist:

$$\frac{\dot{Z}_G}{F} = \Phi\,.$$

Damit wird die Zahl der pro cm³ und sec absorbierten thermischen Neutronen, d.i. die Änderung der Neutronendichte mit der Zeit aufgrund der Absorption, gegeben durch $-\Sigma_{\text{abs}}\,\Phi_{\text{th}}$ (das Minuszeichen bedeutet *Ab*nahme der Neutronendichte).

Durch die Diffusion kommt ein Nettostrom von Neutronen durch die Wände des Volumelementes zustande. Die Änderung der Zahl n der thermischen Neutronen pro cm³ durch diesen Prozeß (s. Fig. 19.1) ergibt sich zu

$$\begin{aligned}\frac{\partial n}{\partial t}\,dx\,dy\,dz &= (j_x - j_{x+dx})\,dy\,dz + (j_y - j_{y+dy})\,dx\,dz + (j_z - j_{z+dz})\,dx\,dy\\ &= -\left(\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz\\ &= -\operatorname{div}\vec{j}\,dx\,dy\,dz\,.\end{aligned}$$

Der Diffusionsstrom kann geschrieben werden

$$\vec{j} = -D\,\operatorname{grad}\Phi, \qquad [j] = \left[\frac{\text{Neutronen}}{\text{cm}^2\,\text{sec}}\right], \tag{19.1}$$

was einem Streben der Neutronen zur Gleichverteilung im Raum entspricht (vgl. etwa den Wärmeleitungsstrom $\vec{j} = -\lambda$ grad T oder den Konzentrationsdiffusionsstrom $\vec{j} = -D'$ grad c). Beachte: In (19.1) hat die Diffusionskonstante D die Dimension [cm], während bei der gewöhnlich eingeführten Teilchendiffusion geschrieben wird

$$\vec{j} = -D^* \operatorname{grad} n$$

mit n = Teilchenzahl. Wegen $\Phi = nv$ entspricht D der Größe D^*/v; D^* hat die Dimension der normalen Diffusionskonstanten, also [cm^2 sec^{-1}].

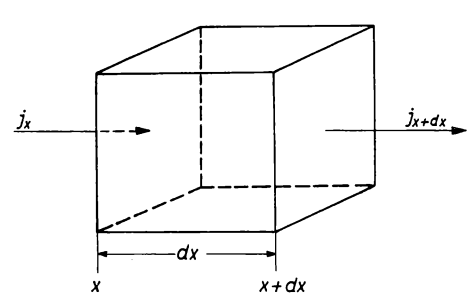


Fig. 19.1. Änderung der Neutronenstromdichte in x-Richtung

Somit lautet die Differentialgleichung für die zeitliche Änderung der Zahl der thermischen Neutronen im Volumelement insgesamt

$$\frac{\partial n}{\partial t} = q_{\text{th}} - \Sigma_{\text{abs}} \Phi_{\text{th}} + \operatorname{div}(D \operatorname{grad} \Phi_{\text{th}}) = \frac{1}{v} \frac{\partial \Phi_{\text{th}}}{\partial t}. \tag{19.2}$$

Wenn D räumlich konstant ist, was wir hier annehmen wollen, ergibt sich

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi_{\text{th}}}{\partial t} = q_{\text{th}} - \Sigma_{\text{abs}} \Phi_{\text{th}} + D \Delta \Phi_{\text{th}}.$$

Im stationären Fall, d.h. wenn sich der Neutronenfluß zeitlich nicht mehr ändert, gilt

$$\boxed{q_{\text{th}} - \Sigma_{\text{abs}} \Phi_{\text{th}} + D \Delta \Phi_{\text{th}} = 0}. \tag{19.3}$$

Wird über den ganzen Reaktor integriert, so ist

$\int q_{\text{th}}\, dV$ die Gesamtzahl der pro sec thermisch werdenden Neutronen,

$\int \Sigma_{\text{abs}} \Phi_{\text{th}}\, dV$ die Gesamtzahl der pro sec absorbierten thermischen Neutronen und

$\int D \Delta \Phi_{\text{th}}\, dV = D \int \operatorname{div}(\operatorname{grad} \Phi_{\text{th}})\, dV = D \int (\operatorname{grad} \Phi_{\text{th}})_n\, dS = -\int j_n\, dS$ die Anzahl der pro sec durch die Oberfläche des Reaktors herauslaufenden Neutronen.

Gleichung (19.3) besagt dann, daß die Zahl der entstehenden thermischen Neutronen im stationären Zustand gleich ist der Zahl der im Reaktor absorbierten plus der aus dem Reaktor herauslaufenden Neutronen. Da $\int q_{\text{th}}\, dV$ proportional zum Volumen, $\int D \Delta \Phi_{\text{th}}\, dV$ proportional zur Oberfläche des Reaktors ist, ist es zur günstigsten Ausnutzung der Neutronen vorteilhaft,

das Verhältnis von Volumen zu Oberfläche möglichst groß zu machen, d.h. dem Reaktor Kugelgestalt zu geben.

Zur Lösung der Diffusionsgleichung (19.3): Mit den zweckmäßig gewählten Definitionen

$$\left.\begin{aligned} \Phi^* &= \Phi_{\text{th}} - \frac{q_{\text{th}}}{\Sigma_{\text{abs}}} \\ L^2 &= \frac{D}{\Sigma_{\text{abs}}} \end{aligned}\right\} \tag{19.4}$$

schreibt sich die Diffusionsgleichung (19.3) in der Form

$$\Delta\Phi^* - \frac{1}{L^2}\Phi^* = 0. \tag{19.5}$$

Zur Vereinfachung werde angenommen, daß der Reaktor die Form einer in zwei Dimensionen unendlich ausgedehnten Scheibe der Dicke $2h$ habe. Die x-Achse sei die Normale der Scheibe, der Nullpunkt liege im Zentrum so, daß sich die Scheibe von $x = -h$ bis $x = +h$ erstreckt. Damit reduziert sich (19.5) auf eine lineare Differentialgleichung mit der Lösung

$$\left.\begin{aligned} \Phi^* &= A\,e^{x/L} + B\,e^{-x/L} \quad &\text{für } \Sigma_{\text{abs}} \neq 0, \\ \Phi^* &= a + b\,x &\text{für } \Sigma_{\text{abs}} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{19.6}$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten muß man die Randbedingungen kennen. Für die Scheibe lautet die eine, daß der Diffusionsstrom von außen nach innen an der Reaktorbegrenzung verschwindet. Da Neutronen von innen hinausdiffundieren können, ist dies nicht genau identisch mit der Forderung $\Phi = 0$ bei $x = \pm h$. Da der Fluß jedoch am Reaktorrand klein ist und nach innen stark ansteigt, kann man näherungsweise $\Phi_{(\pm h)} = 0$ als Randbedingung verwenden.

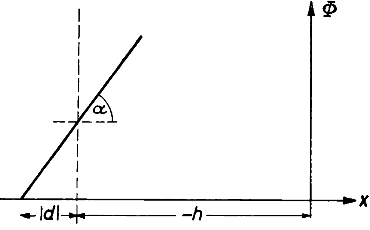


Fig. 19.2. Zur Definition der Extrapolationslänge

Will man etwas genauer rechnen, so führt man die „Extrapolationslänge" d ein (s. Fig. 19.2) und verlangt

$$\Phi_{(\pm(h+d))} = 0, \tag{19.7}$$

wobei d durch

$$d \approx \frac{0{,}71}{\left(1 - \frac{2}{3A}\right)\Sigma_{\text{str}}}$$

gegeben ist (hier nicht bewiesen). Meist ist $d \ll h$.

Die andere Randbedingung gewinnt man aus der Forderung, daß in der Scheibenmitte (bei $x=0$) alle entstandenen Neutronen abtransportiert werden müssen, d.h. bei der Scheibenquelle

$$(j_x^+)_{x=0} = -(j_x^-)_{x=0} = \tfrac{1}{2} q_{th},$$

allgemein

$$(j)_{x=0} = -D(\operatorname{grad} \Phi_{th})_{x=0} = 0. \quad (19.8)$$

Tabelle 19.1. *Werte der Konstanten D und L für einige Reaktormaterialien*

Material	H_2O	D_2O	C	U
D [cm]	0,143	0,84	0,92	0,84
L [cm]	2,73	116	54,4	1,37

Aus (19.6), (19.7) und (19.8) ergibt sich die Gesamtlösung des Problems. Man sieht, daß man für einfache Geometrien auf diese Weise die räumliche Flußverteilung der thermischen Neutronen geschlossen berechnen kann. Die Größenordnung der Materialkonstanten D und L ist aus Tabelle 19.1 zu entnehmen.

b) Beispiele

1. Punktquelle thermischer Neutronen in einem unendlich ausgedehnten, homogenen Medium.

Da q_{th} außerhalb der Quelle gleich Null ist, gilt mit (19.4) und (19.5)

$$\Delta \Phi_{th} - \frac{1}{L^2} \Phi_{th} = 0.$$

Das Problem ist kugelsymmetrisch, also hängt Φ_{th} nur vom Abstand r des Aufpunktes von der Quelle ab. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung* ist

$$\Phi_{th} = \frac{1}{r}(a \cdot e^{r/L} + b \cdot e^{-r/L}).$$

Da sicher $\Phi_{th} \to 0$ für $r \to \infty$, muß $a=0$ sein. Die Konstante b findet man aus der Bedingung, daß der auswärts gerichtete Neutronenstrom durch eine kleine, die Quelle umgebende Kugel vom Radius R gleich der Quellstärke S [Neutronen/sec] sein soll:

$$S = \lim_{R \to 0} \int_{\text{Kugel}} j_n \, df = -D \lim_{R \to 0} \int_{\text{Kugel}} (\operatorname{grad} \Phi_{th})_n \, df$$
$$= -D \lim_{R \to 0} \int_{\text{Kugel}} \frac{d}{dr} \left(\frac{b \cdot e^{-r/L}}{r} \right) df = 4\pi D b.$$

* Der Operator Δ hat den Radialanteil $\dfrac{1}{r^2} \dfrac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \dfrac{\partial}{\partial r} \right)$.

Also lautet die Lösung für den Neutronenfluß in Abhängigkeit vom Quellabstand

$$\Phi_{\text{th}} = \frac{S}{4\pi D r} e^{-r/L}.$$

Dieser allein aus der Diffusionstheorie gewonnene Ausdruck ist in unmittelbarer Nähe der Quelle nicht mehr gültig, da wegen der endlichen Streuweglänge der Neutronenfluß aus der Quelle einen Beitrag der Größe

$$\Phi'_{\text{th}} = \frac{S}{4\pi r^2} e^{-\Sigma_{\text{str}} r}$$

liefert, der für kleine r den Diffusionsterm überwiegt. Die gesamte Lösung des Problems kann man sich näherungsweise aus beiden Anteilen zusammengesetzt denken, so daß

$$\Phi_{\text{th}} \approx \frac{S}{4\pi D r} e^{-r/L} + \frac{S}{4\pi r^2} e^{-\Sigma_{\text{str}} r}$$

ist. Die exakte Rechnung mit Berücksichtigung der Vorwärtsstreuung im Laborsystem liefert nur kleine Korrekturen zu diesem Ergebnis.

Es sei angemerkt, daß man eine „Punkt"-quelle thermischer Neutronen experimentell nicht exakt verwirklichen kann, weil die durch Kernreaktionen entstehenden Neutronen stets größere Energien als kT haben und zunächst abgebremst werden müssen.

2. Homogener Reaktor.

Zunächst muß ein Ausdruck für q_{th}, die Zahl der pro cm³ und sec entstehenden thermischen Neutronen, gefunden werden. Mit den Definitionen des § 18 ist

Φ = Fluß der thermischen Neutronen;
$\Sigma_{\text{abs}} \Phi$ = Zahl der Absorptionen pro cm³ und sec; davon
$f \Sigma_{\text{abs}} \Phi$ = Zahl der im Brennstoff (Uran) absorbierten Neutronen pro cm³ und sec;
$\eta f \Sigma_{\text{abs}} \Phi$ = Zahl der Spaltneutronen pro cm³ und sec, erzeugt durch thermische Neutronen;
$\varepsilon \eta f \Sigma_{\text{abs}} \Phi$ = Zahl der Spaltneutronen pro cm³ und sec, erzeugt durch alle Neutronen.

Wird der Nichtausflußfaktor P zerlegt in den Nichtausflußfaktor P_s für schnelle und den Nichtausflußfaktor P_{th} für thermische Neutronen,

$$P = P_s P_{\text{th}},$$

so fließt der Anteil $(1 - P_s)$ der Neutronen während des Abbremsvorganges durch die Reaktorbegrenzung aus, der Anteil $(1 - p)$ wird absorbiert. Also

werden insgesamt thermisch

$$q_{\text{th}} = \varepsilon \eta f p P_s \Sigma_{\text{abs}} \Phi = k_\infty P_s \Sigma_{\text{abs}} \Phi$$

Neutronen pro cm³ und sec. Damit wird aus (19.3) die Differentialgleichung

$$\Delta\Phi + B_m^2 \Phi = 0 \quad \text{mit} \quad B_m^2 = \frac{\Sigma_{\text{abs}}}{D}(k_\infty P_s - 1) = \frac{1}{L^2}(k_\infty P_s - 1). \qquad (19.9)$$

B_m^2 wird „materielle Flußwölbung" oder „Krümmungsfaktor" („buckling factor") genannt, sein Wert wird allein durch kernphysikalische Größen festgelegt.

Für den Fall des quaderförmigen Reaktors lauten die Randbedingungen zu (19.9) [vgl. (19.7)]

$$\Phi = 0 \quad \text{für} \quad x = \pm\frac{a}{2} = \pm(h_x + d)$$

$$y = \pm\frac{b}{2} = \pm(h_y + d)$$

$$z = \pm\frac{c}{2} = \pm(h_z + d)$$

und [vgl. (19.8)]

$$\text{grad}\,\Phi = 0 \quad \text{für} \quad x = y = z = 0.$$

Lösungsansatz:

$$\Phi_{(x,y,z)} = \Phi_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{c}\right)$$

(höhere Harmonische scheiden aus, da sie zeitlich schnell abklingen würden). Eingesetzt in (19.9) ergibt

$$\pi^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \equiv B_g^2 = B_m^2.$$

Die „geometrische Flußwölbung" B_g muß also gleich der materiellen Flußwölbung B_m gemacht werden, damit Φ stationär wird. $B_g^2 = B_m^2$ ist die „kritische Bedingung". Wenn sie erfüllt ist, ist Φ_0 beliebig, d.h. der Reaktor läuft bei jedem Fluß (d.h. bei jedem Leistungswert) stationär. Die Flußverteilung über den Reaktor wird dann in jeder Richtung durch die Kosinusfunktion beschrieben.

Die Bedingung $B_g^2 = B_m^2$ liefert die Abmessungen des Reaktors, bei denen ein stationärer Betrieb möglich ist. So ist beim würfelförmigen Reaktor

$$B_g^2 = 3\frac{\pi^2}{a^2},$$

also das kritische Volumen

$$V_{\text{kr}} = a^3 = \left(3\,\frac{\pi^2}{B_g^2}\right)^{\frac{3}{2}} \approx \frac{161}{B_m^3};$$

bei der Kugel ergibt sich mit $B_g^2 = (\pi/R)^2$ das kritische Volumen zu

$$V_{\text{kr}} = \frac{130}{B_m^2}.$$

Für kleinere Reaktoren entkommen viele (vor allem schnelle) Neutronen, so daß im stationären Fall nur die Lösung $\Phi_0 = 0$ existiert. Für zu große Reaktoren strebt Φ_0 gegen unendlich, falls man nicht künstlich für Neutroneneinfang sorgt.

c) Berücksichtigung der Neutronen im Abbremsbereich

Zur Berechnung der Größe B_m^2 ist die Kenntnis des Faktors P_s erforderlich. Die Berechnung dieses Faktors aus der Diffusion der schnellen Neutronen soll unser nächstes Ziel sein.

Dazu befassen wir uns im folgenden mit der Diffusion im Abbremsbereich, d.h. mit der Bewegung solcher Neutronen, die noch nicht durch Stöße auf thermische Energien abgebremst wurden. Die Diffusionskonstante wird dann von der Neutronenenergie abhängen, also $D = D_{(\varepsilon)}$.

Wir betrachten ein Energieintervall $d\varepsilon$ in der Umgebung einer Energie ε, die so niedrig liegen möge, daß die Zahl der mit ε erzeugten primären Spaltneutronen klein sei gegen die Zahl der durch Bremsung in das Intervall eintretenden Neutronen. Außerdem sei die Absorption vernachlässigt. Dann ändert sich die Zahl der Neutronen im Volumelement und Energieintervall $\frac{\partial n}{\partial \varepsilon}\, d\varepsilon\, dx\, dy\, dz$ mit der Zeit dadurch, daß Diffusion auftritt und daß pro sec $q_{(\varepsilon)}\, dx\, dy\, dz$ Neutronen in das Intervall $d\varepsilon$ hinein-, aber $q_{(\varepsilon - d\varepsilon)}\, dx\, dy\, dz$ Neutronen hinausgestreut werden. Also

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial n}{\partial \varepsilon}\, d\varepsilon\right) = D_{(\varepsilon)}\, \Delta \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}\, d\varepsilon\right) - \frac{d q}{\partial \varepsilon}\, d\varepsilon.$$

Mit (18.2) folgt im stationären Zustand ($\partial n/\partial t = 0$):

$$\left.\begin{aligned} D_{(\varepsilon)}\, \Delta \left(\frac{q}{\varepsilon\, \xi\, \Sigma_{\text{str}}}\right) &= \frac{\partial q}{\partial \varepsilon}, \\ \Delta q &= \frac{\varepsilon\, \xi\, \Sigma_{\text{str}}}{D_{(\varepsilon)}}\, \frac{\partial q}{\partial \varepsilon}. \end{aligned}\right\} \qquad (19.10)$$

Diese Gleichung hat die Form der Wärmeleitungsgleichung, allerdings hängt der Faktor vor $\partial q/\partial \varepsilon$ von ε ab. Zur Lösung führen wir die Substitution

$$d\tau = \frac{D_{(\varepsilon)}}{\varepsilon \xi \Sigma_{\text{str}}} d\varepsilon$$

ein, damit wird aus (19.10)

$$\Delta q = \frac{\partial q}{\partial \tau}. \tag{19.11}$$

Die „Bremsdichte“ q ist hier als Funktion von x, y und z sowie τ aufgefaßt, nicht mehr als Funktion von x, y, z und ε. τ hat die Dimension [cm^2], man bezeichnet

$$\tau_{\text{th}} = \int_{\varepsilon_{th}}^{\varepsilon_{sp}} \frac{D_{(\varepsilon)}}{\varepsilon \xi \Sigma_{\text{str}}} d\varepsilon \tag{19.12}$$

als „FERMI-Alter“ der Spaltneutronen. Es handelt sich dabei aber nicht um eine Zeit, sondern um das Quadrat einer mittleren Diffusionsstrecke, wie unten gezeigt wird.

Wenn Σ_{str} nicht von der Neutronenenergie abhängt, ist τ proportional zur über den Logarithmus der Energie gemittelten Diffusionskonstanten.

Im Fall der Kugelsymmetrie, wenn also q räumlich nur von $|\vec{r}|$ abhängt, ist eine Lösung von (19.11) die GAUSS-Verteilung

$$q = \frac{1}{(4\pi\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-r^2/4\tau}.$$

Werden zur Zeit $t=0$ eine Anzahl schneller Neutronen bei $r=0$ in einen Moderator gesetzt, dann sind sie nach Erreichen des FERMI-Alters τ [d.h. wenn sie die Energie der unteren Grenze des Integrals (19.12) haben] im Mittel um die Strecke

$$\sqrt{\overline{r^2}} = \left(\frac{\int_0^\infty r^2 \frac{1}{(4\pi\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-r^2/4\tau} 4\pi r^2 \, dr}{\int_0^\infty \frac{1}{(4\pi\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-r^2/4\tau} 4\pi r^2 \, dr} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6\tau}$$

von $r=0$ wegdiffundiert. Zahlenwerte für Spaltneutronen gibt Tabelle 19.2.

Die aus einer punktförmigen Neutronenquelle emittierten Neutronen werden also erst in einem gewissen Abstand thermisch, der im Mittel durch $\sqrt{6\tau}$ gegeben ist.

Wir sind nun in der Lage, den Nichtausflußfaktor P_s für schnelle Neutronen zu berechnen, also den Bruchteil der schnellen Neutronen, der *nicht* durch die Reaktorbegrenzung entkommt. Zur Lösung von (19.11) kann man einen Separationsansatz versuchen:

$$q_{(x,y,z,\tau)} = R_{(x,y,z)}\, T_{(\tau)}\,.$$

Eingesetzt und durch RT dividiert ergibt

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{1}{T}\,\frac{dT}{d\tau}\,.$$

Tabelle 19.2. FERMI-*Alter von Spaltneutronen*

Moderatorsubstanz	τ_{th} [cm²]	$\sqrt{\overline{r^2}}$ [cm]
Wasser	33	14
D_2O	120	27
Graphit ($\rho = 1{,}6$ g/cm³)	350	46

Links steht eine Funktion der Ortsvariablen, rechts eine Funktion von τ allein. Daher sind beide Seiten gleich einer Konstanten, die wir $-B^2$ nennen. Also

$$\Delta R + B^2 R = 0\,, \tag{19.13}$$

$$\frac{dT}{d\tau} = -B^2\, T. \tag{19.14}$$

Die Gleichung (19.14) läßt sich lösen durch

$$T_{(\tau)} = T_0\, e^{-B^2 \tau}.$$

Dabei ist T_0 der Wert von T für $\tau = 0$, d.h. im Moment der Spaltung. Mit

$$R_{(x,y,z)}\, T_0 = q_{sp}$$

folgt dann

$$q_{(x,y,z,\tau)} = q_{sp}\, e^{-B^2 \tau}.$$

Speziell für $\tau = \tau_{th}$ ergibt sich mit $q_{(x,y,z,\tau_{th})} = q_{th}$:

$$q_{th} = q_{sp}\, e^{-B^2 \tau_{th}}.$$

Integriert man über das Reaktorvolumen, so steht links die Gesamtzahl der thermisch gewordenen Neutronen, rechts die Gesamtzahl der entstandenen Spaltneutronen multipliziert mit einem Faktor, den man somit als Nichtausflußfaktor deuten muß:

$$P_s = e^{-B^2 \tau_{th}}. \tag{19.15}$$

Der Wert der Größe B^2 ergibt sich aus den Randbedingungen zu Gleichung (19.13). Im Falle des Reaktors ist (19.13) identisch mit (19.9), wie man durch Multiplikation von (19.13) mit dem Faktor $k_\infty P_s \Sigma_{abs}$ erkennt; in diesem Fall ist $B^2 = B_m^2$, also

$$P_s = e^{-(B_m^2 \tau_{th})}.$$

Der Nichtausflußfaktor für *thermische* Neutronen ergibt sich aus der Bedingung, daß für den Reaktorbetrieb $k_{\text{eff}}=1$ sein muß (vgl. §18):

$$k_{\text{eff}}=k_\infty P_s P_{\text{th}}=1\,.$$

Mit (19.9) folgt

$$P_{\text{th}}=\frac{1}{k_\infty P_s}=\frac{1}{L^2 B_m^2+1}\,.$$

Der gesamte Leckfaktor ist dann

$$P=P_s P_{\text{th}}=\frac{e^{-(B_m^2\,\tau_{\text{th}})}}{L^2 B_m^2+1}\,,$$

was sich für kleine B_m^2 und mit $B_m^2=B_g^2$ annähern läßt durch

$$P\approx\frac{1}{1+(L^2+\tau_{\text{th}})\,B_m^2}=\frac{1}{1+(L^2+\tau_{\text{th}})\,B_g^2}\,.$$

Die Größe $\sqrt{L^2+\tau_{\text{th}}}$ (=„Wanderungslänge") ist ein Maß für den Weg, den ein Neutron im Mittel von seinem Entstehungsort durch den Spaltprozeß bis zu seinem Einfang als thermisches Neutron zurücklegt. Da

$$k_{\text{eff}}=k_\infty P\approx\frac{k_\infty}{1+(L^2+\tau_{\text{th}})\,B_g^2} \tag{19.16}$$

ist, muß die Wanderungslänge möglichst klein gemacht werden, damit k_∞ klein sein kann und doch ein stationärer Reaktorbetrieb möglich ist.

Es gilt

$$L^2_{\text{Reaktor}}=(1-f)\,L^2_{\text{Moderator}}\,,$$

da [Index M steht für Moderator, Index U für Brennstoff (Uran)]

$$\left(\frac{1}{\Sigma_{\text{abs}}}\right)_{\text{Reaktor}}=\frac{1}{N_M\,\sigma_{\text{abs}}^{(M)}+N_U\,\sigma_{\text{abs}}^{(U)}}\,\frac{N_M\,\sigma_{\text{abs}}^{(M)}}{N_M\,\sigma_{\text{abs}}^{(M)}}=(1-f)\,\frac{1}{\Sigma_{\text{abs}}^{(M)}}\,.$$

Beispiel: Homogene, optimale Mischung $U-D_2O$:

$$\tau_{\text{th}}=120\,\text{cm}^2 \text{ für } D_2O \text{ allein}\,,$$
$$\tau_{\text{th}}=106\,\text{cm}^2 \text{ für optimale } D_2O\text{-U-Mischung}\,,$$
$$L_{D_2O}=116\,\text{cm}\,.$$

Mit den Daten der Tabelle 18.3 ergibt sich für die kritische Größe eines kugelförmigen Reaktors:

$$L^2_{\text{Reaktor}}=(1-f)\,L^2_{D_2O}=0{,}045\,(116)^2\,\text{cm}^2=606\,\text{cm}^2.$$

Aus (19.16) folgt für $k_{\text{eff}}=1$:

$$B_g^2=\frac{k_\infty-1}{L^2+\tau_{\text{th}}}=\frac{0{,}145}{606+120}\,\text{cm}^{-2}$$

[dies ist klein gegen $1/\tau_{th}$, so daß die Benutzung von (19.16) gerechtfertigt ist]. Damit folgt für den Kugelradius

$$R = \frac{\pi}{B_g} = \pi \sqrt{\frac{726}{0{,}145}} = 220\,\text{cm}\,.$$

Vergleich mit dem Experiment: Für UO_2F_2 in D_2O wurde $R = 205$ cm gemessen. Die Übereinstimmung ist gut.

Übungen zu Teil A

Zu Kapitel I:

1. Finde einen Ausdruck für die Beschleunigung in Kugelkoordinaten. Führe dem System angepaßte Einheitsvektoren ein und diskutiere die Bedeutung der Komponenten der Beschleunigung. Zeige, daß in den Fällen $\vartheta = \pi/2$, $\dot{\vartheta} = 0$ und $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = 0$ der Gleichung (1.2) ähnliche Ausdrücke entstehen.

2. Wenn zu einem Kraftfeld eine Potentialfunktion $U_{(x,y,z)}$ existiert, derart daß

$$\vec{K} = -\operatorname{grad} U_{(x,y,z)}\,,$$

nennt man das Kraftfeld „konservativ“. Zeige, daß die Summe aus kinetischer und potentieller Energie eines bewegten Teilchens in diesem Feld konstant ist.

Hilfe: Bilde $\vec{v} \cdot \vec{K}$ und benutze das NEWTONsche Grundgesetz.

3. Zeige, daß bei elastischer Streuung eines Teilchens der Masse m_1 an einem Zentrum der Masse $m_2 < m_1$ ein maximaler Streuwinkel Φ existiert. Wie groß ist dieser?

4. a) Welche kinetische Energie kann ein Proton von 1 MeV bei einem Stoß mit einem ruhenden Elektron maximal übertragen? Unter welchem Winkel im Laborsystem zur Einfallsrichtung entweicht das gestoßene Elektron? Welchen Ablenkwinkel im Laborsystem erleidet das Proton?

b) Welchen maximalen Ablenkwinkel im Laborsystem kann das Proton bei einem Stoß mit einem ruhenden Elektron erleiden?

c) Leite eine Beziehung zwischen den Winkeln $(\Phi + \psi)$ und θ her. Welchen maximalen Winkel im Laborsystem schließen Protonenbahn und Elektronenbahn ein?

5. Leite die in § 2 angegebene Beziehung zwischen Φ und θ für den Fall $v_2 \neq 0$ her.

6. Ein Teilchen der Masse m_1 stößt mit einem ruhenden Teilchen der Masse $m_2 = m_1$ zusammen. Zeige, daß die Bahnen der Teilchen nach dem Stoß im Laborsystem stets den Winkel 90° miteinander bilden.

Zu Kapitel II:

1. α-Teilchen von 5 MeV kinetischer Energie werden an einer Goldfolie der Massenbelegung 1 mg/cm² gestreut. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für Rückstreuung?

2. a) Berechne die Energie, die ein Teilchen der Ladung ze, der Masse m_1 und der Geschwindigkeit v_0 bei RUTHERFORD-Streuung an einem Teilchen (m_2, Ze) auf dieses überträgt. Wie hängt die übertragene Energie ab (i) vom Streuwinkel θ im Schwerpunktssystem, $(i\,i)$ vom Stoßparameter? Zeige, daß für Einfallsenergien, die groß sind gegen die potentielle Energie der Wechselwirkung, die übertragene Energie nicht von m_1 abhängt und gegeben ist durch

$$Q = \frac{2 z^2 Z^2 e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 m_2 v_0^2 q^2}\,.$$

b) Bestimme den Wirkungsquerschnitt $d\sigma/dQ$ für eine Energieübertragung zwischen Q und $Q+dQ$ auf ein Einzelteilchen. Welche Energieabhängigkeit zeigt das Spektrum der gestoßenen Teilchen, wenn der Streuversuch oft wiederholt wird?

3. Die Spektrallinien des H-Atoms und des „schweren" Wasserstoffatoms, dessen Kern ziemlich genau doppelt so schwer ist wie der Kern des normalen Wasserstoffatoms, sind wegen der verschiedenen reduzierten Massen etwas in der Frequenz gegeneinander verschoben. Wie groß muß das Auflösungsvermögen eines Spektralapparates sein, um die Spektrallinien des Überganges $n=3$ nach $n=2$ der beiden Atome voneinander zu unterscheiden? Liegen die Linien im ultravioletten, sichtbaren oder infraroten Spektralbereich?

4. Ein Müon (Ladung $-e$, Masse etwa 207 m_e) wird von einem Wasserstoffkern (Ladung $+e$) eingefangen. Wie groß ist der Radius seiner 1. BOHRschen Bahn? Wie groß ist deren Bindungsenergie? Bei welcher Hauptquantenzahl ist die Bahn des Müons etwa so groß wie die des Elektrons im Grundzustand des H-Atoms? Berechne die Energie des Lichtquants, das beim Übergang des Müons vom Zustand $n=2$ in den Zustand $n=1$ emittiert wird. Bei welchem Atom kann man mit dieser Strahlung gerade ein K-Elektron abtrennen?

5. Ist es logisch gerechtfertigt, aus der einen Quantenbedingung (5.1) zwei Quantenzahlen (n und l) abzuleiten?

Zu Kapitel III:

1. Aus den Angaben der Fig. 7.5 berechne die Bindungsenergie des letzten Protons von B^{10} und N^{14} sowie die des letzten Neutrons von Be^9, B^{11}, C^{12}, C^{13} und N^{15}.

2. Gegeben die Massendefekte der folgenden Atome:

$$\begin{aligned} He^4&: \quad 2{,}4251 \text{ MeV} \mathrel{\hat{=}} 2604\,\mu m_u \\ B^{10}&: \quad 12{,}0519 \text{ MeV} \mathrel{\hat{=}} 12939\,\mu m_u \\ C^{12}&: \quad 0 \qquad\qquad 0 \\ C^{13}&: \quad 3{,}1243 \text{ MeV} \mathrel{\hat{=}} 3354\,\mu m_u \\ N^{14}&: \quad 2{,}8636 \text{ MeV} \mathrel{\hat{=}} 3074\,\mu m_u . \end{aligned}$$

Berechne die Bindungsenergie der Kerne B^{10}, C^{12}, C^{13}, N^{14} in MeV. Zeichne ein der Fig. 7.5 ähnliches Energiediagramm für die Kombinationen N^{14}; $C^{13}+H^1$; $C^{12}+H^2$; $B^{10}+He^4$.

3. Berechne die Massendefekte der Kerne H^3, He^3 und He^4 aus den Daten der Tabelle 6.1 und den Angaben der Fig. 7.3 und 7.4.

Zu Kapitel IV:

1. Protonen der Einfallsenergien (im Laborsystem) 1,0; 2,0; 4,0; 6,0; 8,0; 10,0 MeV werden an Kernen der Masse $M=20\,m_p$ elastisch gestreut. Welche Energie haben sie unter den Austrittswinkeln 45, 90, 135, 179°?

2. Protonen von 9,00 MeV werden aus einem VAN-DE-GRAAFF-Generator auf einen hypothetischen Kern der Masse 10 m_p geschossen, der Anregungsniveaus bei 1,00; 2,00; 3,00; 4,00; 5,00; 6,00 und 7,00 MeV habe. Gestreute Protonen werden unter den Winkeln 90, 135, 179° zur Einfallsrichtung beobachtet. Welche Energien erwartet man für die elastisch und inelastisch gestreuten Protonen?

3. a) Die Reaktion $Ca^{40}(p, n)\,Sc^{40}$ hat einen Q-Wert von $-15{,}5$ MeV. Wie groß ist die Minimalenergie der Protonen, die die Reaktion auslösen können (Schwellenenergie der Reaktion) im Laborsystem? Unter welchem Winkel zum einfallenden Strahl werden bei

dieser Protonenenergie die Neutronen ausgesandt? Welche Energie haben diese Neutronen?

b) Wie hängt die Neutronenenergie für $\Phi=0$ von der Differenzenergie $(E_p - E_{\text{Schwelle}})$ ab? (Diagramm.)

c) Wieviel Energie müssen die Protonen mindestens haben, damit Neutronen unter $\Phi=90^\circ$ erscheinen können?

4. Bestimme den Q-Wert der Reaktion $F^{19}(p, \alpha)\,O^{15}$ aus den folgenden Werten für die Massendefekte:

$$\begin{array}{llll} H^1: & 7{,}2887\,\text{MeV} & O^{16}: & -4{,}7364\,\text{MeV} \\ He^4: & 2{,}4251\,\text{MeV} & F^{19}: & -1{,}4861\,\text{MeV}. \end{array}$$

Die Protonen, die die Reaktion einleiten, seien vorher durch ein Potential von 330 keV beschleunigt worden. Wie groß ist die Energie der α-Teilchen im Laborsystem, wenn der Kern O^{16} im Grundzustand bzw. in einem angeregten Zustand mit $E^*=6{,}14$ MeV zurückbleibt, unter 0, 45, 90, 135, 180° zum Protonenstrahl?

5. Wenn ε_a die kinetische Energie des einfallenden Teilchens und ε_b die des emittierten Teilchens im Laborsystem ist, zeige daß

$$\varepsilon_b = \varepsilon_s + \frac{M_b M_a \varepsilon_a}{(M_a + M_A)^2} + 2\frac{\sqrt{M_a M_b}}{M_a + M_A}\sqrt{\varepsilon_s \varepsilon_a}\cos\theta,$$

wobei θ der Winkel der Bahn des emittierten Teilchens gegen die des einfallenden Teilchens im Schwerpunktssystem und ε_s die kinetische Energie des Teilchens b im Schwerpunktssystem ist. Wie hängt ε_s mit ε_a zusammen?

6. α-Teilchen von 5 MeV kinetischer Energie im Laborsystem leiten die Kernreaktion $Be^9(\alpha, n)\,C^{12}$ ein. Wie groß ist die maximale Energie der emittierten Neutronen im Laborsystem? (10,58 MeV).

Hinweis: Benutze das Resultat der Aufgabe 3 oder die Q-Gleichung.

7. Beim COMPTON-Effekt werden die sekundären Quanten unter einem Winkel Φ, die Elektronen unter einem Winkel φ im Laborsystem gegen den Primärstrahl beobachtet. Zeige, daß die Beziehungen zwischen den Winkeln lauten

$$\operatorname{cotg}\varphi = \left(1 + \frac{\hbar\omega_a}{m_e c^2}\right)\operatorname{tg}\frac{\Phi}{2},$$

$$\cos\Phi = 1 - \frac{2}{1 + \left(1 + \frac{\hbar\omega_a}{m_e c^2}\right)^2 \operatorname{tg}^2\varphi}.$$

8. Der differentielle Wirkungsquerschnitt für eine COMPTON-Streuung, bei der das gestreute Quant in das Raumwinkelelement $d\Omega_{LS}$ gelangt, ist nach KLEIN-NISHINA für ein Atom mit Z Elektronen und unpolarisierter γ-Strahlung gegeben durch

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z}{2}(R_{\text{el}})^2\gamma^2\left(\gamma + \frac{1}{\gamma} - \sin^2\Phi\right)$$

mit

$$\gamma = \frac{\hbar\omega_b}{\hbar\omega_a} \quad \text{(hängt von } \Phi \text{ ab!)}.$$

a) Berechne den Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d(\hbar\omega_b)}$ dafür, daß das γ-Quant durch den Streuprozeß eine Energie zwischen $\hbar\omega_b$ und $\hbar\omega_b + d(\hbar\omega_b)$ hat, als Funktion von $\hbar\omega_a$ und $\hbar\omega_b$.

b) Berechne den totalen Wirkungsquerschnitt dafür, daß irgend ein COMPTON-Effekt stattfindet, und finde die Grenzwerte für $\hbar\omega_a \ll m_e c^2$ und $\hbar\omega_a \gg m_e c^2$.

c) Zeichne $d\sigma/d(\hbar\omega_b)$ als Funktion von $\hbar\omega_b$ für den Fall $\hbar\omega_a = 2m_e c^2 \approx 1$ MeV und gib als Parameter an der Kurve den Streuwinkel an.

d) Zeichne die Kurve aus c) um als $d\sigma/d(KE_e)$ und markiere Werte des Elektronenaustrittswinkels φ als Parameter an der Kurve.

9. Elektronen von 60 MeV im Laborsystem werden an einer dünnen Folie aus einem Kohlenwasserstoff elastisch gestreut. Wie weit liegen die beiden sekundären Elektronengruppen energetisch auseinander, wenn unter einem Winkel von 90, 135, 179° zum Einfallsstrahl beobachtet wird?

10. Leite die Formel (10.9) im Text ab.

Zu Kapitel V:

1. Eine Zerfallskette bestehe aus einem Mutterkern der Zerfallswahrscheinlichkeit λ_0, einem Tochterkern der Zerfallswahrscheinlichkeit λ_1 und einem stabilen zweiten Tochterkern. Nach welcher Funktion der Zeit ändert sich die Zahl der Mutterkerne (N_0 zur Zeit $t = 0$), die Zahl der Kerne des ersten Tochterisotops ($N_1 = 0$ bei $t = 0$) und die des zweiten Tochterisotops ($N_2 = 0$ bei $t = 0$)? Stelle das Ergebnis graphisch dar für die Fälle Ba^{140} ($T =$ 12,6 d) $\rightarrow La^{140}$ (40,2 h) $\rightarrow Ce^{140}$ und Sr^{90} (28 y) $\rightarrow Y^{90}$ (64,5 h) $\rightarrow Zr^{90}$.

2. RaD($= Pb^{210}$) zerfällt mit einer Halbwertszeit von 22 y zu RaE($= Bi^{210}$), dieses zerfällt mit einer Halbwertszeit von 5,0 d zu RaF($= Po^{210}$). RaF zerfällt mit einer Halbwertszeit vom 138,4 d zu Pb^{206} (stabil). Zeichne den Aktivitätsverlauf für RaD, RaE und RaF für die ersten 100 Tage, wenn die Anfangsaktivität 1 mC reines RaD ist.

3. Aus einer Radiumlösung wird durch einen Gasstrom das gasförmige Folgeprodukt Rn^{222} entfernt. Nach welcher Funktion der Zeit wächst es wieder nach?

4. In einem ursprünglich kein Blei enthaltenden Uranmineral entsteht Blei durch den radioaktiven Zerfall der Isotope U^{235} und U^{238}. Das Mineral sei $600 \cdot 10^6$ y alt. Wieviel Gewichtsprozent Blei enthält das Mineral heute und wie groß ist das Isotopenverhältnis Pb^{207}/Pb^{206}?

5. Aufgrund der langen Halbwertszeit des K^{40} kann man dieses Isotop neben Rb^{87} und den U- und Th-Isotopen zu Altersbestimmungen an Gesteinen verwenden. Diskutiere die Vor- und Nachteile der K^{40}/A^{40}- und K^{40}/Ca^{40}-Methoden.

Zu Kapitel VI:

1. Berechne nach der WEIZSÄCKER-Formel den Q-Wert der Reaktion $Al^{27}(p, \alpha)\,Mg^{24}$ und vergleiche mit dem experimentellen Wert $Q = 1{,}594$ MeV.

2. Welchen Q-Wert liefert die WEIZSÄCKER-Formel für die Reaktion $Ca^{40}(p, n)\,Sc^{40}$? Vergleiche mit dem experimentellen Wert $Q = -15{,}5$ MeV. Warum ist die Abweichung gerade bei dieser Reaktion so groß?

3. Zeichne die Energieparabeln für $A = 10, 11, 12, 13$ und 14 (Daten z.B. aus LANDOLT-BÖRNSTEIN, Neue Serie, Bd. I/1) und diskutiere den Kurvenverlauf. Erkläre die Existenz der stabilen u-u-Kerne B^{10} und N^{14}.

4. Diskutiere den in § 14 erwähnten Fall des β^+-Zerfalls der Spiegelkerne für den Fall gerader Z. Zahlenwerte können dem Artikel von F. EVERLING et al., Nuclear Physics **15**,

342—355 (1960) entnommen werden. Was läßt sich über die Paarungsenergien von Protonen- und Neutronenpaaren aussagen?

5. Durch welche Messungen an welchen Kernreaktionen könnte man Auskunft über den Massenunterschied der Kerne Li^5 und He^5 erhalten?

Zu Kapitel VII:

1. 1 g eines stabilen Isotops ${}_ZM_N^A$ wird in einem Reaktor von einem thermischen Neutronenfluß Φ (Zahl der Neutronen pro cm^2 und sec) homogen durchsetzt. Durch (n, γ)-Reaktionen entstehen Kerne ${}_ZM_{N+1}^{A+1}$, die radioaktiv seien und mit einer Halbwertszeit T zerfallen. Berechne die spezifische Aktivität der Probe nach einer Bestrahlungszeit t.

2. 1 g Au^{197} ($\sigma_{(n,\gamma)} = 98$ b für thermische Neutronen) wird in einem Reaktor einem thermischen Neutronenfluß $\Phi = 10^{14}$ Neutronen/cm^2sec für eine Zeit von t Tagen ausgesetzt. Der Kern Au^{198} hat eine Halbwertszeit von 2,7 d und seinerseits einen Einfangsquerschnitt für thermische Neutronen von 35000 b. Der Kern Au^{199} hat eine Halbwertszeit von 3,15 d. Berechne die Zahl der nach einer Zeit t vorhandenen Au^{198}- und Au^{199}-Kerne und das Aktivitätsverhältnis. Steigt oder sinkt das Aktivitätsverhältnis mit der Zeit? Wann ist es am größten und wie groß ist es dann?

3. Wie viele Stöße sind im Mittel notwendig, um ein Neutron einer Anfangsenergie von 2 MeV in den Moderatoren Wasserstoff, Deuterium, Kohlenstoff, Uran auf 0,1 eV abzubremsen? (Alle Reaktionen werden vernachlässigt).

4. Der Wirkungsquerschnitt für den Einfang thermischer Neutronen in Cd^{113} ist 21000 b. Wie dick muß ein Cd-Blech sein, um mindestens 999 $^0/_{00}$ der auftreffenden Neutronen zu absorbieren?

5. Ein Uranreaktor bestehe aus einer homogenen Mischung aus Kohlenstoff und angereichertem Uran (20% U^{235}, 80% U^{238}) im Atomzahlenverhältnis $N_C/N_U = 400$.

a) Berechne die Spaltneutronenausbeute η und die thermische Nutzung f mit den Wirkungsquerschnitten der Tabelle 18.1.

b) Berechne k_∞ unter der Annahme $p = 0,65$.

c) Mit $(\tau_{th})_{Reaktor} \approx (\tau_{th})_{Graphit}$ berechne den Radius der kritischen Kugel.

TEIL B

VIII. SCHRÖDINGER-Gleichung ohne Spin

Während bisher die Bewegung der Kernteilchen mit den Gesetzen der klassischen Mechanik beschrieben wurde, wollen wir im folgenden die Rechenmethoden der Quantentheorie erarbeiten. In Teil C dieser Abhandlung wird die Quantenmechanik dann auf kernphysikalische Probleme angewandt.

Da im vorliegenden Zusammenhang die logische Begründung oder die philosophische Frage der statistischen Ausdeutung der Quantenmechanik nicht im Vordergrund stehen, werden die hiermit verbundenen Probleme ganz weggelassen und müssen Büchern über Quantentheorie entnommen werden *. Hier soll nur der Rechenkalkül der Quantenmechanik in relativ kurzer Fassung aufgezeigt und die Nomenklatur für die in Teil C zu lösenden Probleme vorbereitet werden.

In diesem Kapitel wollen wir die SCHRÖDINGER-Gleichung, die allen nichtrelativistischen quantenmechanischen Rechnungen zugrundeliegt, zunächst plausibel machen (§20) und dann für einfache Fälle lösen (§21 und §22). Dabei werden nur solche Fälle besprochen, die in der Kernphysik wichtig sind (z.B. wird das Wasserstoffatom hier nicht behandelt).

Einige allgemeine Definitionen und Sätze der Quantenmechanik finden sich in §23, sie werden in §24 zur Ableitung der Erhaltungssätze gebraucht. Wie ja schon in Teil A zu erkennen war, sind die Erhaltungssätze von großem Wert für die Beschreibung von stationären Zuständen und Bewegungsvorgängen.

Alle Betrachtungen dieses Kapitels lassen die Existenz des Eigendrehimpulses (Spin) der Teilchen außer acht. Diese Einschränkung wird in Kapitel IX fallen gelassen. Jedoch bleibt auch dort noch die Beschränkung auf nichtrelativistische Geschwindigkeiten bestehen. Die Behandlung der relativistischen Quantenmechanik (DIRAC-Theorie) übersteigt den Rahmen dieses Buches.

---

* Zum Beispiel: D. J. BLOCHINZEW, Grundlagen der Quantenmechanik, Harri Deutsch, Frankfurt a. M. 1962; W. MACKE, Quanten, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1962; L. I. SCHIFF, Quantum Mechanics, Mac Graw-Hill Book Co., New York-London 1955; L. D. LANDAU und E. M. LIFSCHITZ, Quantum Mechanics, Pergamon Press, London 1958; A. MESSIAH, Quantum Mechanics, North Holland Publ. Co., Amsterdam 1961.

§ 20. Lichtwellen und DE-BROGLIE-Wellen

Die MAXWELLsche Theorie des Elektromagnetismus ergibt, daß jede Komponente des elektrischen Feldvektors $\vec{E}$ und des magnetischen Feldvektors $\vec{H}$ im Vakuum die Wellengleichung

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \tag{20.1}$$

befriedigt (c = Lichtgeschwindigkeit; ψ steht für eine beliebige Komponente von $\vec{E}$ oder $\vec{H}$). Eine Lösung von (20.1), die einer sich in $\vec{k}$-Richtung ausbreitenden ebenen Welle entspricht, ist

$$\psi = \psi_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}. \tag{20.2}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung (20.1) und Multiplikation mit $\hbar^2 c^2$ ($\hbar$ ist ein zunächst beliebiger, konstanter Faktor) ergibt

$$(-\hbar^2 k^2 c^2 + \hbar^2\omega^2)\psi = 0 \qquad (\text{„Wellensprache"}). \tag{20.3}$$

Dies kann für $\psi \neq 0$ nur erfüllt sein, wenn $k^2 c^2 = \omega^2$, also wenn der „Wellenvektor" $\vec{k}$ die Länge hat

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \equiv \frac{1}{\lambda\!\!\!^{-}}. \tag{20.4}$$

Mit der BOHRschen Bedingung [vgl. (5.2)]

$$E = \hbar\omega \tag{20.5}$$

und der Impuls-Energie-Relation (8.4) für Lichtquanten

$$E^2 = p^2 c^2 \qquad (\text{„Quantensprache"})$$

folgt aus (20.3)

$$\left(-\frac{\hbar^2 k^2 E^2}{p^2} + E^2\right)\psi = 0$$

oder

$$p = \hbar k,$$

d.h. der Betrag des Lichtquantenimpulses ist – bis auf den Faktor $\hbar$ – gleich dem Betrag des Wellenvektors. Da die Ausbreitungsrichtung der Lichtwelle sinnvollerweise identifiziert wird mit der Flugrichtung der Lichtquanten, ausgedrückt durch die Richtung ihres Impulses, kann man die letzte Gleichung als Vektorgleichung schreiben:

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}. \tag{20.6}$$

Die Gleichungen (20.5) und (20.6) sind die Fundamentalgleichungen für die Physik der Lichtquanten. Den Teilchengrößen E, $\vec{p}$ sind die Wellengrößen ω, $\vec{k}$ zugeordnet. Der Proportionalitätsfaktor ist das PLANCKsche Wirkungsquantum $\hbar$. Die MAXWELLsche Wellengleichung entspricht dem Energiesatz der Lichtquanten. $|\psi|^2$ steht für das Quadrat jeder der Komponenten von $\vec{E}$ und $\vec{H}$, ist also proportional zur Intensität der Lichtwelle.

Aus (20.2) folgt

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = i\,k_x\psi = \frac{i}{\hbar}\,p_x\psi\,,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -i\,\omega\psi = -\frac{i}{\hbar}\,E\psi\,.$$

Aufgrund dieser Beziehungen kann man E und $\vec{p}$ als Operatoren auffassen *, die — man schreibt das oft nicht hin — auf ψ wirken:

$$\left.\begin{aligned} E_{\text{op}} &= -\frac{\hbar}{i}\,\frac{\partial}{\partial t}\,, \\ \vec{p}_{\text{op}} &= \frac{\hbar}{i}\,\text{grad}\,. \end{aligned}\right\} \tag{20.7}$$

Den Teilchengrößen E und $\vec{p}$ sind damit Differentialoperatoren zugeordnet, die den Energiesatz der Teilchensprache in die Wellensprache übersetzen. Es resultiert eine Wellengleichung.

Es war der Gedanke DE BROGLIES, diese für Lichtquanten gültige Übersetzungsvorschrift auch auf Teilchen mit nicht verschwindender Ruhmasse anzuwenden. Mit (20.4) und (20.6) muß damit einem Teilchen eine Wellenlänge

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad \text{bzw.} \quad \lambda\!\!\!^{-} = \frac{\hbar}{p} \tag{20.8}$$

zugeordnet werden. Diese zunächst absurd klingende Behauptung DE BROGLIES, daß nämlich einem materiellen Teilchen eine „Materiewelle" bestimmter Wellenlänge zuzuordnen ist, konnte jedoch durch das Experiment quantitativ bestätigt werden, z.B. durch den Nachweis der Elektronenbeugung.

Es liegt nahe, den Energiesatz für materielle Teilchen *(nichtrelativistisch)*

$$\frac{p^2}{2m} + U_{(x,y,z)} = E$$

---

* Dies ist nur zweckmäßig, wenn man das Problem der Zeitumkehr außer acht läßt. Die Gleichungen (20.7) sind nicht invariant gegen die Zeitumkehr. Im strengen Sinne dürfen in der Quantenmechanik solche Gleichungen nicht auftreten; im Rahmen der hier betrachteten Anwendungen entsteht jedoch kein Unglück, wenn (20.7) benutzt wird.

($U_{(x,y,z)}$ = potentielle Energie) nach der Vorschrift (20.7) in die Wellensprache zu übersetzen. Dabei ist nach SCHRÖDINGER der Operator $\vec{r}_{op}$, der in der Funktion der potentiellen Energie auftritt, identisch mit dem Ortsvektor $\vec{r}$:

$$\vec{r}_{op} = \vec{r}, \quad \text{d.h.} \quad x_{op} = x; \quad y_{op} = y; \quad z_{op} = z.$$

Das Ergebnis ist die SCHRÖDINGER-Gleichung

$$\boxed{\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U_{(x,y,z)}\right)\psi = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}.} \tag{20.9}$$

Der Operator auf der linken Seite entspricht der Summe aus kinetischer und potentieller Energie (ausgedrückt durch Orts- und Impulskoordinaten) und wird auch als „HAMILTON-Operator“ H bezeichnet. Schreibweise:

$$H\psi = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{20.10}$$

Die zunächst offene Deutung der (skalaren) ψ-Funktion für materielle Teilchen (Amplitude der Materiewelle) wurde von BORN wie folgt vorgenommen: $|\psi|^2 d\tau$ ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Volumelement $d\tau$ zu finden. Da das Teilchen irgendwo sein soll, muß gelten

$$\int |\psi|^2 d\tau = 1 \tag{20.11}$$

(Normierung der ψ-Funktion). Das Integrationsgebiet ist dabei entweder der ganze Raum oder – bei periodischen Problemen – das Periodizitätsgebiet. Zusätzlich muß die Erfüllung der Kontinuitätsgleichung gewährleistet sein [s. (40.2)].

Beispiel: Sei $\psi_{(x,t)}$ (eindimensionaler Fall) eine bekannte Lösung von (20.9), die periodisch in x mit der Periode L ist. Dann kann man ψ nach FOURIER entwickeln:

$$\psi_{(x,t)} = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \exp\left[\frac{i}{\hbar}(p_n x - E_n t)\right]; \qquad a_{-n} = a_n^*.^\star \tag{20.12}$$

Diese Entwicklung entspricht einer Summe von ebenen Wellen mit der Wellenlänge $\lambda_n = h/p_n = 2L/n$. Aus der Normierungsbedingung errechnet man

$$\int_x^{x+L} |\psi|^2 dx = \sum_{-\infty}^{+\infty} |a_n|^2 = 1,$$

also kann $|a_n|^2 dx$ aufgefaßt werden als die Wahrscheinlichkeit dafür, das Teilchen mit dem Impuls p_n im Ortsbereich zwischen x und $x + dx$ zu finden.

Aus der BORNschen Deutung ergeben sich folgende Postulate für die ψ-Funktion, die als Randbedingungen bei der Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung verwendet werden:

⋆ a_n^* bedeutet das Konjugiert-Komplexe von a_n.

1. ψ und Ableitungen müssen an jedem Punkt im Raum eindeutig, stetig und endlich sein.

2. ψ muß in jeder Raumrichtung in großen Entfernungen vom Ursprung gegen Null gehen oder periodisch sein.

Es gibt bisher keine Deutung für die Phase der ψ-Funktion.

Die SCHRÖDINGER-Gleichung [(20.9), (20.10)] kann als Naturgesetz nicht eigentlich *hergeleitet* werden. Die obigen Betrachtungen sind daher nur als Plausibilitätsargument aufzufassen. Die letzte Entscheidung über die Gültigkeit der Gleichung kann nur das Experiment liefern. Bis heute hat sich die Gleichung im Rahmen ihres Gültigkeitsbereichs bewährt.

§ 21. Separation der SCHRÖDINGER-Gleichung

Unter gewissen einschränkenden Annahmen ist eine Separation der SCHRÖDINGER-Gleichung nach ihren Variablen möglich.

a) Separation der Zeit

Wenn die Funktion U nicht explizit von der Zeit abhängt, kann die Zeitabhängigkeit separiert werden. Man bekommt dann zeitunabhängige oder „stationäre" Zustände als Lösungen. Man geht mit dem Ansatz

$$\psi_{(x,y,z,t)} = g_{(x,y,z)} f_{(t)}$$

in die SCHRÖDINGER-Gleichung (20.9) ein. Gleichzeitige Division durch fg ergibt

$$\frac{1}{g}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta g + U g\right) = -\frac{\hbar}{i}\frac{1}{f}\frac{df}{dt}.$$

Mit $\partial U/\partial t = 0$ steht links eine Funktion der Ortsvariablen allein, rechts eine Funktion der Zeit allein. Also sind beide Seiten gleich einer Konstanten, die mit E bezeichnet werden möge.

Die Zeitgleichung kann sofort integriert werden:

$$f_{(t)} = C \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E t\right). \tag{21.1}$$

Die „ortsabhängige" SCHRÖDINGER-Gleichung

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U\right) g = E g \tag{21.2}$$

hat nicht unbedingt für jeden Wert von E Lösungen, die mit den Randbedingungen (s. §20) verträglich sind. Die möglichen Werte heißen die

„Energieeigenwerte“ E_n, die zugehörigen Lösungsfunktionen g_n die „Energieeigenfunktionen“. Die allgemeine Lösung von (20.9) ist

$$\psi_{(x,y,z,t)} = \sum_n c_n \, g_{n(x,y,z)} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n t\right). \tag{21.3}$$

b) Separation der Winkelkoordinaten

Wenn die potentielle Energie U nur vom Abstand r vom Ursprung, aber nicht explizit von den Kugelwinkeln ϑ und φ (§ 1 c) abhängt, wie das z.B. bei Zentralkraftproblemen der Fall ist (vgl. Kleindruck am Ende von § 2), dann läßt sich der Winkelanteil der SCHRÖDINGER-Gleichung ebenfalls separieren. Dazu führen wir nach § 1 c Kugelkoordinaten ein und schreiben den LAPLACE-Operator in Kugelkoordinaten um:

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right].$$

Separationsansatz:

$$g_{(x,y,z)} = R_{(r)} \, Y_{(\vartheta,\varphi)}.$$

Einsetzen in (21.2) liefert nach Multiplikation mit $2mr^2/\hbar^2 RY$

$$-\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) + (U_{(r)} - E)\frac{2mr^2}{\hbar^2}$$
$$= \frac{1}{Y}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial Y}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right].$$

Beide Seiten sind gleich einer Separationskonstanten $(-\lambda)$, da die Variablen völlig getrennt sind. Die Radialgleichung lautet

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) + \left(U_{(r)} + \frac{\lambda\hbar^2}{2mr^2}\right)R = ER, \tag{21.4}$$

und die Winkelgleichung

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial Y}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \lambda Y = 0. \tag{21.5}$$

Die Winkelgleichung (21.5) hängt nur noch über λ vom speziellen – durch die Funktion U charakterisierten – Problem ab. Der physikalische Grund hierfür ist der Erhaltungssatz des Drehimpulses, wie später gezeigt werden wird. Die große Bedeutung des Drehimpulses in der Quantenmechanik tritt uns hier zum ersten Mal vor Augen.

Die Winkelgleichung kann noch weiter separiert werden:

$$Y_{(\vartheta,\varphi)} = \theta_{(\vartheta)}\, \Phi_{(\varphi)}\,.$$

Einsetzen in (21.5) und Multiplikation mit $\frac{\sin^2\vartheta}{\theta\Phi}$ liefert

$$\frac{\sin\vartheta}{\theta}\,\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{d\theta}{d\vartheta}\right) + \lambda\sin^2\vartheta = -\frac{1}{\Phi}\,\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\,.$$

Mit der Separationskonstanten ν^2 ergeben sich die Gleichungen

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \nu^2\,\Phi = 0\,, \tag{21.6}$$

$$\sin\vartheta\,\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{d\theta}{d\vartheta}\right) + (\lambda\sin^2\vartheta - \nu^2)\,\theta = 0\,. \tag{21.7}$$

Die Lösung von (21.6) lautet

$$\Phi = A\,e^{i\nu\varphi} + B\,e^{-i\nu\varphi} \quad \text{für} \quad \nu^2 \neq 0 \qquad (A, B \text{ reell}),$$
$$\Phi = a + b\,\varphi \quad \text{für} \quad \nu^2 = 0 \qquad (a,\ b \text{ reell}).$$

Wegen der Eindeutigkeit der ψ-Funktion muß sein

$$\Phi_{(\varphi)} = \Phi_{(\varphi+2\pi)}\,.$$

Bei $\nu^2=0$ folgt daraus sofort $b=0$, d.h. $\Phi_{(\varphi)}=\text{const}$. Bei $\nu^2 \neq 0$ ergibt sich

$$\Phi_{(\varphi+2\pi)} = A\,e^{i\nu(\varphi+2\pi)} + B\,e^{-i\nu(\varphi+2\pi)}.$$

Nur wenn $e^{2\pi i\nu} = e^{-2\pi i\nu} = 1$ ist, kann $\Phi_{(\varphi+2\pi)} = \Phi_{(\varphi)}$ sein. Da $\exp(2\pi i m) = 1$ nur für ganzzahlige m (positiv oder negativ), muß ν ganzzahlig sein: $\nu = m$,

$$\Phi_{(\varphi)} = A\,e^{im\varphi} + B\,e^{-im\varphi} \quad \text{mit} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\,. \tag{21.8}$$

Diese Lösung schließt den Fall $\nu^2=0$ mit ein.

A und B bestimmen sich aus den Randbedingungen und der Normierung. Man wählt meist $B=0$, dann wird (21.8) gleichzeitig Eigenfunktion zum Operator der Bahndrehimpulskomponente L_z (s. §23).

Man normiert die Funktionen R, θ und Φ einzeln auf Eins. Die Normierung von Φ liefert dann

$$\int_0^{2\pi} |\Phi|^2\, d\varphi = 1 = 2\pi\,|A|^2,$$

also

$$|A| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

und

$$\Phi_{(\varphi)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{i m\varphi}.$$

Die Gleichung (21.7) kann mit der Substitution

$$w=\cos\vartheta;\qquad \theta_{(\vartheta)}\to P_{(w)}$$

auf die Form gebracht werden

$$\frac{d}{dw}\left[(1-w^2)\frac{dP}{dw}\right]+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-w^2}\right)P=0. \tag{21.9}$$

Dies ist eine Eigenwertgleichung. Lösungen, die mit den Randbedingungen verträglich sind, gibt es nur für $\lambda=l(l+1)$ mit l positiv und ganzzahlig (d.h. $l=0, 1, 2, \ldots$), ferner $|m|\leq l$. Die Lösungen* lauten

$$P_{l\,(w)}^{|m|}=\frac{(1-w^2)^{|m|/2}}{2^l\,l!}\,\frac{d^{l+|m|}(w^2-1)^l}{dw^{l+|m|}},\qquad P_{l\,(w)}^{-|m|}=(-1)^m\,P_{l\,(w)}^{|m|}.$$

Damit wird die Lösung von (21.5)

$$Y_{l\,m}=N_{l\,m}\,P_{l\,(\cos\vartheta)}^{m}\,e^{i m\varphi}; \tag{21.10}$$

aus der Normierungsbedingung

$$\int |Y_{l\,m}|^2\,d\Omega=1$$

folgt

$$N_{l\,m}=(-1)^m\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\,\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}.$$

Die Funktionen $Y_{l\,m}$ werden als „Kugelfunktionen" bezeichnet. Die niedrigsten Kugelfunktionen sind:

$$Y_{0,0}=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\qquad\qquad Y_{2,2}=\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\vartheta\,e^{2i\varphi}$$

$$Y_{1,1}=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta\,e^{i\varphi}\qquad\qquad Y_{2,1}=-\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\vartheta\cos\vartheta\,e^{i\varphi}$$

$$Y_{1,0}=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta\qquad\qquad Y_{2,0}=\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\vartheta-\frac{1}{2}\right)$$

$$Y_{1,-1}=\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta\,e^{-i\varphi}\qquad\qquad Y_{2,-1}=\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\vartheta\cos\vartheta\,e^{-i\varphi}$$

$$Y_{2,-2}=\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\vartheta\,e^{-2i\varphi}.$$

* Für $m=0$ heißen die Lösungsfunktionen „LEGENDREsche Polynome", für $m\neq 0$ „assoziierte LEGENDREsche Polynome".

c) Die Radialgleichung

Wir betrachten noch einmal die Radialgleichung (21.4) und benutzen die bei *allen* Zentralkraftproblemen zweckmäßige Substitution

$$u_{(r)} = r\,R_{(r)}\,.$$

Mit

$$\frac{dR}{dr} = -\frac{u}{r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{du}{dr}$$

ergibt sich

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{d^2u}{dr^2} + \left[U_{(r)} + \frac{\hbar^2\,l(l+1)}{2m\,r^2}\right]u = E\,u\,. \tag{21.11}$$

Die Form der Radialgleichung (21.11) ist ähnlich der der ursprünglichen SCHRÖDINGER-Gleichung (21.2) mit den Unterschieden, daß jetzt nur *eine* unabhängige Veränderliche auftritt („eindimensionales Problem“) und daß zur potentiellen Energie das Glied $\frac{\hbar^2\,l(l+1)}{2m\,r^2}$ hinzukommt. Benutzt man die klassische Relation (1.5) zwischen Energie und Bahndrehimpuls und vergleicht mit (21.11), so läßt sich erkennen, daß die Quantisierung des Bahndrehimpulses nach der SCHRÖDINGER-Gleichung gegeben ist durch

$$|\vec{L}|^2 = \hbar^2\,l(l+1); \qquad l = 0, 1, 2, \ldots, \tag{21.12}$$

im Gegensatz zu BOHRS ursprünglicher Annahme (5.1) bzw. (5.7).

Der Zusatzterm der potentiellen Energie gibt – klassisch gesprochen – Anlaß zu einer Radialkraft

$$K_r = -\frac{d}{dr}\left[\frac{\hbar^2\,l(l+1)}{2m\,r^2}\right] = \frac{\hbar^2\,l(l+1)}{m\,r} = \frac{L^2}{m\,r} = m\,r\,\dot{\varphi}^2,$$

läßt sich also als das „Potential der Zentrifugalkraft“ deuten. Quantenmechanisch bewirkt der Term ein für kleine r stark positiv werdendes Potential, durch das die Aufenthaltswahrscheinlichkeit $|\psi|^2\,d\tau$ bei $r\to 0$ verkleinert wird. Je größer die Quantenzahl l ist, d.h. je größer der Bahndrehimpuls des Teilchens, desto geringer wird die Aufenthaltswahrscheinlichkeit in der Umgebung von $r=0$ werden. Die ψ-Funktion wird durch diesen Term aus der Nähe des Nullpunktes „hinausgedrängt“.

Die Differentialgleichung für $u_{(r)}$ ist (21.11). Wie in §2 gezeigt wurde, ist für Zweiteilchenprobleme unter Zentralkraft-Wechselwirkung im Relativsystem statt der Masse die reduzierte Masse μ einzusetzen, so daß

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\,\frac{d^2u}{dr^2} + \left[U_{(r)} + \frac{\hbar^2\,l(l+1)}{2\mu\,r^2}\right]u = E\,u\,. \tag{21.13}$$

Diese Gleichung wird in §22 weiter behandelt.

Die Normierung verlangt, daß

$$\int |\psi|^2 \, d\tau = \int |u|^2 \, dr = 1 .$$

Das bedeutet, daß bei unendlich großem Integrationsvolumen die Funktion u für große r gegen Null gehen muß. Liegt ein periodisches Problem vor, z.B. wenn die einzelnen Teilchen aus einer Beschleunigungsanlage wie eine „Perlenkette“ herauskommen, dann kann man ein endliches Integrationsvolumen annehmen, muß aber Periodizität verlangen, derart, daß die Randbedingungen am Anfang und Ende des Periodizitätsgebietes gleich sind.

Insgesamt hat sich also ergeben, daß nur die Radialgleichung (21.11) das spezielle durch die Funktion $U_{(r)}$ beschriebene Problem enthält. Die Winkelgleichungen kann man bei einem Zentralkraftproblem ohne Kenntnis der Einzelheiten des physikalischen Sachverhaltes (mathematisch ausgedrückt durch die Funktion $U_{(r)}$) lösen. Als Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung für einen bestimmten, durch die Quantenzahlen n, l, m charakterisierten Zustand erhält man damit

$$\psi_{n,l,m\,(r,\vartheta,\varphi,t)} = c_{n,l,m} \frac{u_{n,l\,(r)}}{r} Y_{l,m\,(\vartheta,\varphi)} \, e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} . \qquad (21.14)$$

Die neuauftretende Quantenzahl n charakterisiert die Energieeigenwerte E_n (s. § 22); $c_{n,l,m}$ ist eine durch die Normierung festzulegende Konstante. Die allgemeinste Lösung ist dann die Linearkombination

$$\Psi = \sum_{n,l,m} b_{n,l,m} \psi_{n,l,m} .$$

§ 22. Lösung der Radialgleichung in einfachen Fällen

a) Allgemeine Betrachtungen

Zur Diskussion wird die Gleichung (21.13) auf die Form gebracht

$$\frac{d^2 u}{d r^2} = \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} (U_{(r)} - E) \right] u . \qquad (22.1)$$

Die zweite Ableitung auf der linken Seite ist proportional zur Krümmung der Funktion u. Sie rührt (über $p_{\mathrm{op}}^2 \sim d^2/dr^2$) von der kinetischen Energie des beschriebenen Teilchens her: Ein Teilchen mit großer kinetischer Energie wird durch eine stark gekrümmte u-Funktion beschrieben.

Positive rechte Seite von (22.1) bedeutet Linkskrümmung, negative rechte Seite Rechtskrümmung der Funktion $u_{(r)}$. Wenn sich das Vorzeichen des Ausdrucks in eckigen Klammern als Funktion von r nicht ändert, muß u eine oszillierende Funktion sein, sonst geht $u \to \infty$, was den Randbedingungen widerspricht. Eine oszillierende Funktion findet man z.B. bei $U=0$ und $E>0$, d.h. bei einem freien Teilchen aus einem Beschleuniger.

Wenn die Gleichung einen gebundenen Zustand beschreiben soll, muß $E<0$ sein (s. §3). Für große r wird im allgemeinen $U_{(r)}$ verschwinden, da die Kräfte auf die Umgebung des Kraftzentrums beschränkt bleiben. Dann wird die eckige Klammer in (22.1) für kleine r negativ, für große r positiv sein, also ihr Vorzeichen wechseln $\left(\text{der Term } \frac{l(l+1)}{r^2}\right.$ gibt für kleine r eine Korrektur, für große r ist er vernachlässigbar klein$\left.\right)$.

Für $r\to\infty$ wird (22.1) zu

$$\frac{d^2u}{dr^2}=\frac{2\mu}{\hbar^2}|E|\,u\,,$$

außerdem muß wegen der Randbedingung die Funktion $u_{(r)}$ bei einem gebundenen Zustand für große r aperiodisch gegen Null gehen. Dies ist aber sicher für vorgegebenen Potentialverlauf $\left[U_{(r)}+\frac{\hbar^2\,l(l+1)}{2\mu r^2}\right]$ nur für ganz bestimmte, diskrete Werte von E möglich. Denn geht man von einem an

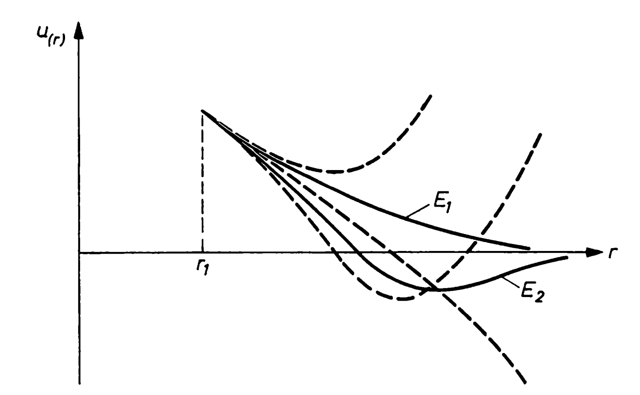


Fig. 22.1. Die möglichen Eigenwerte ergeben sich aus dem asymptotischen Verhalten der Wellenfunktion für $r\to\infty$

der Stelle r_1 errechneten Wert $u_{(r_1)}$ und der dort herrschenden Steigung $(du/dr)_{r_1}$ aus (s. Fig. 22.1), so strebt die Funktion bei falschen Werten von E entweder ins positiv Unendliche oder ins negativ Unendliche. Die möglichen Werte von E, für die die Randbedingung $u\to 0$ für $r\to\infty$ erfüllt wird, nennt man die „Energieeigenwerte" E_n. Es ist eine der Aufgaben der Quantenmechanik, die Energieeigenwerte für vorgegebene Potentialformen $U_{(r)}$ zu bestimmen. Neben den Eigenwerten interessieren die zugehörigen Eigenfunktionen.

b) Asymptotische Lösungen

Wir betrachten zunächst die asymptotische Lösung für $r\to 0$. Wenn die Funktion $U_{(r)}$ für $r\to 0$ schwächer als $1/r^2$ gegen unendlich strebt, kann man (21.13) für $r\to 0$ approximieren durch

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{d^2u}{dr^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}u\right)=0.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$u_{(r)}=c\,r^{l+1}+d\,r^{-l} \qquad (c, d \text{ Konstante}). \tag{22.2}$$

Die Randbedingung, daß $\psi\sim\frac{u}{r}$ endlich sein soll bei $r=0$, verlangt $d=0$. Damit wird ψ proportional zu r^l. Nur für $l=0$ ist $\psi_{(0)}$ endlich, für $l\neq 0$ ist $\psi_{(0)}=0$ und wächst für kleine r mit r^l. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Teilchens in einer Kugelschale mit den Radien r und $r+dr$ ist dann bei kleinen r proportional zu $r^{2l+2}dr$. Je größer l, desto kleiner ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit in der Nähe des Ursprungs. Für Stoßprobleme gibt es ein klassisches Analogon: Je größer der Bahndrehimpuls, desto größer der Stoßparameter (s. §4).

Über die asymptotische Lösung für $r\to\infty$ lassen sich folgende Aussagen machen: Da die potentielle Energie $U_{(r)}$ im allgemeinen für $r\to\infty$ verschwindet und das Potential der Zentrifugalkraft mit $1/r^2$ abnimmt, geht (22.1) für große r in die SCHRÖDINGER-Gleichung für ein freies Teilchen über:

$$\frac{d^2u}{dr^2}=-\frac{2\mu}{\hbar^2}Eu.$$

Die Lösung für $E>0$ ist bei periodischen Randbedingungen:

$$u=a\,e^{ikr}+b\,e^{-ikr} \quad \text{mit} \quad k=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2\mu E}. \tag{22.3}$$

Die Gesamtlösung (21.14) besteht dann aus einer Summe aus- und einlaufender Kugelwellen vom Typ

$$\psi_{nlm}=\Bigg\{\underbrace{a_{nl}\frac{\exp[i(k_{nl}r-\omega_n t)]}{r}}_{\text{auslaufende}}+\underbrace{b_{nl}\frac{\exp[-i(k_{nl}r-\omega_n t)]}{r}}_{\text{einlaufende}}\Bigg\}Y_{lm}. \tag{22.4}$$

Kugelwelle

Für $E<0$ ergibt sich die Lösung

$$u=A\,e^{-\kappa r}+B\,e^{\kappa r} \quad \text{mit} \quad \kappa=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2\mu|E|}.$$

Wegen der in diesem Falle zu fordernden Randbedingungen $u \to 0$ für $r \to \infty$ muß $B=0$ sein; damit ergibt sich als asymptotische Lösung

$$\psi_{n l m} = A_{n l} \frac{\exp(-\kappa_{n l} r)}{r} \exp(-i \omega_n t)\, Y_{l m}. \tag{22.5}$$

c) Lösung für $U_{(r)} = U_0 = \text{const}$

Ein „Kastenpotential" (s. Fig. 22.2) und eine Potentialschwelle wie in Fig. 22.4 sind aus solchen konstanten Potentialstücken zusammengesetzt.

Aus der Differentialgleichung (22.1) folgt zunächst für den einfachen Fall $l=0$ die Lösung

$$u = a\, e^{i k r} + b\, e^{-i k r} \quad \text{mit} \quad k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2\mu (E - U_0)}. \tag{22.6}$$

Je nach dem Vorzeichen des Radikanden unterscheidet man folgende Fälle:

1. Für $E - U_0 > 0$ liegt eine *periodische* Lösung vor. Für $r \to 0$ muß ψ, d.h. u/r, endlich sein. Entwicklung für $k r \ll 1$:

$$u = a\left(1 + i k r - \tfrac{1}{2}(k r)^2 + \cdots\right) + b\left(1 - i k r - \tfrac{1}{2}(k r)^2 - \cdots\right),$$

$$\frac{u}{r} = \frac{a+b}{r} + i k (a-b) - \frac{1}{2}(a+b)(k r)^2 + \cdots.$$

Aus der Randbedingung ergibt sich also

$$a = -b \Rightarrow \frac{u_0}{2i} \quad (\text{Definition von } u_0),$$

damit

$$u = u_0 \sin k r \quad \text{mit} \quad k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2\mu (E - U_0)}. \tag{22.7}$$

Die Lösung $u \sim \cos k r$ ist also ausgeschlossen.

2. Für $E - U_0 < 0$ wird k rein imaginär. Mit der Definition

$$K = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2\mu (U_0 - E)}$$

läßt sich die Lösung schreiben als

$$u = c\, e^{-K r} + d\, e^{K r}. \tag{22.8}$$

Da für $r \to \infty$ die Funktion u endlich bleiben muß, ist $d=0$. Damit

$$u = u_0\, e^{-K r} \quad \text{mit} \quad K = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2\mu (U_0 - E)}. \tag{22.9}$$

Die Funktion *u nimmt monoton* mit *r ab*, ohne Null zu werden. Dieser Fall tritt in der klassischen Mechanik nicht auf, da die im klassischen Energiesatz

$$KE = E - U_0$$

auftretende kinetische Energie nicht negativ sein kann. Die Existenz einer nicht verschwindenden Lösungsfunktion wie (22.9) in Gebieten, wo $KE < 0$ ist, ist die Grundlage für den quantenmechanischen „Tunneleffekt", der die Möglichkeit beschreibt, daß quantenmechanische Teilchen Potentialschwellen durchdringen (s. Beispiel 2, S. 130).

Beispiele:

1. Gebundene Zustände mit $l=0$ im Kastenpotential (s. Fig. 22.2). Sei $U = -V_0$ für $0 < r < b$ (Gebiet I) und $U = 0$ für $r \geq b$ (Gebiet II). Gesucht sind Lösungen der SCHRÖDINGER-Gleichung mit $E < 0$ („gebundene Zustände", vgl. § 3).

Fig. 22.2. Graphische Darstellung des Rechteck- oder Kastenpotentials (Potentialtopf)

Lösung: In Gebiet I ist

$$E - U = V_0 - |E| > 0,$$

also wird die Funktion u durch (22.7) gegeben:

$$u_{\mathrm{I}} = A \sin k r \quad \text{mit} \quad k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2\mu(V_0 - |E|)}.$$

In Gebiet II ist

$$E - U = -|E| < 0,$$

also gilt (22.9):

$$u_{\mathrm{II}} = B e^{-\kappa r} \quad \text{mit} \quad \kappa = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2\mu |E|}.$$

Aus den Forderungen an der Stelle $r = b$ (s. Schluß von § 20)

$$(\psi_{\mathrm{I}})_b = (\psi_{\mathrm{II}})_b; \quad \left(\frac{\partial \psi_{\mathrm{I}}}{\partial r}\right)_b = \left(\frac{\partial \psi_{\mathrm{II}}}{\partial r}\right)_b$$

folgen für die Funktion u wegen $\psi \sim u/r$ die Anschlußbedingungen:

$$(u_{\mathrm{I}})_b = (u_{\mathrm{II}})_b; \quad \left(\frac{d u_{\mathrm{I}}}{d r}\right)_b = \left(\frac{d u_{\mathrm{II}}}{d r}\right)_b.$$

Daraus ergibt sich im vorliegenden Fall

$$A \sin k b = B e^{-\kappa b} \qquad A k \cos k b = -B \kappa e^{-\kappa b}.$$

Division ergibt

$$\left.\begin{aligned} k \operatorname{cotg} k b &= -\kappa \\ \operatorname{cotg}\left[\frac{b}{\hbar}\sqrt{2\mu(V_0-|E|)}\right] &= -\sqrt{\frac{|E|}{V_0-|E|}}. \end{aligned}\right\} \tag{22.10}$$

Die Lösungen dieser transzendenten Gleichung liefern die möglichen Werte E_n, d.h. die Energien der gebundenen Zustände mit $l=0$ im kugelsymmetrischen Potentialtopf. Man findet sie am besten graphisch (s. Fig. 22.3). Für die gebundenen Zustände muß $0>E>-V_0$ sein. Die Funktion $\operatorname{cotg} x$ ist periodisch mit der Periode π; alle Lösungen müssen auf negativen Ästen des cotg liegen. Also ist ihre Anzahl gleich der Zahl der im Intervall $0>E>-V_0$ auftretenden negativen Äste der Funktion

$$\operatorname{cotg}\left[\frac{b}{\hbar}\sqrt{2\mu(V_0-|E|)}\right].$$

Man erhält die Anzahl i der gebundenen Zustände aus der Ungleichung

$$(2i-1)\frac{\pi}{2} \leqq \frac{b}{\hbar}\sqrt{2\mu V_0} \leqq (2i+1)\frac{\pi}{2}$$

oder — umgerechnet — i ist die auf den Wert

$$\frac{b}{\pi \lambda_c}\sqrt{\frac{2V_0}{\mu c^2}} - \frac{1}{2}$$

folgende ganze Zahl. Dabei ist $\lambda_c = \hbar/\mu c$ die COMPTON-Wellenlänge des Teilchens der reduzierten Masse μ.

Kernphysikalische Anwendung (z.B. auf das Deuteron) s. § 35.

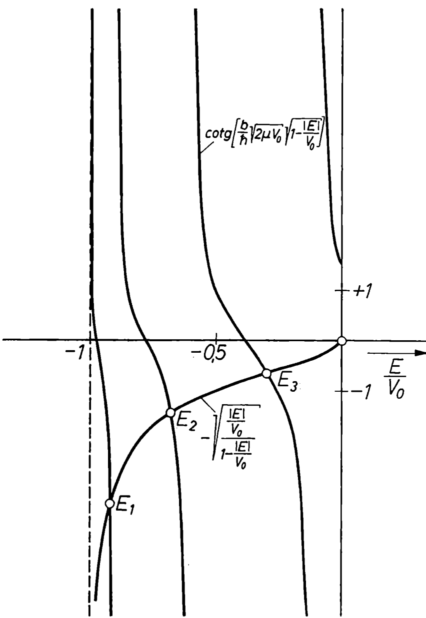


Fig. 22.3. Festlegung der Eigenwerte des Kastenpotential-Problems durch graphische Lösung von Gleichung (22.10). Im Beispiel ist $\frac{b}{\hbar}\sqrt{2\mu V_0}=10$, $l=0$

2. Wahrscheinlichkeit für die Durchdringung einer Potentialschwelle bei $l=0$ (Tunneleffekt).

Das Potential habe die in Fig. 22.4 dargestellte Form, sei $E>0$. Im Gebiet I ist $E-U>0$, also gilt (22.6):

$$u_{\mathrm{I}} = a\,e^{ikr} + b\,e^{-ikr} \qquad k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2\mu(E+V_0)}.$$

Im Gebiet II ist $E-U<0$, also gilt (22.8):

$$u_{\mathrm{II}} = c\,e^{-\kappa r} + d\,e^{\kappa r}; \qquad \kappa = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2\mu(V_1-E)}.$$

Im Gebiet III ist mit $U=0$ wieder $E-U>0$, also gilt (22.6):

$$u_{\mathrm{III}} = f\,e^{ik'r} + g\,e^{-ik'r}; \qquad k' = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2\mu E}.$$

Wenn das betrachtete Teilchen von außen kommt und z.B. im Atomkern eingefangen werden soll, muß ψ_{I} eine einlaufende Kugelwelle beschreiben, also $a=0$ sein. Wenn das Teilchen von innen kommt, wie z.B. beim α-Zerfall eines Atomkerns (s. § 48), dann enthält ψ_{III} nur eine auslaufende Kugelwelle, also $g=0$.

Anschlußbedingungen:

$$\psi_{\mathrm{I}\,(r_1)}=\psi_{\mathrm{II}\,(r_1)};$$

$$\psi_{\mathrm{II}\,(r_2)}=\psi_{\mathrm{III}\,(r_2)},$$

$$\left(\frac{\partial\psi_{\mathrm{I}}}{\partial r}\right)_{r_1}=\left(\frac{\partial\psi_{\mathrm{II}}}{\partial r}\right)_{r_1};$$

$$\left(\frac{\partial\psi_{\mathrm{II}}}{\partial r}\right)_{r_2}=\left(\frac{\partial\psi_{\mathrm{III}}}{\partial r}\right)_{r_2}.$$

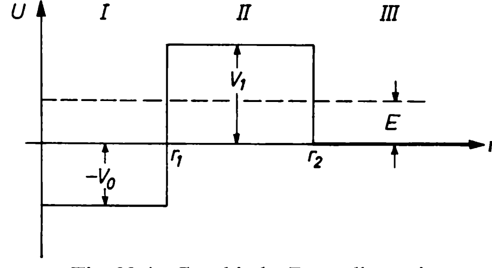


Fig. 22.4. Graphische Darstellung einer einfachen Potentialschwelle

Wegen $\psi=u/r$ ergeben sich ähnliche Randbedingungen auch für die Funktion u:

$$u_{\mathrm{I}\,(r_1)}=u_{\mathrm{II}\,(r_1)}; \qquad u_{\mathrm{II}\,(r_2)}=u_{\mathrm{III}\,(r_2)},$$

$$\left(\frac{d u_{\mathrm{I}}}{d r}\right)_{r_1}=\left(\frac{d u_{\mathrm{II}}}{d r}\right)_{r_1}; \qquad \left(\frac{d u_{\mathrm{II}}}{d r}\right)_{r_2}=\left(\frac{d u_{\mathrm{III}}}{d r}\right)_{r_2}.$$

Also

$$a\,e^{i k r_1}+b\,e^{-i k r_1}=c\,e^{-\kappa r_1}+d\,e^{\kappa r_1},$$

$$\frac{i k}{\kappa}(a\,e^{i k r_1}-b\,e^{-i k r_1})=-c\,e^{-\kappa r_1}+d\,e^{\kappa r_1},$$

$$c\,e^{-\kappa r_2}+d\,e^{\kappa r_2}=f\,e^{i k' r_2}+g\,e^{-i k' r_2},$$

$$-c\,e^{-\kappa r_2}+d\,e^{\kappa r_2}=\frac{i k'}{\kappa}(f\,e^{i k' r_2}-g\,e^{-i k' r_2}).$$

Addition bzw. Subtraktion der beiden Gleichungspaare liefert

$$a\left(1+\frac{i k}{\kappa}\right)e^{i k r_1}+b\left(1-\frac{i k}{\kappa}\right)e^{-i k r_1}=2d\,e^{\kappa r_1},$$

$$a\left(1-\frac{i k}{\kappa}\right)e^{i k r_1}+b\left(1+\frac{i k}{\kappa}\right)e^{-i k r_1}=2c\,e^{-\kappa r_1},$$

$$2d\,e^{\kappa r_2}=f\left(1+\frac{i k'}{\kappa}\right)e^{i k' r_2}+g\left(1-\frac{i k'}{\kappa}\right)e^{-i k' r_2},$$

$$2c\,e^{-\kappa r_2}=f\left(1-\frac{i k'}{\kappa}\right)e^{i k' r_2}+g\left(1+\frac{i k'}{\kappa}\right)e^{-i k' r_2}.$$

Elimination von c und d ergibt mit den Definitionen

$$\Delta=r_2-r_1; \qquad \alpha=1+\frac{i k}{\kappa}; \qquad \gamma=1+\frac{i k'}{\kappa}$$

die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} a\alpha e^{ikr_1}+b\alpha^* e^{-ikr_1} &= e^{-\kappa\Delta}(f\gamma e^{ik'r_2}+g\gamma^* e^{-ik'r_2}) \\ a\alpha^* e^{ikr_1}+b\alpha e^{-ikr_1} &= e^{\kappa\Delta}(f\gamma^* e^{ik'r_2}+g\gamma e^{-ik'r_2}). \end{aligned}\right\} \tag{22.11}$$

Die Durchdringungswahrscheinlichkeit der Potentialschwelle für eine von außen kommende Kugelwelle (mit $l=0$) ergibt sich mit $a=0$ durch Elimination von f:

$$\begin{aligned} b(\alpha^*\gamma^* e^{\kappa\Delta}-\alpha\gamma e^{-\kappa\Delta}) &= g[(\gamma^*)^2-\gamma^2]\, e^{-i(k'r_2-kr_1)} \\ &= -2i\frac{k'}{\kappa}\, g\, e^{-i(k'r_2-kr_1)}, \end{aligned}$$

$$\left|\frac{b}{g}\right|^2 = \frac{4\left(\frac{k'}{\kappa}\right)^2}{|\alpha^*\gamma^* e^{\kappa\Delta}-\alpha\gamma e^{-\kappa\Delta}|^2}.$$

Mit der Definition

$$\alpha\gamma=\rho\, e^{i\varphi}$$

folgt

$$\begin{aligned} |\alpha^*\gamma^* e^{\kappa\Delta}-\alpha\gamma e^{-\kappa\Delta}|^2 &= \rho^2(e^{-i\varphi}e^{\kappa\Delta}-e^{i\varphi}e^{-\kappa\Delta})(e^{i\varphi}e^{\kappa\Delta}-e^{-i\varphi}e^{-\kappa\Delta}) \\ &= \rho^2(e^{2\kappa\Delta}+e^{-2\kappa\Delta}-2\cos 2\varphi). \end{aligned}$$

Für $\kappa\Delta\gg 1$ spielt nur der erste Term eine wesentliche Rolle. Damit wird die Durchdringungswahrscheinlichkeit der Potentialschwelle von außen:

$$\left|\frac{b}{g}\right|^2 \approx \left(\frac{2k'}{\rho\kappa}\right)^2 e^{-2\kappa\Delta} = \frac{4E\left(1-\frac{E}{V_1}\right)}{V_0+V_1}\, e^{-2\kappa\Delta}. \tag{22.12}$$

Zur Berechnung der Durchdringungswahrscheinlichkeit der Potentialschwelle für eine von innen kommende Kugelwelle muß man in (22.11) $g=0$ annehmen und b eliminieren:

$$a[\alpha^2-(\alpha^*)^2]\, e^{i(kr_1-k'r_2)} = f(\alpha\gamma e^{-\kappa\Delta}-\alpha^*\gamma^* e^{\kappa\Delta}).$$

Mit der Annahme $\kappa\Delta\gg 1$ ergibt sich wie oben

$$\left|\frac{f}{a}\right|^2 \approx \left(\frac{2k}{\rho\kappa}\right)^2 e^{-2\kappa\Delta} = \frac{4\left(1-\frac{E}{V_1}\right)(V_0+E)}{V_0+V_1}\, e^{-2\kappa\Delta}. \tag{22.13}$$

Die Vorfaktoren in (22.12) und (22.13) sind von der Größenordnung Eins, wenn man sinnvolle kernphysikalische Zahlen für die Energien einsetzt. Dann ist näherungsweise

$$\left|\frac{b}{g}\right|^2 \approx \left|\frac{f}{a}\right|^2 \approx e^{-2\kappa\Delta}.$$

$\Delta=r_2-r_1$ ist die „Dicke" der Potentialschwelle, κ eine Funktion ihrer Höhe. Maßgebend für die Durchdringungswahrscheinlichkeit ist das Produkt $\Delta\sqrt{V_1-E}$; V_0 beeinflußt nur den Vorfaktor.

Der Ausdruck $\exp(-2\kappa\Delta)$ wird „GAMOW-Faktor“ genannt. Kernphysikalische Anwendungen s. § 44 und § 48.

Jetzt betrachten wir den Fall beliebiger l. Die Differentialgleichung (22.1) hat die Form

$$u'' + \left(k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right) u = 0 \tag{22.14}$$

mit

$$k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2\mu(E - U_0)}\,.$$

Durch die Substitution

$$u_{(r)} = \sqrt{r}\, v_{(r)}$$

kann man (22.14) in die BESSELsche Differentialgleichung überführen:

$$v'' + \frac{v'}{r} + \left[k^2 - \left(\frac{l+\frac{1}{2}}{r}\right)^2\right] v = 0\,. \tag{22.15}$$

Im folgenden müssen die Fälle $k^2 > 0$ und $k^2 < 0$ unterschieden werden.

a) Sei zunächst der Fall $k^2 > 0$ betrachtet. Dann sind die Lösungen von (22.15) die halbzahligen BESSEL-Funktionen:

$$v_{(r)} = A' J_{l+\frac{1}{2}}(k r) + B' J_{-(l+\frac{1}{2})}(k r)\,, \tag{22.16}$$

wobei allgemein gilt

$$J_p(k r) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!\,\Gamma_{(p+\nu+1)}} \left(\frac{k r}{2}\right)^{p+2\nu}.$$

Nun ist bekanntlich

$$\Gamma_{(\nu+\frac{1}{2})} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots (2\nu-1)}{2^\nu} \sqrt{\pi}\,.$$

Also lassen sich die *halbzahligen* BESSEL-Funktionen nach elementaren Umrechnungen auf die Form bringen

$$J_{l+\frac{1}{2}}(k r) = \sqrt{\frac{2 k r}{\pi}}\,(2 k r)^l \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu (l+\nu)!}{\nu!\,[2(l+\nu)+1]!} (k r)^{2\nu}$$

$$J_{-(l+\frac{1}{2})}(k r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k r}}\,(2 k r)^{-l} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu (\nu-l-1)!}{\nu!\,[2(\nu-l)-1]!} (k r)^{2\nu}.$$

Zweckmäßig definiert man jetzt die „sphärischen BESSEL-Funktionen“ durch

$$j_l(k r) = \sqrt{\frac{\pi}{2 k r}}\, J_{l+\frac{1}{2}}(k r)$$

sowie die „sphärischen NEUMANN-Funktionen“ durch

$$n_l(k r) = (-1)^{l+1} \sqrt{\frac{\pi}{2 k r}}\, J_{-(l+\frac{1}{2})}(k r)\,.$$

Der Vorteil dieser Definitionen liegt auf der Hand: Wie man leicht über die angegebenen Reihenentwicklungen nachrechnen kann, lassen sich die j_l und n_l durch trigonometrische Funktionen ausdrücken. So findet man etwa

$$j_0 = \frac{\sin kr}{kr}$$

$$j_1 = \frac{\sin kr}{(kr)^2} - \frac{\cos kr}{kr}$$

$$j_2 = \left[\frac{3}{(kr)^3} - \frac{1}{kr}\right] \sin kr - 3\frac{\cos kr}{(kr)^2} \quad \text{usw.}$$

Allgemeine Rekursionsformel:

$$j_{l+1}(kr) = \frac{2l+1}{kr} j_l(kr) - j_{l-1}(kr).$$

Ferner gilt für die Differentialquotienten die Beziehung

$$\frac{d}{d(kr)} j_l(kr) = j_{l-1}(kr) - \frac{l+1}{kr} j_l(kr).$$

Auf analoge Weise errechnet man

$$n_0 = -\frac{\cos kr}{kr}$$

$$n_1 = -\frac{\cos kr}{(kr)^2} - \frac{\sin kr}{kr}$$

$$n_2 = -\left[\frac{3}{(kr)^3} - \frac{1}{kr}\right] \cos kr - 3\frac{\sin kr}{(kr)^2} \quad \text{usw.}$$

Die j_l und n_l haben für $kr \to \infty$ die asymptotische Entwicklung

$$j_{l(kr)} \to \frac{1}{kr} \cos\left[kr - \frac{\pi}{2}(l+1)\right]$$

$$n_{l(kr)} \to \frac{1}{kr} \sin\left[kr - \frac{\pi}{2}(l+1)\right].$$

Der betrachtete Fall $k^2 > 0$, d.h. positive kinetische Energie des Teilchens, wird im allgemeinen in der Nähe des Kraftzentrums, also für $r \approx 0$, erfüllt sein. Für kleine r ist $J_{-(l+\frac{1}{2})} \sim r^{-(l+\frac{1}{2})}$, also $u_{(r)} \sim r^{-l}$. Wegen der Randbedingung, daß $R_{(r)} = v_{(r)}/\sqrt{r}$ an der Stelle $r = 0$ endlich bleiben soll, muß in (22.16) $B' = 0$ gefordert werden. Dann wird

$$u_l = A' \sqrt{\frac{2k}{\pi}}\, r\, j_l(kr)$$

oder

$$R_l = A\sqrt{k}\, j_l(k r). \qquad (22.17)$$

Dies ist die Lösung der Radialgleichung im „Innenraum".

b) Jetzt sei $k^2 < 0$. Dann ist (22.15) keine BESSELsche Differentialgleichung mehr, man kann sie aber durch die Substitution

$$\rho = i r, \qquad k^2 = -\kappa^2$$

wieder auf die Form der BESSELschen Differentialgleichung bringen:

$$\frac{d^2 v}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dv}{d\rho} + \left[\kappa^2 - \left(\frac{l+\frac{1}{2}}{\rho}\right)^2\right] v = 0.$$

In Analogie zu (22.16) lautet die Lösung

$$v(\rho) = C' J_{l+\frac{1}{2}}(\kappa\rho) + D' J_{-(l+\frac{1}{2})}(\kappa\rho),$$

wobei für beliebiges p wegen $\rho = ir$ gilt

$$J_p(\kappa\rho) = i^p \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!\, \Gamma_{(p+\nu+1)}} \left(\frac{\kappa\rho}{2}\right)^{p+2\nu}.$$

Die Lösung läßt sich wieder durch die sphärischen BESSEL- und NEUMANN-Funktionen ausdrücken:

$$v_l(\kappa\rho) = \sqrt{\frac{2\kappa\rho}{\pi}}\,[C' j_l(\kappa\rho) + (-1)^{l+1} D' n_l(\kappa\rho)]$$

und daraus

$$R_l = \frac{u_l}{r} = \frac{v_l}{\sqrt{r}} = \sqrt{\frac{2i\kappa}{\pi}}\,[C' j_l(i\kappa r) + (-1)^{l+1} D' n_l(i\kappa r)].$$

Dies ist der Radialteil der ψ-Funktion im „Außenraum", also gilt als Randbedingung die Forderung $R_l = 0$ für $r \to \infty$. Damit dies erfüllt werden kann, muß man das Verhältnis der Konstanten D' und C' zu

$$\frac{D'}{C'} = i(-1)^{l+1}$$

wählen, also wird mit der Abkürzung $C = C'\sqrt{\frac{2i}{\pi}}$

$$R_l = \frac{u_l}{r} = C\sqrt{\kappa}\,[j_l(i\kappa r) + i\, n_l(i\kappa r)]. \qquad (22.18)$$

Die ersten drei Funktionen lauten explizit:

$$R_0 = C\sqrt{\kappa}\left[\frac{\sin(i\kappa r)}{i\kappa r} - i\frac{\cos(i\kappa r)}{i\kappa r}\right] = -C\sqrt{\kappa}\frac{e^{-\kappa r}}{\kappa r}$$

$$R_1 = C\sqrt{\kappa}\left[\frac{\sin(i\kappa r)}{-(\kappa r)^2} - \frac{\cos(i\kappa r)}{i\kappa r} - i\frac{\cos(i\kappa r)}{-(\kappa r)^2} - i\frac{\sin(i\kappa r)}{i\kappa r}\right]$$

$$= C\sqrt{\kappa}\, i\left[\frac{1}{(\kappa r)^2} + \frac{1}{\kappa r}\right] e^{-\kappa r}$$

$$R_2 = C\sqrt{\kappa}\left[\frac{3}{(\kappa r)^3} + \frac{3}{(\kappa r)^2} + \frac{1}{\kappa r}\right] e^{-\kappa r}.$$

Wie man sieht, ist die Randbedingung $R_l \to 0$ für $r \to \infty$ erfüllt (jedenfalls in den angegebenen Fällen ist dies direkt evident).

Als Beispiel wollen wir wieder das Kastenpotential (s. Fig. 22.2) betrachten. Im Gebiet I ist $E - U_0 > 0$, also gilt die Lösung (22.17); im Gebiet II ist $E - U_0 < 0$, also gilt die Lösung (22.18). Es ist also

$$\text{in Gebiet I:} \quad R_{\mathrm{I}(r)} = A\sqrt{k}\, j_l(k r),$$

$$\text{in Gebiet II:} \quad R_{\mathrm{II}(r)} = C\sqrt{\kappa}\,[j_l(i\kappa r) + i\, n_l(i\kappa r)].$$

Die Anschlußbedingungen an der Stelle $r = b$ liefern:

$$\left[\frac{d}{dr}\ln(r\, j_{l\,(k r)})\right]_{r=b} = \left[\frac{d}{dr}\ln[r(j_{l\,(i\kappa r)} + i\, n_{l\,(i\kappa r)})]\right]_{r=b}.$$

Aus dieser Beziehung ergeben sich Zusammenhänge zwischen k, κ und b für jedes vorgegebene l, aus denen die Eigenwerte E_{nl} in Abhängigkeit von V_0 und b gefunden werden können. Für die kleinsten l-Werte ergibt sich explizit:

$$\left.\begin{aligned} l=0:&\quad \operatorname{cotg}(k b) + \frac{\kappa}{k} = 0 \quad [\text{vgl. } (22.10)] \\ l=1:&\quad k b \operatorname{cotg}(k b) - 1 - \frac{k^2}{\kappa^2}(1 + \kappa b) = 0 \\ l=2:&\quad \frac{1}{1 - k b \operatorname{cotg}(k b)} - \frac{3}{k^2 b^2}\left(1 + \frac{k^2}{\kappa^2}\right) - \frac{1}{1 + \kappa b} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (22.19)$$

Dabei ist $k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2\mu(E - U_0)}$ (innen) und $\kappa = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2\mu(U_0 - E)}$ (außen). Die Lösung dieser transzendenten Gleichungen erfolgt am besten zeichnerisch, ähnlich wie anhand von Fig. 22.3 beschrieben wurde. Anwendung auf kernphysikalische Probleme s. § 33.

d) Lösung für $U_{(r)} = -V_0 + \gamma^2 r^2$

Ein solches Potential (Parabelpotential) (s. Fig. 22.5) kennzeichnet den räumlichen harmonischen Oszillator. Die Differentialgleichung (22.1) lautet

damit
$$\frac{d^2u}{dr^2}+\left[\frac{2\mu}{\hbar^2}(V_0+E-\gamma^2 r^2)-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]u=0. \qquad (22.20)$$

Die Größe γ^2 kann durch die klassische Oszillatorfrequenz ausgedrückt werden:
$$\gamma^2=\tfrac{1}{2}\mu\omega^2.$$

Wir betrachten zunächst das asymptotische Verhalten: Für $r\to 0$ ist nach (22.2)
$$u_{(r)}\sim r^{l+1}.$$

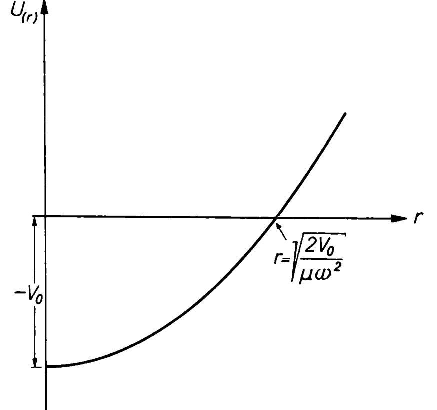


Fig. 22.5. Parabelpotential des räumlichen harmonischen Oszillators

Für $r\to\infty$ ergibt sich als Näherung für die Differentialgleichung aus (22.20):
$$\frac{d^2u}{dr^2}-\frac{2\mu}{\hbar^2}\gamma^2 r^2 u=0.$$

Mit dem Lösungsansatz
$$u_{(r)}=u_0\exp\left(-\frac{B}{2}r^2\right)$$

läßt sich diese asymptotisch gültige Gleichung befriedigen, wenn man setzt
$$B=\frac{\gamma}{\hbar}\sqrt{2\mu}=\frac{\mu\omega}{\hbar}.$$

Um (22.20) für alle r zu lösen, spaltet man sinnvollerweise zunächst das asymptotische Verhalten ab:
$$u_{(r)}=r^{l+1}\exp\left(-\frac{B}{2}r^2\right)v_{(r)}.$$

Einsetzen in (22.20) ergibt nach Multiplikation mit v/u
$$\frac{d^2v}{dr^2}+2\frac{dv}{dr}\left(\frac{l+1}{r}-Br\right)-Bv\left[2l+3-\frac{2}{\hbar\omega}(V_0+E)\right]=0.$$

Zur Abkürzung werden definiert:
$$C=l+\tfrac{3}{2},$$
$$4A=2l+3-\frac{2}{\hbar\omega}(V_0+E).$$

Damit lautet die Differentialgleichung für $v_{(r)}$:
$$\frac{d^2v}{dr^2}+\frac{dv}{dr}\left(\frac{2C-1}{r}-2Br\right)-4ABv=0.$$

Zur Lösung wird eine Potenzreihe angesetzt:

$$v_{(r)} = \sum_k \alpha_k r^k .$$

Einsetzen ergibt eine Rekursionsformel für die α_k:

$$(k+2)(k+1)\alpha_{k+2} + (k+2)\alpha_{k+2}(2C-1) - 2k\alpha_k B - 4AB\alpha_k = 0,$$

$$\frac{\alpha_{k+2}}{\alpha_k} = B \frac{A + \frac{k}{2}}{\left(1+\frac{k}{2}\right)\left(C+\frac{k}{2}\right)} .$$

Damit wird

$$v_{(r)} = \alpha_0 \left[1 + \frac{A}{C}(Br^2) + \frac{A(A+1)}{C(C+1)}\frac{(Br^2)^2}{2!} + \frac{A(A+1)(A+2)}{C(C+1)(C+2)}\frac{(Br^2)^3}{3!} + \cdots\right] +$$
$$+ \alpha_1 r \left[1 + \frac{A+\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}(C+\frac{1}{2})}(Br^2) + \frac{(A+\frac{1}{2})(A+\frac{3}{2})}{\frac{3}{2}(C+\frac{1}{2})\frac{5}{2}(C+\frac{3}{2})}(Br^2)^2 + \cdots\right].$$

Abgekürzt:

$$v_{(r)} = \alpha_0 F_{(A,C,Br^2)} + \alpha_1 r\, G_{(A,C,Br^2)} .$$

Also wird (22.20) gelöst durch die Funktion

$$u_{(r)} = r^{l+1} \exp\left(-\frac{B}{2} r^2\right)\left[\alpha_0 F_{(A,C,Br^2)} + \alpha_1 r\, G_{(A,C,Br^2)}\right].$$

Damit $u \to 0$ für $r \to \infty$, müssen F und G bei endlichen Potenzen von Br^2 abbrechen. Für F bedeutet dies, daß A gleich einer negativen ganzen Zahl $-i$, für G, daß $A = -\frac{2i+1}{2}$ sein muß. Da nicht beide Forderungen gleichzeitig erfüllt sein können, andererseits aber $\alpha_0 \neq 0$ wegen des asymptotischen Verhaltens bei $r=0$ gefordert werden muß, ist $\alpha_1 = 0$ und

$$-4i = 2l + 3 - \frac{2}{\hbar\omega}(V_0 + E).$$

Daraus bestimmen sich die Energieeigenwerte zu

$$E_{il} = -V_0 + \hbar\omega(2i + l + \tfrac{3}{2}) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots), \tag{22.21}$$

mit der Definition $n = 2i + l$ ergibt sich

$$E_n = -V_0 + \hbar\omega(n + \tfrac{3}{2}) \tag{22.22}$$

[*nicht*: $E_n = -V_0 + \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ wie beim eindimensionalen harmonischen Oszillator].

Der niedrigste Energiezustand (Grundzustand) liegt bei ($n=0$)

$$E_0 = -V_0 + \tfrac{3}{2}\hbar\omega .$$

Er ist einfach (nicht entartet), da $n=0$ nur durch die Kombination $l=0$ und $i=0$ erreicht werden kann.

Der erste angeregte Zustand hat die Energie

$$E_1 = -V_0 + \tfrac{5}{2}\hbar\omega$$

und kann nur für $i=0$, $l=1$ zustande kommen. Er ist dreifach entartet, da die Quantenzahl m noch die Werte $+1$, 0 und -1 annehmen kann [vgl. (21.9)]. Eine Fortsetzung dieser Überlegungen führt zu den in Tabelle 22.1 zusammengestellten Ergebnissen.

Zu geradzahligen n gehören also nur geradzahlige l, zu ungeradzahligen n nur ungeradzahlige l.

Tabelle 22.1. *Energiezustände des räumlichen harmonischen Oszillators*

Energieeigenwert	i	l	Entartungsgrad	
$E_0 = -V_0 + \frac{3}{2}\hbar\omega$	0	0	1	
$E_1 = -V_0 + \frac{5}{2}\hbar\omega$	0	1	3	
$E_2 = -V_0 + \frac{7}{2}\hbar\omega$	0	2	5	6
	1	0	1	
$E_3 = -V_0 + \frac{9}{2}\hbar\omega$	0	3	7	10
	1	1	3	
$E_4 = -V_0 + \frac{11}{2}\hbar\omega$	0	4	9	15
	1	2	5	
	2	0	1	
$E_5 = -V_0 + \frac{13}{2}\hbar\omega$	0	5	11	21
	1	3	7	
	2	1	3	
usw.				

Die gesamte ψ-Funktion des Problems lautet

$$\psi_{n,l,m} = \text{const} \cdot r^l \exp\left(-\frac{B}{2} r^2\right) F_{\left(\frac{l-n}{2},\, l+\frac{3}{2},\, B r^2\right)} Y_{l,m}(\vartheta,\varphi)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} \qquad (22.23)$$

mit

$$F_{(A,C,x)} = 1 + \frac{A}{C}x + \frac{A(A+1)}{C(C+1)}\frac{x^2}{2!} + \frac{A(A+1)(A+2)}{C(C+1)(C+2)}\frac{x^3}{3!} + \cdots .$$

Diese Funktionen $F_{(A,C,x)}$ werden als „konfluente hypergeometrische Funktionen" bezeichnet.

Kernphysikalische Anwendungen s. § 32.

§ 23. Physikalische Größen als quantenmechanische Operatoren

a) Operatoren

Den physikalischen Größen wie Ort des Teilchens, Impuls, Drehimpuls usw. werden quantenmechanische Operatoren zugeordnet, die auf die ψ-Funktion des Systemzustandes wirken. Einige Operatoren wurden bereits

erwähnt (s. §20):

$$\vec{r}_{\text{op}} = \vec{r},$$

$$\vec{p}_{\text{op}} = \frac{\hbar}{i} \operatorname{grad},$$

$$H_{\text{op}} = \frac{1}{2m} p_{\text{op}}^2 + U_{(x,y,z)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U_{(x,y,z)}.$$

$$E_{\text{op}} = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t},$$

$$(L_z)_{\text{op}} = \frac{\hbar}{i} [\vec{r} \times \operatorname{grad}]_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

$$(L^2)_{\text{op}} = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{\partial}{\partial\vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right].$$

Wir wollen in diesem Paragraphen die Eigenschaften eines allgemeinen Operators A untersuchen, der einer physikalischen Größe zugeordnet sein soll, so daß die Meßwerte der Größe (z.B. Ort, Impuls, Energie, Drehimpuls o. a.) durch die Eigenwerte von A dargestellt werden. Dazu postulieren wir:

1. A soll ein linearer Operator sein, d.h. bei konstanten c_1 und c_2 soll gelten

$$A(c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2) = c_1 A \psi_1 + c_2 A \psi_2.$$

Ein Differentialoperator hat diese Eigenschaft, nicht aber z.B. die Quadratwurzel.

2. A soll eine physikalische, meßbare Größe darstellen, darum sollen die Eigenwerte des Operators reelle Zahlen sein.

Während das kommutative Gesetz der Addition für zwei Operatoren gültig ist, sind Operatoren bezüglich der Multiplikation nicht notwendig kommutativ. So ist etwa

$$(p_x x)\psi = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} (x\psi) = \frac{\hbar}{i} \left(\psi + x \frac{\partial \psi}{\partial x} \right),$$

$$(x p_x)\psi = \frac{\hbar}{i} x \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

also

$$p_x x - x p_x = \frac{\hbar}{i}, \tag{23.1}$$

während andererseits z.B.

$$p_x y - y p_x = 0$$

ist. Wenn für zwei Operatoren die Beziehung

$$[A,B]=AB-BA=0 \tag{23.2}$$

gültig ist, sagt man, die Operatoren „kommutieren". Wie sich ergeben wird, sind die Kommutationseigenschaften der Operatoren ein wichtiges Untersuchungsobjekt der Quantenmechanik.

b) Erwartungswert

Der „*Erwartungswert*" einer physikalischen Meßgröße ist der bei vielen Messungen der Größe auftretende Mittelwert*. Zum Beispiel erhält man (im eindimensionalen Fall) den mittleren Ort $\bar{x}$ eines Teilchens, indem man x mit der Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von x, also $|\psi|^2 dx$, multipliziert und über alle x summiert bzw. integriert:

$$\bar{x}=\int x\,|\psi|^2\,dx=\int \psi^* x\,\psi\,dx$$

[dabei ist die Normierung der ψ-Funktion nach (20.11) vorausgesetzt]. Allgemein erhält man den Erwartungswert der durch den Operator A dargestellten Größe durch Ausrechnung des Integrals

$$\bar{A}=\int \psi^* A\,\psi\,d\tau. \tag{23.3}$$

Nach der zweiten Forderung muß $\bar{A}$ reell sein, also $\bar{A}=\bar{A}^*$, oder

$$\int \psi^* A\,\psi\,d\tau=\int \psi\,(A\,\psi)^*\,d\tau. \tag{23.4}$$

Operatoren, die die Eigenschaft

$$\int f^* A\,g\,d\tau=\int (A\,f)^*\,g\,d\tau \tag{23.5}$$

haben, heißen hermitische Operatoren. Dabei sind f und g beliebige, quadratisch integrierbare Funktionen, sie müssen also bei Annäherung an die Integrationsgrenzen hinreichend schnell verschwinden. Quantenmechanische ψ-Funktionen besitzen wegen (20.11) diese Eigenschaft. Aus dem Vergleich von (23.4) und (23.5) sieht man, daß physikalische Größen durch hermitische Operatoren dargestellt werden müssen.

Sei weiterhin der zum (nicht notwendig hermitischen) Operator B „adjungierte" Operator B^+ definiert durch

$$\int f^* B\,g\,d\tau=\int (B^+ f)^*\,g\,d\tau, \tag{23.6}$$

dann sieht man, daß hermitische Operatoren „selbstadjungiert" sind, denn Vergleich von (23.5) mit (23.6) liefert

$$A^+=A.$$

---

* Gemeint ist der Mittelwert im Sinne der Statistik. Nur unter bestimmten Voraussetzungen ist die Streuung um den Mittelwert Null, s. § 23 d 3 und 4.

c) Eigenfunktionen und Eigenwerte

Die einzelnen möglichen Meßwerte der durch A dargestellten Größe seien durch die reellen Zahlen A_k („Eigenwerte“) gekennzeichnet, der dem Wert A_k entsprechende Zustand des physikalischen Systems durch ψ_k („Eigenfunktion“). Wenn das System im Zustand ψ_k ist, wird die Anwendung des Operators A auf ψ_k den Eigenwert A_k liefern. Die Gleichung zum Auffinden der Eigenwerte und -funktionen zum Operator A lautet also

$$A\,\psi_k = A_k\,\psi_k\,.$$

Als einfaches Beispiel zur Lösung eines Eigenwertproblems betrachten wir die Eigenwertgleichung des Operators L_z:

$$(L_z)_{op}\,\psi_m = \frac{\hbar}{i}\,\frac{\partial\psi_m}{\partial\varphi} = A_m\,\psi_m\,,$$

wobei A_m eine Konstante der Dimension eines Drehimpulses ist. Als Lösung erhält man

$$\psi_m = C\exp\left(\frac{i}{\hbar}\,A_m\,\varphi\right) \quad \text{mit} \quad C = \text{const, unabhängig von } \varphi.$$

Nach den zu Gleichung (21.6) angestellten Überlegungen müssen wegen der Randbedingungen die Eigenwerte die Form haben

$$A_m = m\,\hbar$$

mit m ganzzahlig. Die Normierungsforderung ergibt $C=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}$. Also lautet die zum Eigenwert $m\hbar$ des Operators L_z gehörige Eigenfunktion

$$\psi_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{i\,m\,\varphi}.$$

Entsprechend erhält man für den Operator L^2 die Eigenwertgleichung

$$(L^2)_{\text{op}}\,\psi_l = B_l\,\psi_l\,.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung, die mit (21.5) identisch ist, ist (21.10):

$$\psi_{l,m} = Y_{l,m}\,; \qquad B_l = \hbar^2\,l(l+1)\,.$$

Auch die zeitunabhängige SCHRÖDINGER-Gleichung (21.2) kann als Aufforderung betrachtet werden, die Eigenfunktionen und Eigenwerte zum HAMILTON-Operator, also die Energieeigenfunktionen und -eigenwerte, zu bestimmen.

d) Allgemeine Zusammenhänge

Wir wollen hier einige allgemeine Sätze herleiten:

1. Sind X und Y zwei hermitische Operatoren, dann sind $X+iY$ und $X-iY$ zueinander adjungiert.

Beweis:
$$\int f^*(X+iY)\,g\,d\tau=\int f^*\,X g\,d\tau+i\int f^*\,Y g\,d\tau$$
$$\int [(X-iY)f]^*\,g\,d\tau=\int (Xf)^*\,g\,d\tau+i\int (Yf)^*\,g\,d\tau\,.$$

Nach (23.5) sind die rechten Seiten gleich, womit der Satz bewiesen ist.

2. Zwei Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten eines hermitischen Operators A sind orthogonal, d.h. für $n \neq k$ gilt $\int \psi_n^* \psi_k d\tau = 0$.

Beweis: Sei $k \neq n$. Dann gilt
$$A\psi_k = A_k \psi_k\,,$$
$$(A\psi_n)^* = A_n \psi_n^*\,.$$

Die obere Gleichung wird mit ψ_n^* von links, die untere mit ψ_k von rechts multipliziert. Dann werden beide Gleichungen subtrahiert und die Differenz über die Variablen integriert:
$$\int [\psi_n^* A\psi_k - (A\psi_n)^* \psi_k]\,d\tau = (A_k - A_n)\int \psi_n^* \psi_k\,d\tau\,.$$

Die linke Seite verschwindet aufgrund von (23.4); da $A_k \neq A_n$ vorausgesetzt war *, muß also gelten
$$\int \psi_n^* \psi_k\,d\tau = 0\,,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Man kann die Funktionen ψ_n immer so normieren, daß
$$\int |\psi_n|^2\,d\tau = 1$$

ist [vgl. (20.11)]; beide Gleichungen lassen sich zusammenfassen zur „Orthonormalitätsrelation"
$$\boxed{\int \psi_n^* \psi_k\,d\tau = \delta_{nk} = \begin{cases} 1 & \text{für } n = k \\ 0 & \text{für } n \neq k \end{cases}} \qquad (23.7)$$

(δ = „KRONECKER-Symbol").

Man kann zeigen, daß das System der Eigenfunktionen zu einem hermitischen Operator auch vollständig ist, d.h., daß man jede beliebige Zustandsfunktion Ψ des Systems nach den Eigenfunktionen ψ_n eines beliebigen hermitischen Operators entwickeln kann:
$$\Psi = \sum_n c_n \psi_n$$

[vgl. z.B. den zeitunabhängigen Teil von (20.12) als Entwicklung nach Eigenfunktionen des Impulsoperators]. Die Entwicklungskoeffizienten c_n sind komplexe Zahlen.

---

* Auch im Fall der Entartung (d.h. $k \neq n$, aber $A_k = A_n$) gilt die Behauptung. Genaueres s. D. J. BLOCHINZEW, Grundlagen der Quantenmechanik, Harri Deutsch, Frankfurt a. M. 1962, § 21 und Anhang II.

3. Gleichzeitige Messung zweier physikalischer Größen mit reproduzierbarem Meßresultat ist nur möglich, wenn die zugehörigen Operatoren kommutieren *.

Beweis: Damit in einem Zustand des Systems, der z.B. durch die Funktion ψ_i beschrieben sei, beide physikalische Größen einen exakt reproduzierbaren Meßwert liefern, muß ψ_i Eigenfunktion zu beiden Operatoren (A und B) sein, also

$$\left.\begin{aligned} A\psi_i &= A_i\psi_i \\ B\psi_i &= B_i\psi_i . \end{aligned}\right\} \tag{23.8}$$

Im allgemeinen ist dies nicht der Fall, so daß z.B. der Operator B dann, wenn das System im i-ten Eigenzustand des Operators A ist, nicht einen eindeutigen Wert hat, sondern

$$B\psi_i = \sum_k c_{ki}\psi_k . \tag{23.9}$$

Anwendung von A auf diese Gleichung ergibt

$$AB\psi_i = \sum_k c_{ki} A_k \psi_k . \tag{23.10}$$

Andererseits ist

$$BA\psi_i = BA_i\psi_i = A_i B\psi_i = A_i \sum_k c_{ki}\psi_k . \tag{23.11}$$

Wenn $c_{ki} = B_i\delta_{ki}$ ist, also $c_{ii} = B_i$ und $c_{ki} = 0$ (für $k \neq i$), dann sind (23.8) und (23.9) identisch und

$$(AB - BA)\psi_i = 0,$$

d.h. die Operatoren kommutieren.

Wenn andererseits die Operatoren kommutieren, folgt aus (23.10) und (23.11)

$$\sum_k c_{ki}(A_k - A_i)\psi_k = 0 .$$

Wegen $A_k \neq A_i$ für $k \neq i$ folgt $c_{ki} = B_i\delta_{ki}$, somit vereinfacht sich (23.9) zu (23.8). Daher sind zwei physikalische Größen dann und nur dann gleichzeitig mit reproduzierbarem Resultat meßbar, wenn ihre Operatoren kommutieren.

Beispiel: Wenn das Potential in der SCHRÖDINGER-Gleichung kugelsymmetrisch ist, also $U = U_{(r)}$, kommutieren die Operatoren H, L^2 und L_z, also haben diese Operatoren einen Satz gleicher Eigenfunktionen, ihre Eigenwerte sind gleichzeitig meßbar. Die Zustandsfunktion des Systems kann dann durch die zugehörigen Quantenzahlen charakterisiert werden [vgl. z.B. (22.23)].

* Wenn die Operatoren nicht kommutieren, gilt eine Unschärferelation. Siehe dazu § 23d 4.

4. Nicht alle Operatoren kommutieren. Zum Beispiel gilt mit (23.1)

$$[p_x, x] = \frac{\hbar}{i}; \qquad [p_x, y] = [p_x, z] = 0;$$

$$[p_y, y] = \frac{\hbar}{i}; \qquad [p_y, x] = [p_y, z] = 0;$$

$$[p_z, z] = \frac{\hbar}{i}; \qquad [p_z, x] = [p_z, y] = 0.$$

Allgemein: Die Symbole X und Y mögen für p_x oder x (bzw. p_y oder y bzw. p_z oder z) stehen. Wie man durch Einsetzen sofort bestätigt, gelten die Relationen

$$[p_x, X] = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial X}{\partial x}; \qquad [p_x, Y] = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Durch Addition beider Gleichungen erhält man

$$[p_x, X+Y] = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial(X+Y)}{\partial x};$$

für den Operator (XY) findet man

$$\begin{aligned}[p_x, XY] &= p_x XY - XYp_x = (p_x X)\,Y - (X p_x)\,Y + X(p_x Y) - X(Y p_x)\\ &= \frac{\hbar}{i}\left(\frac{\partial X}{\partial x}Y + X\frac{\partial Y}{\partial x}\right) = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial(XY)}{\partial x}.\end{aligned}$$

Damit gilt für alle Funktionen $A_{(p_x, x)}$, die aus Summen von Produkten aus p_x und x bestehen, die Kommutationsregel

$$[p_x, A] = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial A}{\partial x}.$$

Ebenso findet man

$$[x, A] = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial A}{\partial p_x}.$$

Entsprechende Gleichungen gelten für die Variablenpaare p_y, y und p_z, z.

Eine Konsequenz der Nichtvertauschbarkeit der Operatoren p_x und x ist die HEISENBERGsche Unschärferelation. Man leitet sie am einfachsten her, indem man das Hilfsintegral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} |\xi(x-\bar{x})\,\psi + i(p_x - \bar{p}_x)\,\psi|^2\,dx \geqq 0$$

untersucht. Darin ist ξ eine reelle Hilfsvariable, $\bar{x}$ und $\bar{p}_x$ sind die Erwartungswerte von Ort und Impuls [vgl. (23.3)]. Werden mit

$$\Delta x = x - \bar{x} \quad \text{und} \quad \Delta p_x = p_x - \bar{p}_x$$

die Abweichungen der Meßwerte vom Erwartungswert bezeichnet, so folgt

$$I=\xi^2\overline{(\Delta x^2)}+i\xi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[(x-\bar{x})^*\psi^*(p_x-\bar{p}_x)\psi-(p_x-\bar{p}_x)^*\psi^*(x-\bar{x})\psi]\,dx+\overline{(\Delta p_x^2)}.$$

Das mittlere Integral läßt sich nach (23.5) wegen der Hermitizität der Operatoren p_x und x umformen zu

$$i\xi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi^*[(x-\bar{x})(p_x-\bar{p}_x)-(p_x-\bar{p}_x)(x-\bar{x})]\,\psi\,dx$$
$$=i\xi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x\,p_x-p_x\,x)\,\psi\,dx=-\hbar\xi;$$

dabei sind die Vertauschungsrelation (23.1) und die Orthonormalitätsrelation (23.7) benutzt. Das Integral I wird damit zu

$$I=\xi^2\overline{(\Delta x^2)}-\hbar\xi+\overline{(\Delta p_x^2)}\equiv A\xi^2-B\xi+C\geqq 0.$$

Damit der rechts vom Gleichheitszeichen stehende Ausdruck für keinen Wert von ξ reelle Wurzeln hat, muß $4AC\geqq B^2$ sein, also

$$\overline{(\Delta x^2)}\,\overline{(\Delta p_x^2)}\geqq\frac{\hbar^2}{4}.$$

Dies ist die HEISENBERGsche Unschärferelation *, die aus der Nichtvertauschbarkeit der Operatoren p_x und x folgt. Ähnliche Relationen gelten für die mittleren Schwankungsquadrate der Meßwerte aller Größen, deren Operatoren nicht kommutieren.

Wenn man durch ein Meßverfahren den möglichen Wertebereich einer Meßgröße beschränkt (z.B. den Ort eines Teilchens durch eine in den Strahl gebrachte Lochblende), dann ist das Meßresultat einer anderen Größe, deren Operator mit dem der ersten nicht kommutiert (im Beispiel der Impuls senkrecht zur Strahlrichtung), im durch die Unschärferelation gegebenen Bereich unsicher. Die zweite Messung liefert dann kein reproduzierbares Ergebnis.

5. Die Entwicklungskoeffizienten eines Operators nach einem Orthogonalsystem (z.B. dem Eigenfunktionssystem eines anderen Operators) können zu Matrizen zusammengefaßt werden.

---

* Genaueres s. L. D. LANDAU und E. M. LIFSCHITZ, Quantum Mechanics, Pergamon Press, London 1958, und insbesondere A. MESSIAH, Quantum Mechanics, North-Holland Publ. Co., Amsterdam 1961, Kapitel IV. Dort ist auch die Form der Unschärferelation

$$\Delta E\cdot\Delta t\geqq\hbar$$

ausführlich diskutiert, die in § 11 des vorliegenden Buches erwähnt wurde und auch in Kapitel XII benutzt wird.

Beweis: Der Zustand $A\psi_k$ sei nach dem Orthogonalsystem ψ_m entwickelt:

$$A\psi_k = \sum_m A_{mk}\psi_m. \tag{23.12}$$

Ein anderer Operator B gestatte die Entwicklung

$$B\psi_n = \sum_k B_{kn}\psi_k.$$

(Die Koeffizienten A_{mk} und B_{kn} sind dabei im allgemeinen keine Eigenwerte der Operatoren A bzw. B). Aus der Definition der Operatorenmultiplikation folgt

$$\begin{aligned} C\psi_n &= AB\psi_n = A(B\psi_n) = A\left(\sum_k B_{kn}\psi_k\right) = \sum_{k,m} A_{mk}B_{kn}\psi_m \\ &= \sum_m C_{mn}\psi_m, \end{aligned}$$

so daß man erhält

$$C_{mn} = \sum_k A_{mk}B_{kn}.$$

Dies ist genau die Vorschrift der Matrizenmultiplikation. Das Matrixelement A_{mn} erhält man aus (23.12) mit der Orthonormierung (23.7) zu

$$A_{mn} = \int \psi_m^* A\psi_n\, d\tau. \tag{23.13}$$

In Gleichung (23.12) ist die rechte Seite als Multiplikation einer Matrix mit einem Zeilenvektor ψ_m aufzufassen. Es resultiert ein Spaltenvektor für $A\psi_k$.

Wenn die ψ_k Eigenfunktionen zum Operator A sind, enthält die Matrix nur Diagonalelemente, alle anderen verschwinden. Also

$$A\psi_k = A_{kk}\psi_k.$$

Die Diagonalelemente sind dann die Eigenwerte des Operators.

Das Problem der Lösung der Eigenwertgleichung ist also gleichwertig dem der Diagonalisierung der zum Operator gehörigen Matrix.

Beispiel: Der lineare, harmonische Oszillator.

Die potentielle Energie des linearen, harmonischen Oszillators ist nach der klassischen Mechanik gegeben durch

$$U = \frac{m}{2}\omega^2 x^2,$$

also lautet die Hamilton-Gleichung in Operatorform

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 x^2 = E.$$

Es soll im folgenden gezeigt werden, wie man für dieses Beispiel die Energieeigenwerte und die Matrixdarstellung der Operatoren H, x und p erhalten kann, ohne die SCHRÖDINGER-Gleichung explizit zu lösen. Ein ähnliches Verfahren werden wir später beim Drehimpuls benutzen (s. § 25).

Die HAMILTON-Gleichung lautet nach Division durch $\hbar\omega$:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m\hbar\omega}p^2+\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right)=\frac{E}{\hbar\omega}.$$

Wir definieren einen Operator B durch

$$B=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x+i\sqrt{\frac{1}{m\omega\hbar}}\,p\right).$$

Der dazu adjungierte Operator ist nach Satz 1 (oben)

$$B^+=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x-i\sqrt{\frac{1}{m\omega\hbar}}\,p\right).$$

Damit ist unter Berücksichtigung von (23.1):

$$BB^+=\frac{1}{2}\left(\frac{m\omega}{\hbar}x^2+\frac{1}{m\hbar\omega}p^2+\frac{i}{\hbar}[p\,x-x\,p]\right)=\frac{E}{\hbar\omega}+\frac{1}{2}.$$

Ebenso

$$B^+B=\frac{E}{\hbar\omega}-\frac{1}{2}. \tag{23.14}$$

Also

$$BB^+-B^+B=1.$$

Um die Energieeigenwerte zu finden, gehen wir von dieser Vertauschungsrelation aus. Wir suchen zunächst nach normierten Eigenfunktionen u_n zum Operator B^+B aus der Eigenwertgleichung

$$B^+B\,u_n=\lambda_n u_n \qquad (\lambda_n=\text{Eigenwert}).$$

Dabei ist unter Benutzung der Orthonormierung (23.7)

$$\lambda_n=\int u_n^*(B^+B)\,u_n\,dx=\int |B\,u_n|^2\,dx\geqq 0. \tag{23.15}$$

λ_n ist nur dann gleich Null, wenn $Bu_n=0$ ist (sonst ist das letzte Integral $\neq 0$). Jetzt wird B von links angewandt:

$$B(B^+B)\,u_n=(B\,B^+)\,(B\,u_n)=(B^+B+1)\,(B\,u_n)$$

$$B(B^+B)\,u_n=B\,\lambda_n u_n=\lambda_n(B\,u_n).$$

Wegen Gleichheit der rechten Seiten ergibt sich

$$B^+B(B\,u_n)=(\lambda_n-1)\,(B\,u_n).$$

Also ist (Bu_n) ebenfalls eine Eigenfunktion zum Operator B^+B, nämlich die zum Eigenwert (λ_n-1) gehörige. Wir nennen diese Eigenfunktion u_{n-1}; ein Proportionalitätsfaktor bleibt zunächst offen:

$$B\,u_n=\alpha_{n-1}\,u_{n-1} \quad \textit{oder} \quad B\,u_n=0.$$

Nach (23.15) ist

$$\lambda_n = \int |B u_n|^2 \, dx = |\alpha_{n-1}|^2,$$

damit

$$\alpha_{n-1} = \sqrt{\lambda_n}$$

(bis auf einen uninteressanten Phasenfaktor vom Absolutbetrag 1).

Wiederholung der Anwendung des Operators B von links auf die Eigenwertgleichung für den Operator $B^+ B$ zeigt, daß auch $\lambda_n - 2$, $\lambda_n - 3 \dots$ Eigenwerte zum Operator $B^+ B$ sind. Die Zahlen werden kleiner und schließlich negativ, was aber nach (23.15) verboten ist. Um einen Widerspruch zu vermeiden, muß einmal

$$B u_k = 0$$

vorkommen. Wenn dies der Fall ist, ist auch

$$B^+ B (B u_k) = B^+ B(0) = 0,$$

so daß die Eigenwertreihe abbricht. Daher ist der kleinste Eigenwert Null, die übrigen Eigenwerte sind die ganzen, positiven Zahlen. Also

$$B^+ B u_n = n \cdot u_n \qquad (n = 0, 1, 2, \dots) \tag{23.16}$$

und

$$B u_n = \sqrt{n} \cdot u_{n-1} \,. \tag{23.17}$$

Die physikalische Bedeutung des Operators B ist also die Überführung des Oszillators vom Zustand (n) nach $(n-1)$. Daraus folgt:

1. Energieeigenwerte: Aus (23.14) ergibt sich

$$E_n = \hbar \omega (n + \tfrac{1}{2}) \quad \text{mit} \quad n = 0, 1, 2, \dots. \tag{23.18}$$

2. Matrix für den Operator B: Mit (23.13) und (23.7) ist

$$B_{mn} = \int u_m^* B u_n \, dx = \int u_m^* \sqrt{n} \, u_{n-1} \, dx = \sqrt{n} \, \delta_{m, n-1} \,.$$

Durch den ersten Index wird die Zeile, durch den zweiten die Spalte charakterisiert, also lautet die zum Operator B gehörige Matrix explizit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

3. Matrix für den Operator B^+: Anwendung von B^+ auf (23.17) ergibt

$$B^+ B u_n = \sqrt{n} \, B^+ u_{n-1} = n \, u_n \,,$$

also

$$B^+ u_{n-1} = \sqrt{n} \, u_n \,.$$

Hieraus liest man als physikalische Bedeutung des Operators B^+ die Überführung des Oszillators vom Zustand $(n-1)$ in den Zustand (n) ab. Das Matrixelement folgt zu

$$B^+_{mn} = \int u_m^* B^+ u_n \, dx = \int u_m^* \sqrt{n+1}\, u_{n+1} \, dx = \sqrt{n+1}\, \delta_{m,n+1},$$

oder explizit

$$B^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

In der Tat enthält die Matrix für den HAMILTON-Operator $H = \hbar\omega(BB^+ - \frac{1}{2})$ nur Diagonalelemente.

4. Matrix für den Operator x: Aus der Definition der Operatoren B und B^+ folgt

$$B + B^+ = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\, x,$$

also lautet die Matrix für x

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

5. Matrix für den Operator p: Aus den Definitionen von B und B^+ folgt

$$B - B^+ = i\sqrt{\frac{2}{m\hbar\omega}}\, p,$$

also lautet die Matrix für p

$$p = -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{1} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Durch die Einführung des Operators B ist es also gelungen, Eigenwerte und Operatordarstellungen zu erhalten, ohne die Eigenfunktionen* explizit zu kennen. Ein ähnliches Verfahren führt auch bei der Berechnung der Drehimpulseigenwerte zum Ziel (§ 25).

* Bestimmung der Eigenfunktionen s. Übungsaufgabe VIII, 3.

§ 24. Erhaltungssätze

Eine physikalische Größe bleibt zeitlich konstant, wenn der Erwartungswert des zugehörigen Operators sich zeitlich nicht ändert. Nach (23.3) ergibt sich

$$\frac{d\bar{A}}{dt}=\int\frac{\partial\psi^*}{\partial t}A\psi\,d\tau+\int\psi^*\frac{\partial A}{\partial t}\psi\,d\tau+\int\psi^*A\frac{\partial\psi}{\partial t}\,d\tau.$$

Wenn die physikalische Größe nicht explizit von der Zeit abhängt, ist $\partial A/\partial t=0$. Einführung der allgemeinen SCHRÖDINGER-Gleichung (20.10) liefert dann

$$\frac{d\bar{A}}{dt}=\frac{i}{\hbar}\int(H\psi)^*A\psi\,d\tau-\frac{i}{\hbar}\int\psi^*AH\psi\,d\tau.$$

Unter Benutzung der Hermitizität von H folgt mit (23.2)

$$\boxed{\frac{d\bar{A}}{dt}=\frac{i}{\hbar}\int\psi^*(HA-AH)\psi\,d\tau=\frac{i}{\hbar}\overline{[H,A]}.}\tag{24.1}$$

Der Erwartungswert eines Operators A ist also zeitlich konstant, wenn der Operator mit dem HAMILTON-Operator des (abgeschlossenen) Gesamtsystems kommutiert und wenn $\delta A/\delta t=0$. Dann gilt für die durch den Operator A dargestellte physikalische Größe ein *Erhaltungssatz.*

Beispiele: 1. Energieerhaltungssatz: Für $A=H$ folgt $H=$zeitlich konstant, da H mit sich selbst kommutiert. Der Energieerhaltungssatz gilt also immer, wenn der HAMILTON-Operator nicht explizit von der Zeit abhängt.

2. Impulserhaltungssatz: Mit

$$\vec{p}=\frac{\hbar}{i}\,\mathrm{grad}$$

und

$$H=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+U_{(x,y,z)}$$

folgt z.B. für die x-Komponenten

$$p_xH=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+U\right)=-\frac{\hbar^3}{2im}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}U,$$

$$Hp_x=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+U\right)\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}=-\frac{\hbar^3}{2im}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\hbar}{i}U\frac{\partial}{\partial x}.$$

Die Differentiationen der ersten Glieder auf der rechten Seite kommutieren sofort, die Glieder der potentiellen Energie nur, wenn

$$\frac{\partial}{\partial x}(U\psi)=U\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

ist, also wenn U nicht von x abhängt. Entsprechende Relationen erhält man für die anderen Komponenten. Ein Erhaltungssatz für den Impuls gilt also nur dann, wenn

$$\operatorname{grad} U=0$$

ist, d.h. wenn keine Kraft wirkt.

Nach den Überlegungen am Ende von §2 ist der Impulserhaltungssatz z.B. beim Zweiteilchenproblem gültig bei Betrachtung der kräftefreien Schwerpunktsbewegung. Dagegen wird im Laborsystem nur die Impuls*summe* beider Teilchen erhalten. In diesem Falle hängt die ψ-Funktion des Problems von den Koordinaten *beider* Teilchen ab:

$$\psi=\psi_{(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2,t)}\,.$$

Weiter ist

$$p_{1x}=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad p_{2x}=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_2};$$

$$H=-\frac{\hbar^2}{2m_1}\Delta_1-\frac{\hbar^2}{2m_2}\Delta_2+U\,.$$

Es ist dann

$$(p_{1x}+p_{2x})\,H\psi=\frac{\hbar}{i}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\frac{\hbar^2}{2m_1}\Delta_1-\frac{\hbar^2}{2m_2}\Delta_2\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(-\frac{\hbar^2}{2m_1}\Delta_1-\frac{\hbar^2}{2m_2}\Delta_2\right)\right]\psi+\frac{\hbar}{i}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}\right)U\psi$$

$$H(p_{1x}+p_{2x})\,\psi=\frac{\hbar}{i}\left[\left(-\frac{\hbar^2}{2m_1}\Delta_1-\frac{\hbar^2}{2m_2}\Delta_2\right)\frac{\partial}{\partial x_1}+\right.$$
$$\left.+\left(-\frac{\hbar^2}{2m_1}\Delta_1-\frac{\hbar^2}{2m_2}\Delta_2\right)\frac{\partial}{\partial x_2}\right]\psi+\frac{\hbar}{i}\,U\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\psi\,.$$

Die Impulssumme kommutiert mit H, wenn

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}+\frac{\partial U}{\partial x_2}=0$$

ist, also bei

$$K_{1x}=-K_{2x}\,.$$

Entsprechende Beziehungen gelten für die y- und z-Komponenten. Also wird die Impulssumme erhalten, wenn die Kräfte auf beide Teilchen sich gegenseitig aufheben, d.h. wenn die Teilchen nur inneren Kräften unterworfen sind.

Damit sind die Überlegungen des §8 auch auf quantenmechanische Systeme anwendbar.

3. Erhaltungssatz des Bahndrehimpulses: Wir schreiben H in der Form (vgl. §21)

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}+\frac{L^2}{r^2}\right)+U.$$

Dann kommutiert H mit L^2, wenn U nur von r, aber nicht explizit von den Winkelvariablen abhängt. Denn der Operator L^2 wirkt nur auf die Winkelvariablen. Das Quadrat des Bahndrehimpulsvektors ist also zeitlich konstant, wenn U *nur* von r abhängt, d.h. wenn das physikalische System *Kugelsymmetrie* aufweist.

Die z-Komponente des Bahndrehimpulses ist in die Quantenmechanik zu übersetzen als (s. §23)

$$L_z = \frac{\hbar}{i}[\vec{r}\times \mathrm{grad}]_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Für L_z gilt also immer dann ein Erhaltungssatz, wenn U nicht von φ abhängt, d.h. wenn das physikalische Problem um eine Achse *rotationssymmetrisch* ist.

4. Erhaltungssatz der Parität: Sei eine Funktion $\psi_{(x,y,z)}$ Eigenfunktion zum HAMILTON-Operator

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U_{(x,y,z)}$$

und sei U eine gerade Funktion von x, y und z, d.h.

$$U_{(-x,-y,-z)} = U_{(x,y,z)}$$

(erfüllt z.B. für ein kugelsymmetrisches Potential $U_{(r)}$ mit $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$). Dann ist auch die Funktion

$$\bar{\psi}_{(x,y,z)} = \psi_{(-x,-y,-z)}$$

Eigenfunktion zu H, denn H ist invariant gegen eine Transformation, die eine Spiegelung am Ursprung des Koordinatensystems hervorruft. Der Operator P, der eine solche Spiegelung bewirkt, läßt H ungeändert. Mit

$$P\psi_{(x,y,z)} = \psi_{(-x,-y,-z)}$$

folgt also

$$P(H\psi) = H(P\psi)$$

oder

$$PH - HP = 0$$

(der Operator P läßt sich durch H „durchschieben"). Für die durch P dargestellte physikalische Größe (die „Parität") gilt dann ein Erhaltungssatz, da P hermitisch ist. Da $P\psi$ Eigenfunktion zum HAMILTON-Operator zum gleichen Eigenwert wie ψ ist, kann es sich nur um einen konstanten Faktor von ψ unterscheiden:

$$P\psi = c\psi .$$

Nochmalige Anwendung von P von links ergibt wegen $P^2 = 1$

$$c^2\psi = \psi ,$$

also

$$c^2 = 1; \qquad c = \begin{cases} +1 & (\text{„gerade" Parität}) \\ -1 & (\text{„ungerade" Parität}). \end{cases}$$

Der Erhaltungssatz besagt, daß sich die Parität zeitlich nicht ändern kann, solange $U_{(x,\,y,\,z)}$ eine gerade Funktion ist.

Bestimmung der Parität eines Zustandes aus der Darstellung der ψ-Funktion in Kugelkoordinaten:

$$P\psi_{(r,\,\vartheta,\,\varphi)} = \psi_{(r,\,\pi-\vartheta,\,\varphi+\pi)} .$$

Wenn das Potential U nur vom Abstand r abhängt, ist mit (21.13)

$$\psi_{(r,\,\vartheta,\,\varphi)} = \text{const}\, R_{(r)}\, \theta_{(\vartheta)}\, \Phi_{(\varphi)} ,$$

und es muß also gelten

$$PR_{(r)}\, \theta_{(\vartheta)}\, \Phi_{(\varphi)} = R_{(r)}\, \theta_{(\pi-\vartheta)}\, \Phi_{(\varphi+\pi)} .$$

R bleibt unverändert, hat also gerade Parität. Nach (21.8) ist

$$\Phi_{(\varphi+\pi)} = (-1)^m\, \Phi_{(\varphi)} ,$$

$\Phi_{(\varphi)}$ hat also die Parität der Zahl m (gerade wenn m gerade, ungerade wenn m ungerade). Nach der Definitionsgleichung der assoziierten LEGENDRE-Polynome (s. §21) hat $\theta_{(\vartheta)}$ die Parität der Zahl $(l+m)$, also hat die Kugelfunktion $Y_{l.m}$ die Parität der Zahl l. Damit hat auch ψ die Parität der Zahl l:

$$\begin{aligned} &l \text{ gerade} \quad\;\; \rightarrow \psi \text{ hat gerade Parität}, \\ &l \text{ ungerade} \rightarrow \psi \text{ hat ungerade Parität}. \end{aligned}$$

5. Erhaltung der Austauschsymmetrie, PAULI-Prinzip: Bei einem Mehrteilchenproblem hängt der HAMILTON-Operator von den Koordinaten aller Teilchen ab:

$$H = H_{(1,\,2,\,3,\,\ldots\,N)} .$$

Wenn zwei der Teilchen gleich sind und diese vertauscht werden, ändert sich der Wert der HAMILTON-Funktion (Gesamtenergie) nicht. Sei P_{ik} ein Operator, der die (gleichen) Teilchen i und k vertauscht, dann ist also

$$P_{ik}\,H_{(1,\,2,\ldots i\ldots k\ldots\,N)} = H_{(1,\,2,\ldots k\ldots i\ldots\,N)} = H_{(1,\,2,\ldots i\ldots k\ldots\,N)}\,.$$

P_{ik} verändert also den HAMILTON-Operator nicht, der Operator P_{ik} kann „durchgeschoben“ werden:

$$P_{ik}\,H - H P_{ik} = 0\,.$$

Für die dem Vertauschungsoperator zugeordnete physikalische Größe („Austauschsymmetrie“) gilt also ein Erhaltungssatz.

Wegen der Ununterscheidbarkeit gleicher Teilchen beschreiben die Funktionen ψ und $P_{ik}\psi$ den gleichen Zustand, sie können sich also nur um einen konstanten Faktor unterscheiden:

$$P_{ik}\,\psi = \lambda\psi\,.$$

Nochmalige Anwendung von P_{ik} von links ergibt wegen $P_{ik}^2 = 1$

$$\lambda^2\,\psi = \psi$$

$$\lambda = \begin{cases} +1 & \text{(„Symmetrie“)} \\ -1 & \text{(„Antisymmetrie“)}\,. \end{cases}$$

Entweder ändert sich die Eigenfunktion zu H bei der Vertauschung nicht (symmetrische ψ-Funktion) oder sie nimmt entgegengesetztes Vorzeichen an (antisymmetrische ψ-Funktion).

Symmetrische und antisymmetrische Zustände können nicht ineinander übergehen, da P_{ik} und H vertauschbar sind, H also die Symmetrieeigenschaft nicht ändern kann. Ebenso kann keine Vermischung von symmetrischen und antisymmetrischen Zuständen eintreten, da ein äußeres Feld auf gleiche Weise auf gleiche Teilchen einwirkt. Die Symmetrie bzw. Antisymmetrie muß eine Eigenschaft der Teilchen selbst sein.

Experimentelles Ergebnis: Teilchen mit halbzahligem Spin („Fermionen“) haben antisymmetrische, Teilchen mit ganzzahligem Spin („Bosonen“) symmetrische Wellenfunktionen.

PAULI-Prinzip: Die Wahrscheinlichkeit dafür, in einem System von gleichen Fermionen zwei Teilchen zu finden, für die die Meßergebnisse aller den Zustand charakterisierenden physikalischen Größen gleich sind, d.h. die einen identischen Satz von Quantenzahlen haben, ist gleich Null.

Beweis: Seien mit q_1 bzw. q_2 *alle* Koordinaten der Teilchen 1 bzw. 2 bezeichnet. Dann gilt wegen der Antisymmetrie der Wellenfunktionen

$$\psi_{(q_1,\,q_2,\,t)} = -\psi_{(q_2,\,q_1,\,t)}\,.$$

Entwicklung von ψ nach denjenigen Funktionen ψ_n der Einzelteilchen, die Eigenfunktionen zu allen den Teilchenzustand charakterisierenden Operatoren sind (s. §23 d) 3.) (n_1 bzw. n_2 steht für alle zugehörigen Quantenzahlen), liefert

$$\psi_{(q_1, q_2, t)} = \sum_{n_1, n_2} c_{(n_1, n_2, t)} \psi_{n_1(q_1)} \psi_{n_2(q_2)} . \tag{24.2}$$

Dabei ist $|c_{(n_1, n_2, t)}|^2$ die Wahrscheinlichkeit, daß zur Zeit t beim ersten Teilchen der Satz n_1 von Quantenzahlen, beim zweiten Teilchen der Satz n_2 von Quantenzahlen gemessen wird.

Die Vertauschung bewirkt $q_1 \leftrightarrow q_2$:

$$\psi_{(q_1, q_2, t)} \to \psi_{(q_2, q_1, t)} = \sum_{n_1, n_2} c_{(n_1, n_2, t)} \psi_{n_1(q_2)} \psi_{n_2(q_1)} = -\psi_{(q_1, q_2, t)} .$$

In der Doppelsumme werden nun die Indizes n_1 und n_2 vertauscht, die ja dieselben Werte durchlaufen. Dadurch wird der Wert der Summe nicht geändert. Es ergibt sich

$$\sum_{n_2, n_1} c_{(n_2, n_1, t)} \psi_{n_2(q_2)} \psi_{n_1(q_1)} = -\sum_{n_1, n_2} c_{(n_1, n_2, t)} \psi_{n_1(q_1)} \psi_{n_2(q_2)} .$$

Diese Identität kann nur erfüllt sein, wenn

$$c_{(n_1, n_2, t)} = -c_{(n_2, n_1, t)} \tag{24.3}$$

ist. Für $n_1 = n_2$ folgt

$$c_{(n_1, n_2, t)} = 0 ,$$

also können nicht zwei Teilchen im selben Zustand (charakterisiert durch einen vollständigen Satz aller Quantenzahlen) sein. Dies ist das PAULIsche Ausschließungsprinzip. Es gilt sowohl in der Elektronenhülle eines Atoms oder Moleküls als auch für die Neutronen und – unabhängig davon – die Protonen im Kern.

Antisymmetrisierung der Wellenfunktion: Die Wellenfunktion Ψ eines aus zwei Fermionen bestehenden Systems setzt sich nach (24.2) aus den Wellenfunktionen der beiden Einzelteilchen zusammen. Um die Antisymmetrie zu verdeutlichen, kann man in (24.2) die Summe zerlegen, je nachdem $n_1 > n_2$ oder $n_1 < n_2$ ist [$n_1 = n_2$ ergibt wegen (24.3) keinen Beitrag]:

$$\Psi_{(q_1, q_2, t)} = \sum_{n_1 > n_2} \sum_{n_2} c_{(n_1, n_2, t)} \psi_{n_1(q_1)} \psi_{n_2(q_2)} + \sum_{n_1 < n_2} \sum_{n_2} c_{(n_1, n_2, t)} \psi_{n_1(q_1)} \psi_{n_2(q_2)} .$$

In der zweiten Summe werden die Indizes n_1 und n_2 in n_2 und n_1 umbenannt, dann wird (24.3) benutzt. Es ergibt sich

$$\Psi_{(q_1, q_2, t)} = \sum_{n_1 > n_2} \sum_{n_2} c_{(n_1, n_2, t)} \left[\psi_{n_1(q_1)} \psi_{n_2(q_2)} - \psi_{n_2(q_1)} \psi_{n_1(q_2)}\right] .$$

Die eckige Klammer läßt sich als Determinante schreiben:

$$\Psi_{(q_1, q_2, t)} = \sum_{n_1 > n_2} \sum_{n_2} c_{(n_1, n_2, t)} \begin{vmatrix} \psi_{n_1}(q_1) & \psi_{n_1}(q_2) \\ \psi_{n_2}(q_1) & \psi_{n_2}(q_2) \end{vmatrix} .$$

Diese Darstellung kann verallgemeinert werden: Die (antisymmetrische) Wellenfunktion eines Systems, das aus A Fermionen besteht, ist eine Summe aus Determinanten der Form

$$\begin{vmatrix} \psi_{n_1}(q_1) \cdots \psi_{n_1}(q_A) \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ \psi_{n_A}(q_1) \cdots \psi_{n_A}(q_A) \end{vmatrix} .$$

Bei fehlender Wechselwirkung zwischen den Teilchen des Systems (wichtig als Näherungsansatz) wird nur einer der Koeffizienten $c_{(n_1, n_2, t)}$ von Null verschieden sein, jedes der Teilchen ist dann in einem festen Quantenzustand (z.B. gibt es im Elektronengrundzustand des Na-Atoms* zwei $1s$-Elektronen mit $n=1$, $l=0$, $j=\frac{1}{2}$, $m_j=\pm\frac{1}{2}$, zwei $2s$-Elektronen mit $n=2$, $l=0$, $j=\frac{1}{2}$, $m_j=\pm\frac{1}{2}$, zwei $2p_{\frac{1}{2}}$-Elektronen mit $n=2$, $l=1$, $j=\frac{1}{2}$, $m_j=\pm\frac{1}{2}$, vier $2p_{\frac{3}{2}}$-Elektronen mit $n=2$, $l=1$, $j=\frac{3}{2}$, $m_j=\pm\frac{3}{2}$, $\pm\frac{1}{2}$ und ein $3s$-Elektron mit $n=3$, $l=0$, $j=\frac{1}{2}$, $m_j=+\frac{1}{2}$ oder $-\frac{1}{2}$). Der Koeffizient bestimmt sich dann aus der Normierung der Funktion $\Psi_{(q_1, q_2 \ldots q_A)}$ zu $(A!)^{-\frac{1}{2}}$. Es gilt somit

$$\Psi_{(q_1, q_2 \ldots q_A)} = \frac{1}{\sqrt{A!}} \begin{vmatrix} \psi_{n_1}(q_1) \cdots \psi_{n_1}(q_A) \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ \psi_{n_A}(q_1) \cdots \psi_{n_A}(q_A) \end{vmatrix} . \qquad (24.4)$$

Ein Beispiel für die kernphysikalische Anwendung dieser Formel wird in § 34 gegeben.

IX. Drehimpuls und Spin

In diesem Kapitel werden die Grundlagen der Quantenmechanik des Drehimpulses besprochen. In § 25 wird gezeigt, daß es außer dem Bahndrehimpuls eine weitere Erscheinungsform des Drehimpulses geben muß, deren Eigenwerte sich durch halbzahlige Quantenzahlen beschreiben lassen und

* Die Bedeutung der Quantenzahlen j und m_j wird in § 25 und § 26 erläutert: j ist die Quantenzahl des Gesamtdrehimpulses und m_j die seiner z-Komponente. Vier Quantenzahlen genügen zur Charakterisierung eines Elektrons im Atomverband. Jedes der Elektronen im Na-Grundzustand (wie auch in jedem anderen Elektronenzustand) hat einen verschiedenen Satz von Quantenzahlen, wie es das PAULI-Prinzip verlangt. Der Grundzustand ist dadurch charakterisiert, daß die n Fermionen des Systems gerade die n energetisch am tiefsten liegenden Quantenzustände besetzen.

die den Namen „Spin“ bekommen hat. Die Eigenfunktionen des Spins und ihre Eigenschaften werden untersucht.

In §26 wird die Zusammensetzung mehrerer Spins zum Gesamtspin und von Spin und Bahndrehimpuls zum Gesamtdrehimpuls behandelt. Bei der Kopplung von mehr als zwei Drehimpulsen kommt es auf die Stärke der Kopplung zwischen ihnen an; als Grenzfälle werden die RUSSEL-SAUNDERS- und die *j-j*-Kopplung erwähnt, auf den allgemeinen Fall („intermediate coupling“) wird hier nicht eingegangen.

§ 25. Eigenwerte und Eigenfunktionen von Bahndrehimpuls, Spin und Gesamtdrehimpuls

a) Bahndrehimpuls

Der Bahndrehimpuls ist definiert als

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p},$$

der entsprechende quantenmechanische Operator heißt

$$\vec{L}=\frac{\hbar}{i}\vec{r}\times\operatorname{grad}.$$

Für die Komponenten ergibt sich in Kugelkoordinaten

$$\left.\begin{aligned} L_x&=-\frac{\hbar}{i}\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta}+\operatorname{cotg}\vartheta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\\ L_y&=\frac{\hbar}{i}\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta}-\operatorname{cotg}\vartheta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\\ L_z&=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}\end{aligned}\right\}\tag{25.1}$$

und für das Quadrat des Bahndrehimpulses

$$L^2=L_x^2+L_y^2+L_z^2=-\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right].\tag{25.2}$$

Wie sich durch Ausdifferenzieren bestätigen läßt, gelten die folgenden Kommutationsrelationen:

$$\left.\begin{aligned} L_zL_y-L_yL_z&=\frac{\hbar}{i}L_x\\ L_xL_z-L_zL_x&=\frac{\hbar}{i}L_y\\ L_yL_x-L_xL_y&=\frac{\hbar}{i}L_z\end{aligned}\right\}\tag{25.3}$$

und

$$L_i L^2 - L^2 L_i = 0 \quad \text{für} \quad i = x, y, z. \tag{25.4}$$

Da nach (25.3) die Bahndrehimpulskomponenten untereinander nicht kommutieren, ist es nach §23, d 3, nicht möglich, mehr als eine von ihnen gleichzeitig mit definitivem Meßresultat zu messen (außer wenn $L_x = L_y = L_z = 0$). Man ist übereingekommen, das Koordinatensystem so zu wählen, daß die z-Komponente L_z ausgezeichnet ist. Dann sind nach (25.4) L_z und L^2 gleichzeitig meßbar. Nach §24 sind bei kugelsymmetrischem Potential $U_{(r)}$ auch H und L^2 bzw. L_z vertauschbar, so daß unter dieser Bedingung also Energie, Bahndrehimpulsquadrat und z-Komponente des Bahndrehimpulses gleichzeitig meßbar sind. Für alle drei Größen gilt dann nach (24.1) ein Erhaltungssatz.

Die Eigenfunktionen der Operatoren L_z und L^2 sind nach §23

$$L_z \psi_m = A_m \psi_m \quad \text{mit} \quad \psi_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i m \varphi} \quad \text{und} \quad A_m = m\hbar, \quad m \text{ ganzzahlig} \tag{25.5}$$

und

$$\left.\begin{aligned} L^2 \psi_{l,m} &= B_l \psi_{l,m} \quad \text{mit} \quad \psi_{l,m} = Y_{l,m} = N_{l,m} P^m_{l(\cos\vartheta)} e^{i m \varphi} \quad \text{und} \\ B_l &= \hbar^2 l(l+1), \quad l = 0, 1, 2, \ldots; \quad |m| \leqq l. \end{aligned}\right\} \tag{25.6}$$

b) Gesamtdrehimpuls

Wie sich herausstellen wird, gibt es außer dem Bahndrehimpuls weitere Operatoren, die die Vertauschungsrelationen (25.3) und (25.4) erfüllen. Um dies explizit zu zeigen, gehen wir allein von den Kommutationsrelationen aus, ohne (25.1) und (25.2) zu benutzen. Wir nehmen an, daß das physikalische Problem rotationssymmetrisch um die z-Achse sei, so daß für die z-Komponente des allgemeinen Drehimpulsoperators, den wir $\vec{J}$ nennen wollen, die Eigenwertgleichung

$$J_z \psi_m = \hbar m \psi_m$$

mit zunächst unbekannten m und ψ_m gilt. Die Ausgangsposition ist fernerhin durch die Gleichungen

$$J_z J_y - J_y J_z = \frac{\hbar}{i} J_x \qquad \text{(und zyklisch)}$$

$$J_i J^2 - J^2 J_i = 0 \qquad (i = x, y, z)$$

gegeben. Wir suchen die möglichen Werte für m und die Eigenwerte zum Operator J^2. Die Methode zur Auffindung derselben ist ähnlich der des Beispiels am Schluß von §23.

Zunächst werden die nichthermitischen, aber zueinander adjungierten (vgl. §23, d 1) Operatoren J^+ und J^- definiert durch

$$\left.\begin{aligned} J^+ &= J_x + i\,J_y \\ J^- &= J_x - i\,J_y\,. \end{aligned}\right\} \tag{25.7}$$

Dann ist

$$\left.\begin{aligned} J^+ J^- &= J_x^2 + i(J_y J_x - J_x J_y) + J_y^2 = J_x^2 + J_y^2 + \hbar J_z \\ J^- J^+ &= J_x^2 - i(J_y J_x - J_x J_y) + J_y^2 = J_x^2 + J_y^2 - \hbar J_z \\ J^2 &= J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 = J_z^2 + \tfrac{1}{2}(J^+ J^- + J^- J^+)\,. \end{aligned}\right\} \tag{25.8}$$

Kommutatoren:

$$J_z J^+ - J^+ J_z = J_z J_x + i J_z J_y - J_x J_z - i J_y J_z = \hbar J^+, \tag{25.9}$$

$$J_z J^- - J^- J_z = J_z J_x - i J_z J_y - J_x J_z + i J_y J_z = -\hbar J^-, \tag{25.10}$$

$$J^+ J^- - J^- J^+ = 2\hbar J_z\,. \tag{25.11}$$

Anwendung von (25.9) auf ψ_m ergibt unter Benutzung der Eigenwertgleichung für J_z

$$J_z(J^+ \psi_m) - J^+(J_z \psi_m) = \hbar (J^+ \psi_m)$$

$$J_z(J^+ \psi_m) = (m+1)\,\hbar (J^+ \psi_m)\,.$$

Vergleich mit (25.5) zeigt, daß $J^+\psi_m$ Eigenfunktion zum Operator J_z mit dem Eigenwert $(m+1)\,\hbar$, also proportional zu ψ_{m+1} ist oder verschwinden muß:

$$J^+ \psi_m = \alpha_{m+1}\, \psi_{m+1} \quad \text{mit} \quad \alpha_{m+1} = \text{const} \quad \textit{oder} \quad J^+ \psi_m = 0\,. \tag{25.12}$$

Anwendung von (25.10) auf ψ_m ergibt

$$J_z(J^- \psi_m) - J^-(J_z \psi_m) = -\hbar (J^- \psi_m)$$

$$J_z(J^- \psi_m) = (m-1)\,\hbar (J^- \psi_m)\,.$$

Also ist $J^- \psi_m$ Eigenfunktion zum Operator J_z mit dem Eigenwert $(m-1)\,\hbar$ oder muß verschwinden:

$$J^- \psi_m = \beta_{m-1}\, \psi_{m-1} \quad \text{mit} \quad \beta_{m-1} = \text{const} \quad \textit{oder} \quad J^- \psi_m = 0\,. \tag{25.13}$$

Der Operator J^+ bewirkt die Überführung des Systems vom Zustand ψ_m in den Zustand ψ_{m+1} („raising operator"), der Operator J^- die Überführung in ψ_{m-1} („lowering operator").

Da J^- der adjungierte Operator zu J^+ ist, gilt nach (23.6)

$$\int \psi_m^* J^+ \psi_{m-1}\, d\tau = \int (J^- \psi_m)^* \psi_{m-1}\, d\tau\,,$$

$$\alpha_m \int |\psi_m|^2\, d\tau = \beta_{m-1}^* \int |\psi_{m-1}|^2\, d\tau\,.$$

Unter Berücksichtigung der Normierung der Funktionen ψ_m folgt

$$\alpha_m = \beta^*_{m-1}.$$

Damit ergeben sich die Eigenwertgleichungen der Operatoren $J^+ J^-$ und $J^- J^+$ zu:

$$J^+ J^- \psi_m = \beta_{m-1}\,\alpha_m\,\psi_m = |\beta_{m-1}|^2\,\psi_m, \tag{25.14}$$

$$J^- J^+ \psi_m = \alpha_{m+1}\,\beta_m\,\psi_m = |\beta_m|^2\,\psi_m. \tag{25.15}$$

Anwendung von (25.11) auf ψ_m liefert

$$|\beta_{m-1}|^2 - |\beta_m|^2 = 2\hbar^2\, m.$$

Diese Differenzengleichung hat die Lösung (Bestätigung durch Einsetzen)

$$\left.\begin{aligned} |\beta_m|^2 &= C - \hbar^2\, m(m+1); \\ C &= \text{const}. \end{aligned}\right\} \tag{25.16}$$

Trägt man $|\beta_m|^2$ gegen m auf, so ergibt sich eine Parabel (s. Fig. 25.1). Da die linke Seite notwendig positiv ist, kann m nur solche Werte haben, daß

$$C - \hbar^2\, m(m+1) \geqq 0$$

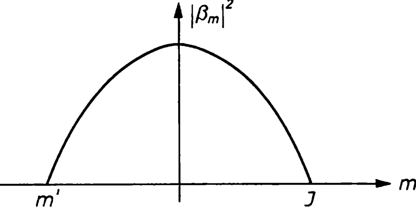


Fig. 25.1. Schematische Darstellung der Funktion $|\beta_m|^2$ [siehe Gleichung (25.16)]

ist. Der größte Wert von m sei mit J bezeichnet, $J \geqq 0$. Dann wäre ein Widerspruch zu erwarten, wenn $m = J+1$ wäre. Um dies zu vermeiden, muß man verlangen

$$J^+ \psi_J = 0, \quad \text{also} \quad \alpha_{J+1} = \beta^*_J = 0.$$

Dann ist auch $\beta_J = 0$. Aus (25.16) folgt für $m = J$

$$C = \hbar^2\, J(J+1).$$

Der kleinste Wert von m sei mit m' bezeichnet. Dann muß man nach der gleichen Schlußweise verlangen, daß

$$J^- \psi_{m'} = 0, \quad \text{also} \quad \beta_{m'-1} = 0$$

ist. Einsetzen in (25.16) ergibt

$$0 = \hbar^2\, J(J+1) - \hbar^2 (m'-1)\, m'.$$

Diese quadratische Gleichung in m' hat die beiden Lösungen

$$m' = J+1; \qquad m' = -J.$$

Die erste Lösung kann nicht die gesuchte sein, da der größte Wert für m mit J bezeichnet war. Also ist $m' = -J$.

Die Eigenwerte des Operators J_z laufen also in Schritten von Eins zwischen $-J$ und $+J$. Damit das möglich ist, muß die stets positive Zahl J entweder ganzzahlig oder halbzahlig sein:

$$J=0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, 2 \ldots .$$

Die Eigenwerte der anderen Operatoren lassen sich nun aus (25.14), (25.15) und (25.8) angeben:

$$J^+ J^- \psi_m = |\beta_{m-1}|^2 \psi_m = \hbar^2 [J(J+1) - m(m-1)] \psi_m, \tag{25.17}$$

$$J^- J^+ \psi_m = |\beta_m|^2 \psi_m = \hbar^2 [J(J+1) - m(m+1)] \psi_m, \tag{25.18}$$

$$\left.\begin{aligned} J^2 \psi_m &= \hbar^2 [m^2 + \tfrac{1}{2}\{2J(J+1) - m(m-1) - m(m+1)\}] \psi_m \\ &= \hbar^2 J(J+1) \psi_m . \end{aligned}\right\} \tag{25.19}$$

Das Ergebnis ist, daß ψ_m gleichzeitig Eigenfunktion zu J_z und J^2 ist und daß die Eigenwerte zu J_z durch $\hbar m$, die zu J^2 durch $\hbar^2 J(J+1)$ gegeben sind. Wenn die Quantenzahl J ganzzahlig ist, ist auch m ganzzahlig; für halbzahlige J ist auch m halbzahlig. In jedem Fall kann bei gegebener Quantenzahl J die Quantenzahl m die Werte J, $J-1$, $J-2, \ldots, -J$ annehmen; es gibt $(2J+1)$ mögliche m-Werte.

Ein Vergleich von (25.19) und (25.6) zeigt, daß der Fall des Bahndrehimpulses im Ergebnis (25.19) mit eingeschlossen ist (l ist stets ganzzahlig). Darüber hinaus kann es jedoch noch eine Drehimpulsform geben, die halbzahlige Eigenwerte besitzt. Ein solcher Drehimpuls wurde experimentell in Gestalt des „*Spins*“ (Eigendrehimpuls) der Elementarteilchen (Proton, Neutron, Elektron, Neutrino) gefunden. Eine anschauliche Deutung für den Spin gibt es nicht; eine gewisse makroskopische Analogie liegt vor beim System Sonne-Erde in Form der täglichen Umdrehung der Erde um ihre Nord-Süd-Achse zusätzlich zu ihrer Bahnbewegung um die Sonne. Dieses Analogon darf man aber nicht zu wörtlich nehmen, denn z.B. ein mit dem Drehimpuls $\frac{1}{2}\hbar$ um die eigene Achse rotierendes Elektron, das man sich als Kügelchen mit dem klassischen Elektronenradius (10.2) $R_{el} = 2{,}8 \cdot 10^{-13}$ cm vorstellen könnte, hätte eine Umfangsgeschwindigkeit, die weit größer wäre als die Lichtgeschwindigkeit. Außerdem kann natürlich ein klassisch-makroskopisches Analogon nicht die Halbzahligkeit der zum Spin gehörigen Quantenzahl erklären.

Der Gesamtdrehimpuls $\vec{J}$ eines Systems aus Elementarteilchen setzt sich dann aus allen Bahndrehimpulsen $\vec{l}_i$ und allen Spins $\vec{s}_i$ der beteiligten Teilchen zusammen:

$$\vec{J} = \sum_i \vec{l}_i + \sum_i \vec{s}_i .$$

(Man bezeichnet die Drehimpulsvektoren der einzelnen Teilchen mit kleinen Buchstaben, die des zusammengesetzten Systems mit großen Buchstaben).

Entsprechend gilt für die z-Komponente des Gesamtdrehimpulses

$$J_z = \sum_i l_{iz} + \sum_i s_{iz}.$$

Die Quantenzahlen J und m_J sind ganzzahlig, wenn das System aus einer geraden Anzahl von Fermionen (die jeweils den Spin $\frac{1}{2}\hbar$ haben) besteht; bei einer ungeraden Anzahl von Fermionen sind J und m_J halbzahlig.

Die *Matrixdarstellung der Drehimpulsoperatoren* findet man wie folgt: Aus (25.12) folgt für das Matrixelement* des Operators J^+ nach (23.13)

$$\left.\begin{aligned} J^+_{km} &= \int \psi_k^* J^+ \psi_m \, d\tau = \alpha_{m+1} \int \psi_k^* \psi_{m+1} \, d\tau = \beta_m \, \delta_{k,m+1} \\ &= \hbar \sqrt{J(J+1) - m(m+1)} \, \delta_{k,m+1}. \end{aligned}\right\} \tag{25.20}$$

Aus (25.13) folgt entsprechend

$$\left.\begin{aligned} J^-_{km} &= \int \psi_k^* J^- \psi_m \, d\tau = \beta_{m-1} \int \psi_k^* \psi_{m-1} \, d\tau = \beta_{m-1} \, \delta_{k,m-1} \\ &= \hbar \sqrt{J(J+1) - m(m-1)} \, \delta_{k,m-1}. \end{aligned}\right\} \tag{25.21}$$

Die Operatoren $J^+ J^-$ und $J^- J^+$ haben Matrixelemente nur für $k = m$, ihre Matrizen sind also auf Diagonalform. Mit (23.13) folgt

$$(J^+ J^-)_{km} = |\beta_{m-1}|^2 \, \delta_{km} = \hbar^2 [J(J+1) - m(m-1)] \, \delta_{km}$$
$$(J^- J^+)_{km} = |\beta_m|^2 \, \delta_{km} = \hbar^2 [J(J+1) - m(m+1)] \, \delta_{km}.$$

Die Matrizen für die kartesischen Komponenten des Drehimpulses ergeben sich aus (25.7) und (25.11) zu

$$\left.\begin{aligned} (J_x)_{km} &= \tfrac{1}{2} (J^+_{km} + J^-_{km}) \\ (J_y)_{km} &= \frac{1}{2i} (J^+_{km} - J^-_{km}) \\ (J_z)_{km} &= \frac{1}{2\hbar} [(J^+ J^-)_{km} - (J^- J^+)_{km}] = m \hbar \, \delta_{km}. \end{aligned}\right\} \tag{25.22}$$

Als Beispiel betrachten wir den Fall $J = \frac{1}{2}$, was z.B. einem einzelnen Spin entspricht. Die Matrix für J^+ ist dann zweireihig, da m nur die Werte $+\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$ annehmen kann. Man ist übereingekommen, das Element mit den größten Werten für m und k als linkes oberes Element der Matrix anzuordnen:

$$\begin{matrix} m = \frac{1}{2}, & m = -\frac{1}{2}, & \end{matrix}$$
$$J^+ = \begin{pmatrix} 0 & \beta^*_{-\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} k = \frac{1}{2} \\ k = -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

mit

$$\beta^*_{-\frac{1}{2}} = \hbar \sqrt{\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}} = \hbar,$$

* Die beim Wurzelziehen aus $|\beta_m|^2$ freibleibende Phase wird gewöhnlich Null gesetzt.

also

$$J^+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entsprechend

$$J^- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt mit (25.22)

$$\left.\begin{aligned} J_x &= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\sigma_x \\ J_y &= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\sigma_y \\ J_z &= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\sigma_z \\ J^2 &= J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 = \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}\right\} \qquad (25.23)$$

Die Matrizen σ_x, σ_y und σ_z werden als „PAULIsche Spinmatrizen" bezeichnet. Sie gehorchen den Rechenregeln (vgl. die Kommutationsrelationen für den allgemeinen Drehimpulsoperator am Anfang des § 25)

a)
$$\sigma_x\sigma_y = i\sigma_z; \qquad \sigma_y\sigma_x = -i\sigma_z$$
$$\sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_x = 2i\sigma_z$$
$$\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x = 0,$$

b)
$$\sigma_y\sigma_z = i\sigma_x; \qquad \sigma_z\sigma_y = -i\sigma_x$$
$$\sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_y = 2i\sigma_x$$
$$\sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_y = 0,$$

c)
$$\sigma_z\sigma_x = i\sigma_y; \qquad \sigma_x\sigma_z = -i\sigma_y$$
$$\sigma_z\sigma_x - \sigma_x\sigma_z = 2i\sigma_y$$
$$\sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_z = 0.$$

Die Drehimpulsmatrizen für andere Werte von J können nach dem gleichen Schema erhalten werden.

c) Spin

Der Spin eines Teilchens ist als Teilcheneigenschaft nicht vom Ort des Teilchens abhängig. Die Eigenfunktionen zum Spin sind daher *keine Ortsfunktionen.* Die Spinfunktionen, die mit χ_{m_s} bezeichnet werden, hängen nur

von der „Spinvariablen“ s und damit vom Wert der Quantenzahl m_s ab (m_s ist die Quantenzahl der z-Komponente des Spinoperators). Da $|\chi_{m_s}|^2$ die Wahrscheinlichkeit angeben soll, daß das Teilchen mit dem Spin s im Zustand m_s ist, d.h. daß die z-Komponente des Spindrehimpulses den Wert $m_s\,\hbar$ hat, stehen für χ_{m_s} nur die Werte 0 oder 1 zur Verfügung.

Die Spinvariable s kann bei *einem* Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ nur zwei Werte annehmen:

$$s=+\tfrac{1}{2}\hbar \quad \text{für} \quad m_s=+\tfrac{1}{2}$$

und

$$s=-\tfrac{1}{2}\hbar \quad \text{für} \quad m_s=-\tfrac{1}{2}.$$

Man hat also die Situation, daß der Index „m“ der m-ten Eigenfunktion χ_m bestimmt, an welcher Stelle der „Variablen“ s die Funktion von Null verschieden ist:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Für } m_s=+\tfrac{1}{2} \text{ ist} & \chi_{+\frac{1}{2}}\left(s=+\tfrac{\hbar}{2}\right)=1 \\ & \chi_{+\frac{1}{2}}\left(s=-\tfrac{\hbar}{2}\right)=0, \\ \text{für } m_s=-\tfrac{1}{2} \text{ ist} & \chi_{-\frac{1}{2}}\left(s=+\tfrac{\hbar}{2}\right)=0 \\ & \chi_{-\frac{1}{2}}\left(s=-\tfrac{\hbar}{2}\right)=1. \end{array}\right\} \tag{25.24}$$

Zur Abkürzung schreibt man oft

$$\chi_+=\chi_{+\frac{1}{2}}(s); \qquad \chi_-=\chi_{-\frac{1}{2}}(s).$$

χ_+ und χ_- sind orthonormal, denn es gilt

$$\left.\begin{array}{l} \int|\chi_+|^2\,ds=\left|\chi_+\left(+\tfrac{\hbar}{2}\right)\right|^2+\left|\chi_+\left(-\tfrac{\hbar}{2}\right)\right|^2=1+0=1 \\ \int|\chi_-|^2\,ds=\left|\chi_-\left(+\tfrac{\hbar}{2}\right)\right|^2+\left|\chi_-\left(-\tfrac{\hbar}{2}\right)\right|^2=0+1=1 \\ \int\chi_+\chi_-\,ds=0. \end{array}\right\} \tag{25.25}$$

χ_+ und χ_- sind per Definition die Eigenfunktionen zum Operator s_z des Einzelteilchens:

$$\left.\begin{array}{llll} s_z\chi_+=m_s\hbar\chi_+ & \text{für} \quad m_s=+\dfrac{1}{2}, & \text{also} & s_z\chi_+=\dfrac{\hbar}{2}\chi_+ \\ s_z\chi_-=m_s\hbar\chi_- & \text{für} \quad m_s=-\dfrac{1}{2}, & \text{also} & s_z\chi_-=-\dfrac{\hbar}{2}\chi_-. \end{array}\right\} \tag{25.26}$$

Mit (25.7) ist

$$s_x=\frac{1}{2}(s^++s^-); \qquad s_y=\frac{1}{2i}(s^+-s^-).$$

Dabei ist nach (25.12) und (25.13) mit den Werten für α_{m+1} und β_{m-1}

$$s^+ \chi_+ = 0; \qquad s^+ \chi_- = \hbar \chi_+;$$
$$s^- \chi_+ = \hbar \chi_-; \qquad s^- \chi_- = 0.$$

Also

$$\left.\begin{aligned} s_x \chi_+ &= \frac{\hbar}{2} \chi_- \\ s_x \chi_- &= \frac{\hbar}{2} \chi_+ \end{aligned}\right\} \tag{25.27}$$

und

$$\left.\begin{aligned} s_y \chi_+ &= i \frac{\hbar}{2} \chi_- \\ s_y \chi_- &= -i \frac{\hbar}{2} \chi_+ . \end{aligned}\right\} \tag{25.28}$$

Es ist möglich, auch die Spinfunktionen als Matrizen aufzufassen:

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \chi_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

oder abgekürzt* als Spaltenvektoren:

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Gleichungen (25.27) und (25.28) ergeben sich dann unter Benutzung der PAULI-Matrizen (25.23):

$$s_x \chi_+ = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \chi_-$$

$$s_x \chi_- = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \chi_+$$

$$s_y \chi_+ = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = i \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = i \frac{\hbar}{2} \chi_-$$

$$s_y \chi_- = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -i \frac{\hbar}{2} \chi_+ .$$

Die gesamte ψ-Funktion eines Teilchens hängt nunmehr von den Variablen x, y, z, t und s ab. Wenn sich der Spin separieren läßt, zerfällt

* Die Zusammenfassung von χ_+ und χ_- zu *einer* Matrix, etwa $\begin{pmatrix} \chi_+ & 0 \\ \chi_- & 0 \end{pmatrix}$, ist nicht statthaft.

sie in zwei Funktionen je nach dem Wert der Koordinate s. Allgemeine Schreibweise:

$$\left.\begin{aligned}\Psi_{n,l,m(r,\vartheta,\varphi,s,t)} &= \psi_{(r,\vartheta,\varphi,t)}\,\chi_{(s)}\\ &= c_{n,l,m}\frac{u_{n,l(r)}}{r}\,Y_{l,m(\vartheta,\varphi)}\,\chi_{(s)}\,e^{-\frac{i}{\hbar}E_{n,l}t}.\end{aligned}\right\} \qquad (25.29)$$

Die Eigenfunktionen des Gesamtdrehimpulsoperators $\vec{j}$ sind Produkte aus den $Y_{l,m(\vartheta,\varphi)}$ und den $\chi_{(s)}$ derart, daß $\hbar^2\, j(j+1)$ der Eigenwert des Operators j^2 und $\hbar m_j$ der Eigenwert des Operators j_z wird. Wie man die Funktionen (25.29) dazu zusammensetzen muß, wird in §26 beschrieben.

§ 26. Kopplung zweier Drehimpulse

Der Gesamtdrehimpuls $\vec{J}$ eines Systems sei aus zwei Anteilen $\vec{J}_1$ und $\vec{J}_2$ zusammengesetzt:

$$\left.\begin{aligned}\vec{J} &= \vec{J}_1+\vec{J}_2\\ J_z &= J_{1z}+J_{2z}.\end{aligned}\right\} \qquad (26.1)$$

Wenn kein äußeres Moment und keine inneren Momente zwischen den Teilsystemen wirken, sind $\vec{J}_1$, $\vec{J}_2$ und also auch $\vec{J}$ fest im Raum, und es gelten Erhaltungssätze für J_1^2, J_{1z}, J_2^2, J_{2z}, J^2 und J_z. Die Wahl der z-Richtung ist dann beliebig.

Werden *äußere* Momente „eingeschaltet", z.B. durch Anlegen eines Magnetfeldes (wie die Kopplung zwischen Drehimpuls und Magnetfeld zustandekommt, wird in §28 und §29 behandelt), dann definiert deren Resultierende eine z-Richtung, um die – klassisch gesprochen – die Drehimpulsvektoren der Teilsysteme unabhängig voneinander präzedieren, es bleiben nur J_{1z} und J_{2z} erhalten. Für die Größe J^2 des Gesamtdrehimpulses gilt dann kein Erhaltungssatz, da sie sich laufend ändert. Aber $J_z=J_{1z}+J_{2z}$ bleibt konstant. Die gleiche Überlegung bleibt gültig, wenn die äußeren Momente die inneren stark überwiegen.

Sind andererseits die *inneren* Momente größer als die äußeren, dann präzedieren $\vec{J}_1$ und $\vec{J}_2$ um $\vec{J}$, das seinerseits langsam um das äußere Feld präzediert. Jetzt sind J_{1z} und J_{2z} nicht mehr für sich konstant, nur noch ihre Summe J_z.

In beiden Fällen gilt also nur für $J_z=J_{1z}+J_{2z}$ ein Erhaltungssatz.

Der Effekt der Kopplung auf die Lage der Energieterme muß nach der Störungstheorie berechnet werden. Als Ausgangssystem wird man dabei zweckmäßig das Eigenfunktionssystem bei fehlender Kopplung wählen. Dies kann entweder durch die zu $\vec{J}_1$ und $\vec{J}_2$ oder durch die zu $\vec{J}$ gehörigen Eigenfunktionen dargestellt werden. Wir wollen im folgenden den Zusammenhang

zwischen den beiden möglichen Funktionssystemen aufzeigen. Dies ist notwendig, weil einerseits die Kopplungsenergie oft proportional zu

$$\vec{J}_1\vec{J}_2=\tfrac{1}{2}(J^2-J_1^2-J_2^2)$$

ist *, also den Operator J^2 enthält, während andererseits im allgemeinen die zu den einzelnen Teilsystemen gehörigen Eigenfunktionen zunächst bekannt sein dürften.

Beispiel: Zusammensetzung zweier Spins $\vec{s}^{(1)}$ und $\vec{s}^{(2)}$ zum Gesamtspin $\vec{S}$ bei fehlender Kopplung. Die Spinquantenzahlen seien jeweils $\frac{1}{2}$.

In diesem Beispiel interessiert nur die *Spin*funktion des Gesamtsystems. Nach Voraussetzung ist

$$\vec{S}=\vec{s}^{(1)}+\vec{s}^{(2)}$$
$$S^2=(s^{(1)}+s^{(2)})^2=(s^{(1)})^2+(s^{(2)})^2+2\vec{s}^{(1)}\,\vec{s}^{(2)}$$
$$S_z=s_z^{(1)}+s_z^{(2)}.$$

Versuchsweise soll zunächst untersucht werden, ob die Spineigenfunktionsprodukte

$$\chi_+^{(1)}\chi_+^{(2)};\qquad \chi_+^{(1)}\chi_-^{(2)};\qquad \chi_-^{(1)}\chi_+^{(2)};\qquad \chi_-^{(1)}\chi_-^{(2)} \tag{26.2}$$

Eigenfunktionen zu S^2 und S_z sind oder nicht und welche Eigenwerte sich ergeben. Dazu bildet man

a) $$S_z\chi_+^{(1)}\chi_+^{(2)}=s_z^{(1)}\chi_+^{(1)}\chi_+^{(2)}+s_z^{(2)}\chi_+^{(1)}\chi_+^{(2)}$$
$$=\frac{\hbar}{2}\chi_+^{(1)}\chi_+^{(2)}+\frac{\hbar}{2}\chi_+^{(1)}\chi_+^{(2)}=\hbar\,\chi_+^{(1)}\chi_+^{(2)},$$

b) $$S_z\chi_+^{(1)}\chi_-^{(2)}=\frac{\hbar}{2}\chi_+^{(1)}\chi_-^{(2)}-\frac{\hbar}{2}\chi_+^{(1)}\chi_-^{(2)}=0$$
$$S_z\chi_-^{(1)}\chi_+^{(2)}=-\frac{\hbar}{2}\chi_-^{(1)}\chi_+^{(2)}+\frac{\hbar}{2}\chi_-^{(1)}\chi_+^{(2)}=0$$

also allgemein für beliebige a und b:

$$S_z(a\,\chi_+^{(1)}\chi_-^{(2)}+b\,\chi_-^{(1)}\chi_+^{(2)})=0.$$

c) $$S_z\chi_-^{(1)}\chi_-^{(2)}=-\hbar\,\chi_-^{(1)}\chi_-^{(2)},$$

d) $$S^2\chi_+^{(1)}\chi_+^{(2)}=[(s^{(1)})^2+(s^{(2)})^2+2(s_x^{(1)}s_x^{(2)}+s_y^{(1)}s_y^{(2)}+s_z^{(1)}s_z^{(2)})]\,\chi_+^{(1)}\chi_+^{(2)}$$
$$=\left(\frac{3}{4}\hbar^2+\frac{3}{4}\hbar^2\right)\chi_+^{(1)}\chi_+^{(2)}+2\Bigg(\underbrace{\frac{\hbar}{2}\chi_-^{(1)}\frac{\hbar}{2}\chi_-^{(2)}+i\frac{\hbar}{2}\chi_-^{(1)}\,i\frac{\hbar}{2}\chi_-^{(2)}}_{=0}+$$
$$+\frac{\hbar^2}{4}\chi_+^{(1)}\chi_+^{(2)}\Bigg)=2\hbar^2\chi_+^{(1)}\chi_+^{(2)},$$

* Dabei ist angenommen, daß die Operatoren $\vec{J}_1$ und $\vec{J}_2$ kommutieren, da sie auf verschiedene Systeme wirken.

e) $$S^2 \chi_+^{(1)} \chi_-^{(2)} = \left(\frac{3}{4}\hbar^2 + \frac{3}{4}\hbar^2\right) \chi_+^{(1)} \chi_-^{(2)} + 2\left(\frac{\hbar}{2}\chi_-^{(1)} \frac{\hbar}{2}\chi_+^{(2)} + \right.$$
$$\left. + i\frac{\hbar}{2}\chi_-^{(1)}(-i)\frac{\hbar}{2}\chi_+^{(2)} - \frac{\hbar^2}{4}\chi_+^{(1)}\chi_-^{(2)}\right)$$
$$= \hbar^2 (\chi_+^{(1)} \chi_-^{(2)} + \chi_-^{(1)} \chi_+^{(2)})$$
$$S^2 \chi_-^{(1)} \chi_+^{(2)} = \hbar^2 (\chi_-^{(1)} \chi_+^{(2)} + \chi_+^{(1)} \chi_-^{(2)}),$$

f) $$S^2 \chi_-^{(1)} \chi_-^{(2)} = 2\hbar^2 \chi_-^{(1)} \chi_-^{(2)}.$$

Das Ergebnis dieser Rechnung ist, daß offenbar nicht alle die Produkte (26.2) Eigenfunktionen zu den Operatoren S^2 und S_z sind, wohl aber die in Tabelle 26.1 aufgeführten Kombinationen.

Tabelle 26.1. *Kombination der Spinfunktionen zweier Fermionen*

Eigenfunktion	Eigenwert von S^2	Eigenwert von S_z	Vertauschungs-symmetrie
$\chi_+^{(1)}\chi_+^{(2)}$	$2\hbar^2$	$+\hbar$	symmetrisch
$\frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_+^{(1)}\chi_-^{(2)}+\chi_-^{(1)}\chi_+^{(2)})$	$2\hbar^2$	0	symmetrisch
$\chi_-^{(1)}\chi_-^{(2)}$	$2\hbar^2$	$-\hbar$	symmetrisch
$\frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_+^{(1)}\chi_-^{(2)}-\chi_-^{(1)}\chi_+^{(2)})$	0	0	antisymmetrisch

Die auftretenden Faktoren $1/\sqrt{2}$ sind eine Konsequenz der Orthonormalitätsforderung an die Eigenfunktionen, z.B. (vgl. § 25)

$$\iint \tfrac{1}{2} |\chi_+^{(1)} \chi_-^{(2)} + \chi_-^{(1)} \chi_+^{(2)}|^2 \, ds_1 \, ds_2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1.$$

Die ersten drei Eigenfunktionen lassen sich deuten als die Spinfunktion *eines* Teilchens mit der Quantenzahl $S=1$, also

$$S^2 \chi = \hbar^2 \sqrt{S(S+1)}\,\chi,$$
$$S_z \chi = \hbar M_S \chi \quad \text{mit} \quad M_S = +1, 0, -1.$$

Die letzte Eigenfunktion verhält sich so wie die Spinfunktion eines Teilchens, dessen Quantenzahl $S=0$ ist (dann ist auch $M_S=0$).

Im allgemeinen Fall der Zusammensetzung zweier Drehimpulseigenfunktionen entwickelt man die Gesamtfunktion Ψ nach Produkten der zu jedem Drehimpuls gehörigen Eigenfunktionen ψ bzw. φ. Dies ist erlaubt, solange keine Kopplung zwischen den Systemen herrscht; dann ist Ψ separierbar. Die Entwicklungskoeffizienten C werden durch die Gesamtheit der Quantenzahlen charakterisiert:

$$\Psi_{J_1, J_2, J, M_J} = \sum_{m_1=J_1}^{-J_1} \sum_{m_2=J_2}^{-J_2} C_{J_1, J_2, J; m_1, m_2, M_J} \, \psi_{J_1, m_1} \varphi_{J_2, m_2}, \qquad (26.3)$$

wobei z.B. gilt

$$\left.\begin{aligned} J_{1z}\,\psi_{J_1,m_1} &= \hbar\, m_1\, \psi_{J_1,m_1} \\ J_{2z}\,\varphi_{J_2,m_2} &= \hbar\, m_2\, \varphi_{J_2,m_2} \\ J_z\,\Psi_{J_1,J_2,J,M_J} &= \hbar\, M_J\, \Psi_{J_1,J_2,J,M_J}\,. \end{aligned}\right\} \tag{26.4}$$

Da mit (26.1) stets gilt

$$J_z = J_{1z} + J_{2z}\,,$$

kann man eine der Quantenzahlen eliminieren, z.B. m_2:

$$J_z\,\Psi = \hbar\, M_J\, \Psi = \sum_{m_1}\sum_{m_2} \hbar(m_1+m_2)\, C_{J_1,J_2,J;m_1,m_2,M_J}\, \psi_{J_1,m_1}\, \varphi_{J_2,m_2}\,.$$

Ersetzt man Ψ auf der linken Seite durch (26.3), multipliziert die Gleichung von links mit $\psi^*_{J_1,m_1}\,\varphi^*_{J_2,m_2}$ und integriert über alle Variablen, so erhält man wegen der Orthonormalität der Funktionen ψ_{J_1,m_1} und φ_{J_2,m_2} die Beziehung

$$\hbar\, M_J\, C_{J_1,J_2,J;m_1',m_2',M_J} = \hbar(m_1'+m_2')\; C_{J_1,J_2,J;m_1',m_2',M_J}\,.$$

Daraus folgt

$$C_{J_1,J_2,J;m_1,m_2,M_J} = \delta_{m_2,M_J-m_1}\; C_{J_1,J_2,J;m_1,m_2,M_J}\,.$$

Die Summe über m_2 in (26.3) reduziert sich damit zu einem Glied, und die Koeffizienten C hängen nicht mehr von m_2 ab:

$$\boxed{\Psi_{J_1,J_2,J,M_J} = \sum_{m_1} C_{J_1,J_2,J;m_1,M_J}\, \psi_{J_1,m_1}\, \varphi_{J_2,M_J-m_1}\,.} \tag{26.5}$$

Die Koeffizienten $C_{J_1,J_2,J;m_1,M_J}$ („Clebsch-Gordan-Koeffizienten") lassen sich explizit bestimmen, indem man die Operatoren J^+ und J^- in geeigneter Weise auf (26.5) anwendet*. Ohne Beweis sei hier die allgemeine Formel angegeben: Für $m_2 = M_J - m_1$ ist

$$C_{J_1,J_2,J;m_1,M_J} = \sqrt{2J+1}\,\sqrt{\frac{(J_1+J_2-J)!\,(J_2+J-J_1)!\,(J+J_1-J_2)!}{(J_1+J_2+J+1)!}}\times$$
$$\times\sqrt{(J+M_J)!\,(J-M_J)!\,(J_1+m_1)!\,(J_1-m_1)!\,(J_2+m_2)!\,(J_2-m_2)!}\times$$
$$\times\sum_{\nu=0}^{J-M_J}\frac{(-1)^\nu}{\nu!\,(J_1+J_2-J-\nu)!\,(J_1-m_1-\nu)!\,(J_2+m_2-\nu)!\,(J-J_2+m_1+\nu)!\,(J-J_1-m_2+\nu)!}\,.$$

Dieser Ausdruck ist lang und unübersichtlich. Für kleine Werte von J_1 kann man sich jedoch zugänglichere Darstellungen verschaffen:

* Siehe E. U. Condon und G. H. Shortley: The Theory of Atomic Spectra, Cambridge University Press, London 1957, Chapter III.

a) $J_1 = 0$. Dann gibt es nur Koeffizienten für $J = J_2$, $m_1 = 0$:

$$C_{0,J,J;0,M_J} = 1 \qquad \text{(unabhängig von } J \text{ und } M_J\text{)}.$$

b) $J_1 = \frac{1}{2}$. Dann gibt es nicht verschwindende Koeffizienten für

$$J = J_2 \pm \tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad m_1 = \pm \tfrac{1}{2}:$$

	$m_1 = +\frac{1}{2}$	$m_1 = -\frac{1}{2}$
$C_{\frac{1}{2},J_2,J_2+\frac{1}{2};m_1 M_J}$	$\sqrt{\frac{J_2+M_J+\frac{1}{2}}{2J_2+1}}$	$\sqrt{\frac{J_2-M_J+\frac{1}{2}}{2J_2+1}}$
$C_{\frac{1}{2},J_2,J_2-\frac{1}{2};m_1 M_J}$	$\sqrt{\frac{J_2-M_J+\frac{1}{2}}{2J_2+1}}$	$-\sqrt{\frac{J_2+M_J+\frac{1}{2}}{2J_2+1}}$

(26.6)

Ein Beispiel sind die in Tabelle 26.1 aufgeführten Kombinationen (dort ist $J_2 = \frac{1}{2}$).

c) $J_1 = 1$. Dann gibt es nicht verschwindende Koeffizienten für $J = J_2 + 1$, J_2, $J_2 - 1$ und $m_1 = 1, 0, -1$:

	$m_1 = +1$	$m_1 = 0$
$C_{1,J_2,J_2-1;m_1,M_J}$	$\sqrt{\frac{(J_2-M_J)(J_2-M_J+1)}{2J_2(2J_2+1)}}$	$-\sqrt{\frac{(J_2-M_J)(J_2+M_J)}{2J_2(2J_2+1)}}$
$C_{1,J_2,J_2;m_1,M_J}$	$\sqrt{\frac{(J_2+M_J)(J_2-M_J+1)}{2J_2(2J_2+1)}}$	$\frac{M_J}{\sqrt{J_2(2J_2+1)}}$
$C_{1,J_2,J_2+1;m_1,M_J}$	$\sqrt{\frac{(J_2+M_J)(J_2+M_J+1)}{(2J_2+1)(2J_2+2)}}$	$\sqrt{\frac{(J_2-M_J+1)(J_2+M_J+1)}{(2J_2+1)(2J_2+2)}}$

	$m_1 = -1$
$C_{1,J_2,J_2-1;m_1,M_J}$	$\sqrt{\frac{(J_2+M_J+1)(J_2+M_J)}{2J_2(2J_2+1)}}$
$C_{1,J_2,J_2;m_1,M_J}$	$-\sqrt{\frac{(J_2+M_J+1)(J_2-M_J)}{2J_2(+1)}}$
$C_{1,J_2,J_2+1;m_1,M_J}$	$\sqrt{\frac{(J_2-M_J+1)(J_2-M_J)}{(2J_2+1)(2J_2+2)}}$

(26.7)

Beispiel: Zusammensetzung von Spin und Bahn eines Einzelteilchens mit Spin $\frac{1}{2}$:

$$(s^2)_{\text{op}}\,\chi = \tfrac{3}{4}\hbar^2\chi; \qquad (s_z)_{\text{op}}\,\chi = \pm\tfrac{1}{2}\hbar\chi.$$

Die Quantenzahl l kann einen beliebigen ganzzahligen Wert haben: $l=0, 1, 2, \ldots$. Die Summe (26.5) reduziert sich auf zwei Glieder [die Ψ-Funktion enthält gemäß (21.14) als zusätzlichen, ersten Index die Hauptquantenzahl n des Zustandes]

$$\Psi_{n,\frac{1}{2},l,j,m_j} = \sum_{m_s=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} C_{\frac{1}{2},l,j;m_s,m_j}\, \chi_{\frac{1}{2},m_s}\, \psi_{n,l,m_j-m_s} \tag{26.8}$$

mit

$$\chi_{\frac{1}{2},m_s} = \begin{cases} \chi_+ & \text{für} \quad m_s=+\frac{1}{2} \\ \chi_- & \text{für} \quad m_s=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

und

$$\psi_{n,l,m_j-m_s} = \frac{u_{n\,l\,(r)}}{r}\, Y_{l,m_j-m_s\,(\vartheta,\varphi)}\,.$$

Um die Werte der CLEBSCH-GORDAN-Koeffizienten zu bestimmen, setzen wir

$$\begin{aligned} J_1 &= s = \tfrac{1}{2}; & m_1 &= m_s \\ J_2 &= l; & m_2 &= m_j - m_s \\ J &= j; & M_J &= m_j\,. \end{aligned}$$

Damit wird für $j=l+\frac{1}{2}$ aus (26.8) mit (26.6)

$$\left.\begin{aligned} &\Psi_{n,\frac{1}{2},l,j,m_j} \\ &= \left[\sqrt{\frac{l+m_j+\frac{1}{2}}{2l+1}}\, \chi_+\, Y_{l,m_j-\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{l-m_j+\frac{1}{2}}{2l+1}}\, \chi_-\, Y_{l,m_j+\frac{1}{2}}\right] \frac{u_{n,l\,(r)}}{r} \end{aligned}\right\} \tag{26.9}$$

und für $j=l-\frac{1}{2}$

$$\left.\begin{aligned} &\Psi_{n,\frac{1}{2},l,j,m_j} \\ &= \left[\sqrt{\frac{l-m_j+\frac{1}{2}}{2l+1}}\, \chi_+\, Y_{l,m_j-\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{l+m_j+\frac{1}{2}}{2l+1}}\, \chi_-\, Y_{l,m_j+\frac{1}{2}}\right] \frac{u_{n,l\,(r)}}{r}\,. \end{aligned}\right\} \tag{26.10}$$

Einfachster Fall: $l=0$ (z.B. Grundzustand des Wasserstoffatoms). Dann ist $j=\frac{1}{2}$, $m_j=\pm\frac{1}{2}$. Es gibt nur den Fall $j=l+\frac{1}{2}$, da die Quantenzahl j nicht negativ sein kann. Also bekommt man nur zwei Zustände, deren Wellenfunktionen aus (26.9) gewonnen werden:

$$\Psi_{n,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \chi_+\, Y_{0,0}\, \frac{u_{n,0\,(r)}}{r}\,,$$

$$\Psi_{n,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \chi_-\, Y_{0,0}\, \frac{u_{n,0\,(r)}}{r}\,.$$

Solange der HAMILTON-Operator keine Spinabhängigkeit enthält, sind die beiden Zustände energieentartet. Eine energetische Trennung der beiden Niveaus erfolgt z.B. im Magnetfeld (s. § 29).

Nächsteinfacher Fall: $l=1$ (z.B. erster angeregter Zustand des Wasserstoffatoms). Dann ist entweder $j=\frac{3}{2}$ oder $j=\frac{1}{2}$. Im Falle $j=\frac{3}{2}$ folgt aus (26.9)

$$\Psi_{n,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},\frac{3}{2}}=\chi_+ Y_{1,1}\frac{u_{n,1}(r)}{r}$$

$$\Psi_{n,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},\frac{1}{2}}=\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\chi_+ Y_{1,0}+\sqrt{\frac{1}{3}}\chi_- Y_{1,1}\right)\frac{u_{n,1}(r)}{r}$$

$$\Psi_{n,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},-\frac{1}{2}}=\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\chi_+ Y_{1,-1}+\sqrt{\frac{2}{3}}\chi_- Y_{1,0}\right)\frac{u_{n,1}(r)}{r}$$

$$\Psi_{n,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},-\frac{3}{2}}=\chi_- Y_{1,-1}\frac{u_{n,1}(r)}{r}$$

und im Falle $j=\frac{1}{2}$ aus (26.10)

$$\Psi_{n,\frac{1}{2},1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}=\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\chi_+ Y_{1,0}-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi_- Y_{1,1}\right)\frac{u_{n,1}(r)}{r}$$

$$\Psi_{n,\frac{1}{2},1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}=\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\chi_+ Y_{1,-1}-\sqrt{\frac{1}{3}}\chi_- Y_{1,0}\right)\frac{u_{n,1}(r)}{r}.$$

Sobald eine Spin-Bahn-Kopplung besteht (s. § 31), spaltet der angeregte Zustand in zwei Zustände auf mit $j=\frac{3}{2}$ bzw. $j=\frac{1}{2}$ (Feinstrukturaufspaltung). Der Zustand mit $j=\frac{3}{2}$ ist dann vierfach entartet („statistisches Gewicht" 4), der Zustand mit $j=\frac{1}{2}$ zweifach entartet („statistisches Gewicht" 2). Werden beide Zustände z.B. durch Einstrahlen eines Lichtstrahls mit breitem Frequenzband bevölkert, so verhalten sich die Intensitäten des wieder abgestrahlten Feinstrukturdubletts wie 2:1.

In einem zusätzlichen Magnetfeld wird die Entartung aufgehoben, alle 6 Zustände liegen dann energetisch separiert.

Die obigen Ψ-Funktionen können als Ausgangsfunktionen für die Rechnung zum Auffinden der Spin-Bahn-Kopplungsenergie bzw. der magnetischen Wechselwirkungsenergie benutzt werden (vgl. § 31 und § 29).

Oft enthalten die Wechselwirkungsoperatoren skalare Produkte aus Drehimpulsvektoren. Die Funktionen (26.5) haben die Eigenschaft, Eigenfunktionen auch dieser Skalarprodukte zu sein. Wegen

$$\vec{J}=\vec{J}_1+\vec{J}_2$$

ist, wenn $\vec{J}_1$ und $\vec{J}_2$ kommutieren,

$$(\vec{J}_1\vec{J}_2)=\tfrac{1}{2}(J^2-J_1^2-J_2^2)$$

und entsprechend

$$(\vec{J}\vec{J}_1)=\tfrac{1}{2}(J^2+J_1^2-J_2^2)$$

sowie

$$(\vec{J}\vec{J}_2)=\tfrac{1}{2}(J^2-J_1^2+J_2^2).$$

Damit ergeben sich die Relationen

$$(\vec{J}_1\,\vec{J}_2)\,\Psi_{J_1,J_2,J,M_J}=\frac{\hbar^2}{2}\left[J(J+1)-J_1(J_1+1)-J_2(J_2+1)\right]\Psi_{J_1,J_2,J,M_J}, \quad (26.11)$$

$$(\vec{J}\,\vec{J}_1)\,\Psi_{J_1,J_2,J,M_J}=\frac{\hbar^2}{2}\left[J(J+1)+J_1(J_1+1)-J_2(J_2+1)\right]\Psi_{J_1,J_2,J,M_J}, \quad (26.12)$$

$$(\vec{J}\,\vec{J}_2)\,\Psi_{J_1,J_2,J,M_J}=\frac{\hbar^2}{2}\left[J(J+1)-J_1(J_1+1)+J_2(J_2+1)\right]\Psi_{J_1,J_2,J,M_J}. \quad (26.13)$$

Die Zusammensetzung von mehr als zwei Drehimpulsen zu einem resultierenden Gesamtdrehimpuls läßt sich im Prinzip nach derselben Methode vornehmen. Man setzt zunächst zwei Drehimpulse zusammen, fügt dann den dritten hinzu usw. Es stellt sich jedoch heraus, daß bei nicht verschwindender Kopplungsenergie die Reihenfolge der Zusammensetzung das Resultat beeinflußt.

So wird man bei schwacher Spin-Bahn-Kopplung zunächst alle Spins des Systems zum Gesamtspin $\vec{S}$ und alle Bahndrehimpulse zum Gesamtbahndrehimpuls $\vec{L}$ zusammensetzen und erhält den Gesamtdrehimpuls aus

$$\vec{J}=\vec{L}+\vec{S}.$$

Für vernachlässigbar kleine Spin-Bahn-Kopplung (dieser Grenzfall heißt RUSSELL-SAUNDERS-Kopplung) sind dann außer J und M_J auch L, M_L, S und M_S „gute" Quantenzahlen, d.h. es gilt

$$J^2\Psi=\hbar^2 J(J+1)\,\Psi; \qquad L^2\,\Psi=\hbar^2 L(L+1)\,\Psi; \qquad S^2\,\Psi=\hbar^2 S(S+1)\,\Psi$$

$$J_z\Psi=\hbar M_J\Psi; \qquad L_z\Psi=\hbar M_L\Psi; \qquad S_z\Psi=\hbar M_S\Psi.$$

Der andere Extremfall ist starke Spin-Bahn-Kopplung des Einzelteilchens und schwache Wechselwirkung der Einzelteilchen-Gesamtdrehimpulse untereinander („j-j-Kopplung"). Dann ist

$$\vec{l}_i+\vec{s}_i=\vec{j}_i \qquad (i=1,2,\ldots,N) \qquad (N=\text{Teilchenzahl})$$

$$\vec{J}=\sum_{i=1}^{N}\vec{j}_i.$$

Mit J und M_J sind bei verschwindender Wechselwirkung zwischen den $\vec{j}_i$-Vektoren die j_i und m_{ji} „gute" Quantenzahlen.

Um die Eigenfunktion des Gesamtsystems zu erhalten, wird man sinnvollerweise die Drehimpulse in der Reihenfolge der Kopplungsstärke miteinander koppeln. Das Problem des Auffindens der Energieeigenwerte und -eigenfunktionen in einem komplizierteren System ist oft mit erheblicher

Rechenarbeit verbunden. Die sehr nützlichen Verfahren von RACAH können im Rahmen dieses Buches nicht erläutert werden *.

Die wichtigsten Formeln der *Störungstheorie*, auf die im Laufe dieses Paragraphen wiederholt hingewiesen wurde, sind im Anhang zusammengestellt. Ein Beispiel für die Durchführung einer Störungsrechnung findet sich in §29.

Übungen zu Teil B

Zu Kapitel VIII:

1. Berechne den Vorfaktor in (22.13) für die beim natürlichen α-Zerfall eines schweren Kernes plausiblen Bedingungen $E = 5$ MeV, $V_0 = 50$ MeV, $V_1 = 30$ MeV, $\Delta = 4 \cdot 10^{-12}$ cm und zeige, daß sein Einfluß klein ist gegen den des Terms $e^{-2\kappa\Delta}$.

2. Normiere (22.23) für $l = 0$ und $l = 1$.

3. Löse die SCHRÖDINGER-Gleichung für den linearen harmonischen Oszillator $(V = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2)$. Finde die Energieeigenwerte und die Wellenfunktionen.

Hilfe: Benutze die durch die Gleichung

$$e^{-(s-y)^2}\, e^{y^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_{n(y)} \frac{s^n}{n!}$$

definierten HERMITE-Polynome $H_{n(y)}$ zur Darstellung der Wellenfunktionen. Zeichne $|\psi|^2$ als Funktion von x für die drei Quantenzustände mit der niedrigsten Energie. Vergleiche mit dem Verhalten eines klassischen linearen Oszillators.

4. Löse die SCHRÖDINGER-Gleichung mit dem Potential

$$U = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi \varepsilon_0 r}$$

(Wasserstoffatom). Finde die Wellenfunktionen für die Fälle $l = 0$, $l = 1$ und $l = 2$ und trage in einem Diagramm $|u|^2$ gegen r auf. Vergleiche die Eigenwerte für die Energie mit der BOHRschen Formel (5.4) und die Maxima der Wellenfunktionen mit den BOHRschen Radien.

Hilfe: Substituiere $u = e^{\alpha r} \cdot r^{l+1} \cdot f_{(r)}$ in der SCHRÖDINGER-Gleichung und setze $f_{(r)}$ als Potenzreihe an.

5. Schreibe die Gleichung (24.1) in Matrixform.

6. Beweise die Gleichung (24.4) allgemein.

7. Die Teilchendichte eines aus A Teilchen bestehenden Systems kann durch den Operator

$$\rho_{\text{op}} = \sum_{i=1}^{A} \delta_{(\vec{r} - \vec{r}_i)}$$

beschrieben werden. Benutze (24.4) als Wellenfunktionsansatz für das Gesamtsystem und zeige, daß der Erwartungswert des Dichteoperators, d.h. die meßbare Teilchendichte, sich darstellen läßt als

$$\rho_{(\vec{r})} = \sum_{i=1}^{A} |\psi_{i(\vec{r})}|^2,$$

* Siehe M. E. ROSE: Elementary Theory of Angular Momentum, John Wiley, 1957, und A. R. EDMONDS, Angular Momentum in Quantum Mechanics, Princeton University Press, Princeton 1957.

wobei die Normierungen

$$\int \rho_{(\vec{r})}\, d\tau = A; \qquad \int |\psi_{i\,(\vec{r})}|^2\, d\tau = 1$$

verwendet wurden.

Zu Kapitel IX:

1. Wie lauten die Matrizen für J_x, J_y, J_z, J_+, J_- und J^2, wenn die Quantenzahl J den Wert 0 (1, $\frac{3}{2}$) hat?

2. Benutze (26.9) und (26.10), um die möglichen Wellenfunktionen eines Teilchens mit Spin $\frac{1}{2}$ bei einer Bahndrehimpulsquantenzahl $l=2$ zu finden. Durch Berechnung des Integrals

$$\int \Psi_i^* \Psi_k\, d\tau$$

zeige, daß je zwei der Funktionen zueinander orthonormal sind.

3. Berechne die folgenden Matrixelemente der Operatoren σ_x, σ_y, σ_z, σ_+ und σ_-:

$$\int \chi_+^* \sigma_i \chi_+\, ds, \qquad \int \chi_+^* \sigma_i \chi_-\, ds, \qquad \int \chi_-^* \sigma_i \chi_+\, ds, \qquad \int \chi_-^* \sigma_i \chi_-\, ds.$$

4. Welchen Satz von Quantenzahlen hat ein System von drei gleichen Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ (Kopplungen vernachlässigt) im Grundzustand? Welche Möglichkeit gibt es für die Spinfunktion des Gesamtsystems? Untersuche die Eigenwerte der Operatoren S^2 und S_z, die Multiplizität der Zustände und die Vertauschungssymmetrien.

5. Beweise das „Additionstheorem der Kugelfunktionen“

$$P_{l\,(\cos\theta)} = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} Y^*_{l,m\,(\theta',\Phi')}\, Y_{l,m\,(\omega,\alpha)},$$

wenn θ, θ' und ω die drei Seiten eines sphärischen Dreiecks sind und $\Phi'-\alpha$ der Winkel gegenüber θ ist (vgl. Fig. 30.2).

6. Der Nichtvertauschbarkeit (25.3) der Komponenten des Bahndrehimpulses entspricht eine Unschärferelation. Wie heißt sie und was ist ihre anschauliche Bedeutung?

TEIL C

X. Kernspin und Kernmomente

In diesem Kapitel wollen wir einige Eigenschaften der Atomkerne vom Gesichtspunkt der Quantenmechanik behandeln. Am interessantesten sind solche Eigenschaften, die als Folge der Erhaltungssätze zeitlich ungeändert bleiben, also für den Kernzustand charakteristisch sind. Für jede solche Erhaltungsgröße kann man dem Kernniveau eine Quantenzahl zuordnen.

Da man die Systematik der Sätze von Quantenzahlen von Zustand zu Zustand und von Kern zu Kern bis heute nicht aus allgemeinen Prinzipien über die Kernkräfte und die Beschaffenheit der Kernmaterie herleiten kann, ist man auf Modellvorstellungen angewiesen, mit denen man dem Verständnis der Naturgegebenheiten näherzukommen hofft. Es ist eine der Zielsetzungen dieses Buches zu zeigen, wie viele experimentelle Tatsachen man auf der einen Seite durch simple Modelle näherungsweise zu deuten vermag, aber wie schwierig es auf der anderen Seite ist, Modelle zu ersinnen, die das Verhalten der Kerne quantitativ wiedergeben.

In §27 werden die einen Kernzustand charakterisierenden Größen zusammengestellt. Davon ausgehend behandelt §28 das magnetische Kerndipolmoment vom elementaren Standpunkt; mit Hilfe des SCHMIDT-SCHÜLER-Modells wird versucht, das experimentelle Material für die Grundzustände der Kerne mit ungerader Nukleonenzahl zu systematisieren. In §29 und §30 werden die Einflüsse des magnetischen Kerndipolmoments und des elektrischen Kernquadrupolmoments auf die Spektrallinien der Atome diskutiert und dabei einige Meßverfahren für den Kernspin und die Kernmomente angegeben. Dabei kommen viele der quantenmechanischen Ergebnisse aus Teil B zur Anwendung.

§ 27. Charakteristische Eigenschaften der Kernzustände

Ein Kern im Grundzustand oder in einem angeregten Zustand ist ein kompliziertes System bestehend aus A Nukleonen. Da man die genaue Form der Wechselwirkung zwischen den Nukleonen nicht kennt, ist es im

allgemeinen nicht möglich, die HAMILTON-Funktion des Kerns aufzustellen und das SCHRÖDINGER-Problem zu lösen. Man ist auf modellmäßige Näherungsansätze angewiesen, von denen einige einfache Beispiele im Laufe der nächsten Kapitel behandelt werden.

Trotzdem kann man nach den Ergebnissen des §24 einige allgemeine Feststellungen treffen:

a) Es gilt ein Erhaltungssatz für den *Gesamtdrehimpuls* eines Kernzustandes dann, wenn der Kern keinen äußeren Momenten unterliegt. Der Gesamtdrehimpuls setzt sich aus den Bahn- und Spindrehimpulsen aller Nukleonen zusammen und wird — im Unterschied zum Gesamtdrehimpuls $\vec{J}$ der Elektronenhülle — durch den Buchstaben $\vec{I}$ gekennzeichnet. Meist wird er „Kernspin" genannt (unglücklicher Doppelgebrauch des Begriffes „Spin"). Wenn die Anzahl A der Nukleonen im Kern gerade ist, muß die Quantenzahl I ganzzahlig sein; bei ungeradem A ist I halbzahlig*.

Aus den Messungen hat sich ergeben, daß alle *g*-*g*-Kerne im Grundzustand den Kernspin $I=0$ haben. Daraus und aus der Tatsache, daß im allgemeinen $N \neq Z$ ist, läßt sich schließen, daß Protonen- und Neutronenpaare sich drehimpulsmäßig gegenseitig absättigen (vgl. Paarungsenergie §13). Dies gibt einen Hinweis auf die im Kern vorherrschende *j*-*j*-Kopplung.

u-*u*-Kerne haben alle ganzzahligen Kernspin, allerdings ist dieser im allgemeinen von Null verschieden.

Alle *u*-*g*- und *g*-*u*-Kerne haben halbzahlige Kernspins zwischen $\frac{1}{2}\hbar$ und $\frac{9}{2}\hbar$. Mit Hilfe des Schalenmodells (s. §32) ist es gelungen, die zunächst unübersichtlich erscheinende Verteilung (s. Fig. 27.1) theoretisch zu erklären.

Es sei darauf hingewiesen, daß das Quadrat des *Bahn*drehimpulses, also L^2, im Kernverband nicht notwendig „scharf" quantisiert ist. Dies wäre nur dann der Fall, wenn die Potentialfunktion U des Kernsystems streng kugelsymmetrisch wäre. Dies ist jedoch in der Natur im allgemeinen nicht erfüllt und kann nur als Näherung angesetzt werden (s. auch §37).

b) Die *z-Komponente des Gesamtdrehimpulses*, charakterisiert durch den Operator I_z bzw. die Quantenzahl m_I, ist eine Erhaltungsgröße, wenn das Kernpotential nicht vom Azimutwinkel abhängt. Solange jedoch keine ausgezeichnete Richtung vorgegeben ist, wie dies z. B. durch Anlegen eines elektrischen oder magnetischen Feldes geschehen könnte, ist eine Angabe des Wertes für m_I nicht sinnvoll. Herrscht ein äußeres Feld, dann hängen die Energieeigenwerte über die Wechselwirkung des Kerns mit dem Feld von der Quantenzahl m_I ab und die ohne Feld bestehende $(2I+1)$-fache Entartung der Energiezustände wird — zumindest teilweise — aufgehoben.

* Da dies experimentell stets erfüllt ist, kann eindeutig geschlossen werden, daß die Kerne nicht aus A Protonen und Z Elektronen bestehen. Sonst müßten *u*-*u*-Kerne wie $_1H^2$, $_3Li^6$, $_5B^{10}$, $_7N^{14}$ einen halbzahligen Kernspin haben, was mit dem Experiment nicht in Einklang steht.

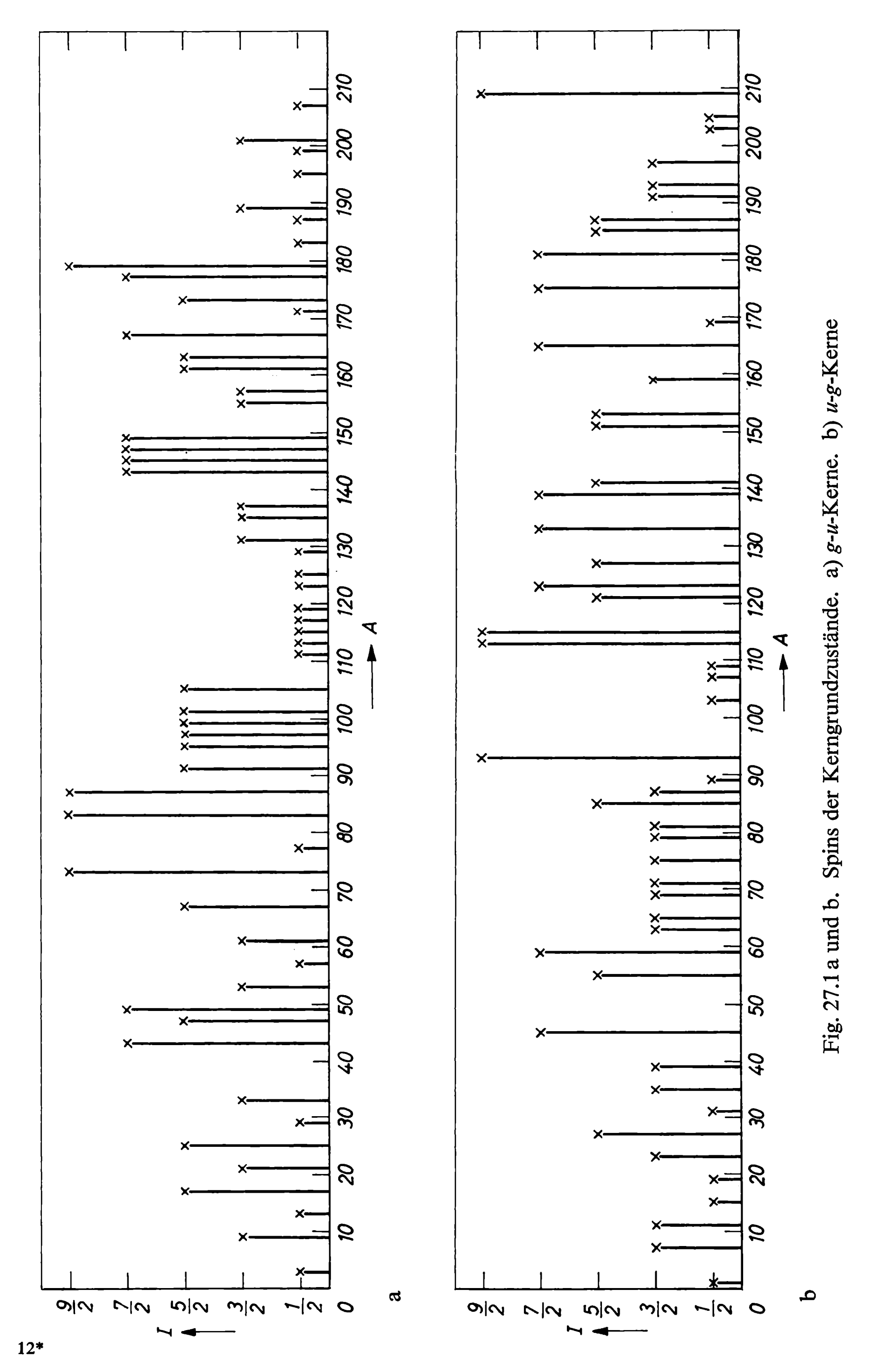


Fig. 27.1 a und b. Spins der Kerngrundzustände. a) *g-u*-Kerne. b) *u-g*-Kerne

c) Wenn das Kernpotential eine gerade Funktion der Ortskoordinaten ist – dies muß aus den bisherigen experimentellen Ergebnissen geschlossen werden (Ausnahme: schwache Wechselwirkung beim β-Zerfall) – gilt nach §24 ein Erhaltungssatz für die *Parität*. Wenn der Bahndrehimpuls der Nukleonen im Kern erhalten wird, d.h. wenn L eine „gute" Quantenzahl ist, wird die Parität durch $(-1)^L$ gegeben. Aber auch wenn L keine gute Quantenzahl ist, hat die Parität des Kernzustandes stets einen der beiden Eigenwerte $+1$ oder -1.

d) Die *Energie* eines Kernzustandes ist für diesen charakteristisch.

Die Energie eines angeregten Kernzustandes ist nicht beliebig „scharf"; ihre Unschärfe ist mit der Lebensdauer τ des Zustandes über die HEISENBERGsche Unschärferelation verknüpft [vgl. (11.2)]:

$$\Delta E \cdot \tau \geqq \hbar .$$

Als „Linienbreite" wird die die Energieunschärfe kennzeichnende Größe

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau}$$

bezeichnet (vgl. §41 ff.). Zum Beispiel hat ein Zustand mit einer Halbwertszeit von 10^{-19} sec eine Linienbreite von etwa 5 keV, bei einer Halbwertszeit von 10^{-12} sec ist die Linienbreite $5 \cdot 10^{-4}$ eV. Nur der Grundzustand eines stabilen Kerns ist unendlich scharf ($\Gamma = 0$)*.

e) Als Folge der Spins der Nukleonen und ihrer Bahnbewegung im Kern besitzt ein Kernzustand mit nicht verschwindendem Gesamtdrehimpuls ein *magnetisches Dipolmoment*. Wie in §28 gezeigt wird, ist der Vektor $\vec{\mu}_I$ dieses Dipolmoments im zeitlichen Mittel proportional zum Gesamtdrehimpulsvektor $\vec{I}$. Die Proportionalität läßt sich darstellen als [s. (28.9)]

$$\vec{\mu}_I = -g_I \frac{\mu_K}{\hbar} \vec{I} ,$$

wobei die Größe

$$\mu_K = \frac{\mu_0 e \hbar}{2 m_p} = 3{,}152 \cdot 10^{-12} \frac{\text{eV}}{\text{Gauß}}$$

als „Kernmagneton" bezeichnet wird. Die eigentliche Kerneigenschaft ist in dem dimensionslosen Faktor g_I („Kern-g-Faktor") enthalten, aus dessen Messwert man Schlüsse auf die innere Struktur des Kernzustandes ziehen kann.

---

* Der Energieerhaltungssatz gilt für den *Kern allein* streng nur, wenn dieser sich im *stabilen* Grundzustand befindet. Sonst wird die Energie nur im Gesamtsystem aus Kern und emittiertem Teilchen erhalten; die Energie des Kerns ist dann um $\Gamma = \hbar/\tau$ unbestimmt.

Darüberhinaus besitzen nicht kugelsymmetrische Kernzustände aufgrund ihrer räumlichen ausgedehnten Ladungsverteilung ein *elektrisches Quadrupolmoment*, dessen Größe von der Form der Ladungsverteilung abhängt (s. §30). Wieder erhält man aus der Messung des Kernquadrupolmomentes Aufschlüsse über die innere Kernstruktur.

Höhere Kernmomente sind bisher kaum beobachtet worden, daher wird hier auf eine Diskussion verzichtet.

f) Schließlich konnte, besonders bei leichten Kernen, aus der Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte eine weitere Eigenschaft der Kernzustände abgeleitet werden, die durch die Quantenzahlen T und T_3 des *Isospins* beschrieben wird, siehe dazu §37.

Weitere Quantenzahlen können für jeden weiteren Erhaltungssatz eingeführt werden, so z.B. für die Erhaltungssätze von Baryonenzahl und Leptonenzahl. Diese werden aber im Rahmen dieses Buches keine Rolle spielen.

§ 28. Magnetisches Kerndipolmoment

Schon klassisch bedingt die Existenz eines Bahndrehimpulses bei einem geladenen Teilchen, das sich auf einer geschlossenen Bahn bewegt, das Vorhandensein eines magnetischen Dipolmomentes. Denn umläuft ein Teilchen der Ladung ze (e=Elektronenladung) das Kraftzentrum mit der Frequenz ν, so kann man die Bahn als einen Stromfaden der Stromstärke

$$i = z e \nu$$

auffassen. Aus dem KEPLERschen Flächensatz (3.2) folgt

$$\frac{d\vec{F}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\vec{l}}{m} = \text{const}$$

und durch Integration über eine Periode T

$$\vec{F} = \frac{1}{2}\frac{T}{m}\vec{l},$$

wenn $\vec{F}$ ein Vektor des Betrages F und der Richtung der Flächennormalen ist.

Aus der Theorie des Elektromagnetismus ergibt sich für das magnetische Moment $\vec{\mu}_l$ eines stromdurchflossenen Ringes

$$\vec{\mu}_l = \mu_0\, i\, \vec{F}; \qquad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\text{Volt}\cdot\text{sec}}{\text{Amp}\cdot\text{m}}.$$

Eine Kombination beider Ausdrücke liefert

$$\vec{\mu}_l = \frac{z e}{2m} \mu_0 \vec{l}.$$

Also sind $\vec{\mu}_l$ und $\vec{l}$ einander proportional. Die Proportionalitätskonstante wird als „gyromagnetisches Verhältnis“ bezeichnet. Durch das Vorzeichen der Ladung ze wird bestimmt, ob $\vec{\mu}_l$ und $\vec{l}$ parallel oder antiparallel gerichtet sind.

Diese Relation wird in die Quantenmechanik übernommen. Da aber die Elementarteilchen zusätzlich zum Bahndrehimpuls einen Spin besitzen, muß untersucht werden, ob auch der Spindrehimpuls mit einem magnetischen Moment verbunden ist oder nicht. Das Experiment hat positiv entschieden; allerdings ist das gyromagnetische Verhältnis nicht allein durch $\frac{ze}{2m}\mu_0$ gegeben, es tritt ein dimensionsloser Korrekturfaktor g_s' hinzu. Zweckmäßig kombiniert man die Größe z mit diesem Faktor zu $g_s = z g_s'$ und erhält

$$\vec{\mu}_s = -g_s \frac{\mu_0 e}{2m} \vec{s}. \tag{28.1}$$

Der Faktor g_s ist für Elektron, Proton und Neutron verschieden (s. Tabelle 28.1).

Entsprechend kann man einen Faktor g_l einführen, der die Ladungszahl z einschließt:

$$\vec{\mu}_l = -g_l \frac{\mu_0 e}{2m} \vec{l}. \tag{28.2}$$

Tabelle 28.1. *g-Faktoren und magnetische Momente von Elektron, Proton und Neutron*

Teilchen	z	g_l	g_s	$\vec{\mu}_l$	$\vec{\mu}_s$	g_j bzw. g_i
Elektron	-1	1	2,0023	$-\frac{\mu_0 e}{2m_e}\vec{l}$	$-2{,}0023\frac{\mu_0 e}{2m_e}\vec{s}$	$\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\frac{l(l+1)-s(s+1)}{j(j+1)}$
Proton	$+1$	-1	$-5{,}5851$	$+\frac{\mu_0 e}{2m_p}\vec{l}$	$+5{,}5851\frac{\mu_0 e}{2m_p}\vec{s}$	$-3{,}29+2{,}29\frac{l(l+1)-s(s+1)}{i(i+1)}$
Neutron	0	0	3,8256	0	$-3{,}8256\frac{\mu_0 e}{2m_n}\vec{s}$	$+1{,}91-1{,}91\frac{l(l+1)-s(s+1)}{i(i+1)}$

Tabelle 28.1 gibt eine Übersicht über die g-Faktoren und magnetischen Momente von Elektron, Proton und Neutron. Die Abweichungen der g_s-Werte für Proton und Neutron vom aus der DIRAC-Theorie verständlichen Wert für das Elektron sind theoretisch bisher nicht geklärt. Man erhofft

eine Herleitung dieser Werte aus einer konsequenten Mesonentheorie der Kernkräfte.

Bei Zusammensetzung von Spin- und Bahndrehimpuls zum Gesamtdrehimpuls zeigt der Vektor $\vec{\mu}$ aufgrund des anomalen g_s-Faktors nicht mehr in die Richtung des Vektors $\vec{j}$ (oder antiparallel). Da aber – ohne äußeres Drehmoment – ein Erhaltungssatz für den Gesamtdrehimpuls gilt, wird der Vektor

$$\vec{\mu} = \vec{\mu}_l + \vec{\mu}_s$$

mit $\vec{l}$ und $\vec{s}$ um den Vektor $\vec{j}$ präzedieren, so daß im zeitlichen Mittel nur die Komponente von $\vec{\mu}$ in $\vec{j}$-Richtung erhalten bleibt (s. Fig. 28.1). Man entnimmt der Figur den Zusammenhang

$$\vec{\mu}_j = -\frac{\mu_0 e}{2m}\left[(g_l \vec{l} + g_s \vec{s})\frac{\vec{j}}{|\vec{j}|}\right]\frac{\vec{j}}{|\vec{j}|}, \qquad (28.3)$$

was sich darstellen läßt als

$$\vec{\mu}_j = -g_j \frac{\mu_0 e}{2m}\vec{j}. \qquad (28.4)$$

Mit (26.12) und (26.13) ergibt sich aus (28.3) ein quantenmechanischer Ausdruck für g_j:

$$g_j = \frac{g_l \frac{1}{2}\hbar^2[j(j+1) + l(l+1) - s(s+1)]}{\hbar^2 j(j+1)} + \frac{g_s \frac{1}{2}\hbar^2[j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)]}{\hbar^2 j(j+1)},$$

$$g_j = \frac{1}{2}(g_l + g_s) + \frac{1}{2}(g_l - g_s)\frac{l(l+1) - s(s+1)}{j(j+1)}.$$

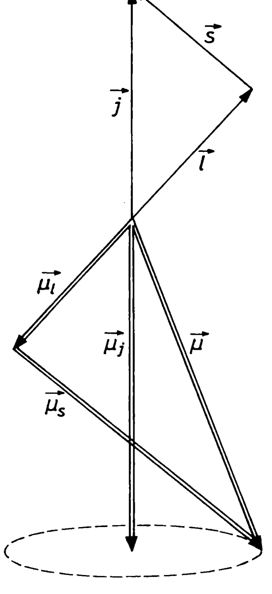


Fig. 28.1. Vektordiagramm für die Drehimpulse und magnetischen Dipolmomente eines Systems mit nicht verschwindendem Bahn- und Spindrehimpuls

Die resultierenden Werte für Elektron, Proton und Neutron sind in der letzten Spalte von Tabelle 28.1 angegeben, dabei ist i die Quantenzahl des Nukleonen-Gesamtdrehimpulses.

Im Falle zusammengesetzter Kerne kann man wegen der Erfahrung, daß sich die Spins der Nukleonen paarweise zu Null koppeln, hoffen, daß das magnetische Moment von *g-u-* und *u-g-*Kernen nur von *einem* (dem unpaarigen) Nukleon herrührt. Dann sollte $s = \frac{1}{2}$ sein und damit $I = l + \frac{1}{2}$ oder $I = l - \frac{1}{2}$.

Für das magnetische Moment von Kernen mit ungerader Protonenzahl (*u-g-*Kerne) erwartet man nach dieser Vorstellung (SCHMIDT-SCHÜLER-

Modell)

$$\vec{\mu}_{u\text{-}g} = \frac{\mu_0 e}{2m_p} \begin{cases} \left(1 + \dfrac{2{,}29}{I}\right)\vec{I} & \text{für } I = l + \dfrac{1}{2} \\ \left(1 - \dfrac{2{,}29}{I+1}\right)\vec{I} & \text{für } I = l - \dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{28.5}$$

Entsprechend ergibt sich für *g*-*u*-Kerne

$$\vec{\mu}_{g\text{-}u} = \frac{\mu_0 e}{2m_n} \begin{cases} \left(-\dfrac{1{,}91}{I}\right)\vec{I} & \text{für } I = l + \dfrac{1}{2} \\ \left(\dfrac{1{,}91}{I+1}\right)\vec{I} & \text{für } I = l - \dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{28.6}$$

Das magnetische Moment wird *gemessen* durch seine Wechselwirkungsenergie (s. elementare Elektrizitätslehre)

$$W_{\text{magn}} = -(\vec{\mu}\,\vec{H})$$

mit einem äußeren (homogenen) magnetischen Feld $\vec{H}$. Legt man die z-Richtung des Koordinatensystems in die Feldrichtung, so ist die Wechselwirkungsenergie

$$W_{\text{magn}} = -\mu_z H_z\,.$$

Dieser Beitrag kann als Zusatzterm zur potentiellen Energie im HAMILTON-Operator aufgefaßt werden. Unter der Voraussetzung, daß die potentielle Energie U keine weiteren nicht kugelsymmetrischen Glieder enthält, kommutiert W_{magn} mit dem HAMILTON-Operator. Also haben beide Operatoren nach §23 einen gleichen Satz von Eigenfunktionen. Die Zusatzenergie aufgrund der Wechselwirkung ist dann gegeben durch die Eigenwerte des Operators W_{magn}, die mit diesen Eigenfunktionen (26.3) berechnet werden:

Für *u*-*g*-Kerne:

$$\Delta W_{\text{magn}} = -\frac{\mu_0 e \hbar}{2m_p} H_z m_I \begin{cases} \left(1 + \dfrac{2{,}29}{I}\right) & \text{für } I = l + \dfrac{1}{2} \\ \left(1 - \dfrac{2{,}29}{I+1}\right) & \text{für } I = l - \dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{28.7}$$

und für *g*-*u*-Kerne

$$\Delta W_{\text{magn}} = -\frac{\mu_0 e \hbar}{2m_n} H_z m_I \begin{cases} -\dfrac{1{,}91}{I} & \text{für } I = l + \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1{,}91}{I+1} & \text{für } I = l - \dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{28.8}$$

Dabei ist $-I \leqq m_I \leqq I$.

Der Vorfaktor wird oft als „Kernmagneton" bezeichnet*:

$$\mu_K = \frac{\mu_0 e \hbar}{2 m_p} \approx \frac{\mu_0 e \hbar}{2 m_n}.$$

Damit lassen sich die Gleichungen (28.5) und (28.6) zusammenfassen als

$$\vec{\mu}_I = -\frac{\mu_K}{\hbar} g_I \vec{I} \tag{28.9}$$

und die Gleichungen (28.7) und (28.8) als

$$\Delta W_{\text{magn}} = +\mu_K g_I m_I H_z. \tag{28.10}$$

Als „skalares magnetisches Kerndipolmoment" oder kurz „magnetisches Kernmoment" μ (bedauernswerter Doppelgebrauch der Bezeichnung) wird die größte Komponente des Vektors $\vec{\mu}$ definiert, also diejenige Komponente mit $m_I = I$. Somit

$$\mu = -\mu_K g_I I. \tag{28.11}$$

Für das Proton ergibt sich mit $l=0$, $s=j=\frac{1}{2}$ nach Tabelle 28.1

$$\mu_p = 2{,}7925\, \mu_K$$

und für das Neutron

$$\mu_n = -1{,}913\, \mu_K.$$

In Fig. 28.2 und Fig. 28.3 sind die gemessenen μ-Werte für eine Anzahl von Kernen gegen I aufgetragen. Man sieht, daß die obige Vorstellung (Schmidt-Schüler-Modell) nur in groben Zügen mit dem Experiment übereinstimmt. Immerhin liegen fast alle Meßwerte zwischen den Schmidt-Schüler- und den sogenannten Dirac-Werten, die sich ergeben würden, wenn für das Proton $g_l = -1$, $g_s = -2{,}0023$, für das Neutron $g_l = g_s = 0$ gesetzt worden wäre**. Die Meßwerte erlauben somit in der überwiegenden Mehrzahl der Fälle eine Entscheidung, ob für den Kern die Beziehung $I = l + \frac{1}{2}$ oder $I = l - \frac{1}{2}$ gültig ist. Damit erhält man – bei bekanntem I – aus der Messung des magnetischen Momentes einen Hinweis auf die Größe der Quantenzahl l

* Entsprechend bezeichnet man als „Bohrsches Magneton" den Ausdruck

$$\mu_B = \frac{\mu_0 e \hbar}{2 m_e} \approx 1836\ \mu_K.$$

Das in der Hülle auftretende Bohrsche Magneton ist also 1836mal größer als das Kernmagneton.

** Die relativistische Quantenmechanik nach Dirac sagt für das Elektron die richtigen Werte für g_l und g_s voraus (s. Tabelle 28.1). Der Versuch, die Dirac-Theorie auf Proton und Neutron auszudehnen, liefert die hier im Text angegebenen Werte, die allerdings nicht mit dem Experiment in Einklang stehen.

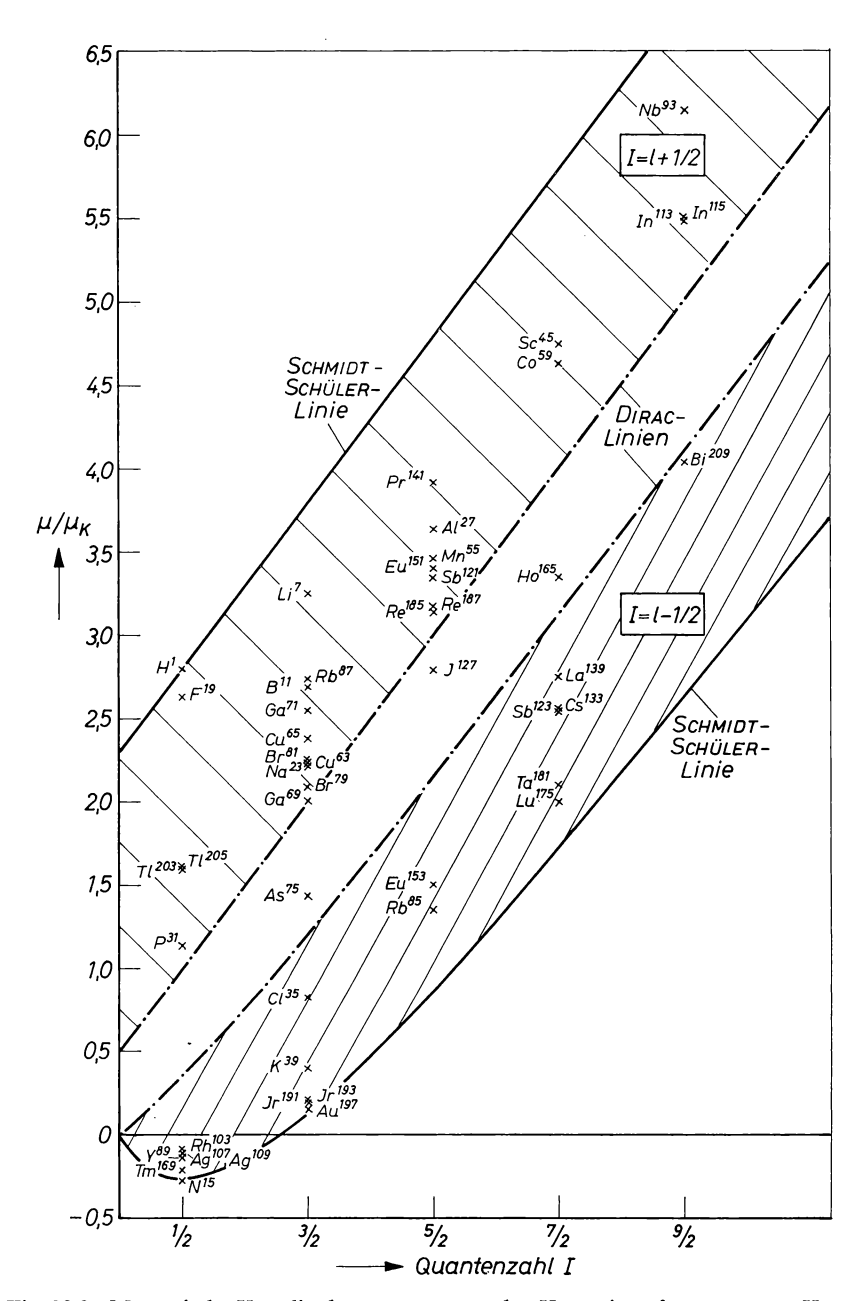


Fig. 28.2. Magnetische Kerndipolmomente, gegen den Kernspin aufgetragen. *u*-*g*-Kerne

und damit auf die *Parität* des untersuchten Zustandes [diese ist nach §24 gleich $(-1)^l$]. Dieses Resultat ist äußerst wichtig, denn die Parität als Kenngröße eines Kernzustandes ist der Messung auf andere Weise schlecht zugänglich (vgl. jedoch §27c).

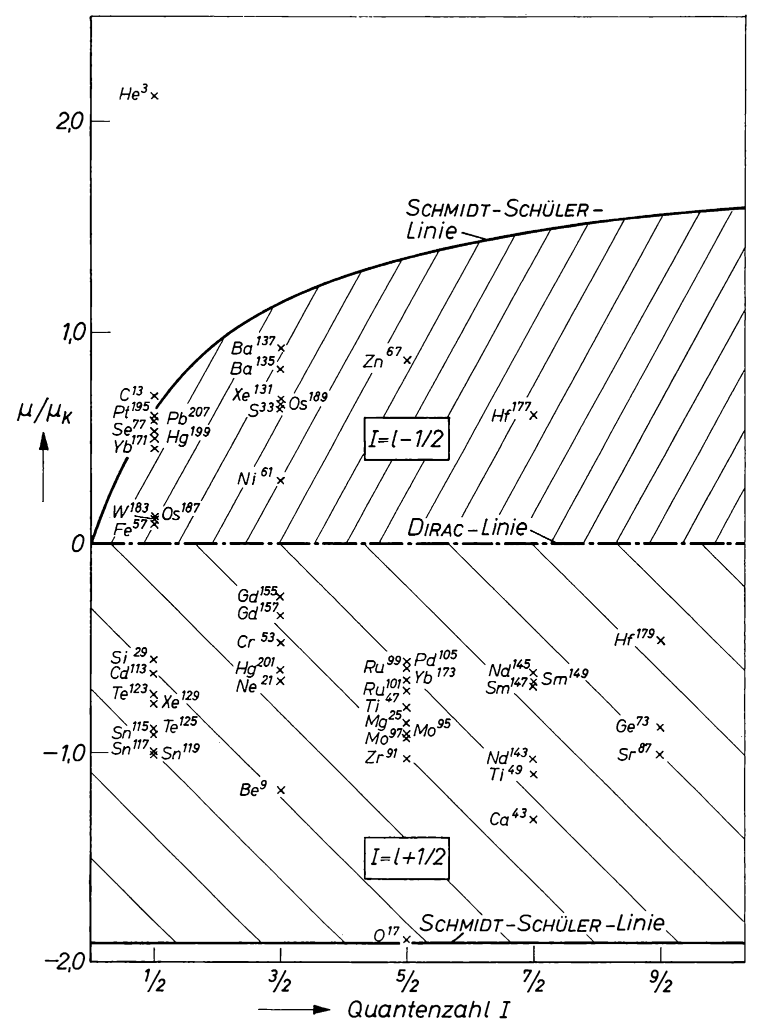


Fig. 28.3. Magnetische Kerndipolmomente, gegen den Kernspin aufgetragen. *g-u*-Kerne

Eine bessere Übereinstimmung zwischen den gemessenen Werten für die magnetischen Dipolmomente der Kerne und theoretischen Voraussagen erhält man durch Betrachtung aller Nukleonen im Kern. Solche Rechnungen

basieren auf detaillierten Modellvorstellungen über den Kern (z.B. dem Schalenmodell, s. §32), übersteigen aber wegen ihrer Komplexität den Rahmen dieses Buches*. Über das magnetische Moment des Deuterons siehe §38.

§ 29. Einfluß von Kernspin und magnetischem Kernmoment auf die Hyperfeinstruktur von Spektrallinien

Kernspin und magnetisches Kernmoment von (stabilen) *g-u-*, *u-g-* und *u-u-*Kernen lassen sich aus ihrem Einfluß auf die Elektronenterme eines Atoms oder Moleküls bestimmen (die Spins der Grundzustände von *g-g-*Kernen und deren magnetische Momente sind stets gleich Null).

Man unterscheidet als experimentelle Verfahren die „optische Methode" und die „Radiofrequenzmethode". Bei der optischen Methode mißt man Zahl und Energieaufspaltung der Hyperfeinstruktur-(„Hfs")-Komponenten einer Spektrallinie, die durch die Ankopplung des Kernspins an den Gesamtdrehimpuls der Elektronenhülle bedingt sind. Bei der Radiofrequenzmethode werden durch ein magnetisches Wechselfeld Übergänge zwischen den Hfs-Komponenten eines festen Zustandes der Elektronenhülle induziert. Hier wollen wir nur einen Überblick über die zugrunde liegende Theorie geben**.

Der Gesamtdrehimpuls der Elektronenhülle werde mit $\vec{J}$, der Kernspin mit $\vec{I}$ bezeichnet. Dann koppelt $\vec{J}$ mit $\vec{I}$ zu einem resultierenden Gesamtdrehimpulsvektor $\vec{F}$:

$$\vec{F}=\vec{J}+\vec{I}. \tag{29.1}$$

Die Quantenzahl F kann die Werte

$$J+I,\, J+I-1, \ldots, |J-I|$$

annehmen.

1. Ist $J>I$, so spaltet bei nicht verschwindender Kopplungsenergie ein durch J gekennzeichneter Elektronenterm in $(2I+1)$ Subniveaus auf. Feststellung der Zahl der Subniveaus liefert dann bei bekanntem J sofort den Kernspin I. Der Fall $J>I$ tritt jedoch für die niedrigen Anregungszustände der Elektronenhülle nur gelegentlich auf. Für $I \geqq J$ muß man eine andere der im folgenden zu beschreibenden Methoden zur Bestimmung des Kernspins benutzen.

---

* Literatur dazu: M. Goeppert-Mayer und H. D. Jensen, Elementary Theory of Nuclear Shell Structure, John Wiley, 1957; M. A. Preston, Physics of the Nucleus, Addison-Wesley 1962, Chapter 12.

** Eine ausführliche Darstellung der Verfahren findet sich bei Kopfermann, Kernmomente, Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt a. M. 1956.

2. Ohne äußeres Magnetfeld ist jeder durch die Quantenzahl F gekennzeichnete Zustand $(2F+1)$-fach entartet. Dann sind die relativen Intensitäten der Hfs-Komponenten einer Spektrallinie durch die Verhältnisse der statistischen Gewichte $(2F+1)$ der am Übergang beteiligten Niveaus gegeben (vgl. §26).

Einfaches Beispiel (s. Fig. 29.1): $I=\frac{1}{2}$, Gesamtelektronenspin $S=0$ (z.B. Zweielektronensystem bei RUSSELL-SAUNDERS-Kopplung):

Der ${}^1P_1$-Zustand spaltet in zwei Hfs-Komponenten mit $F=\frac{3}{2}$ und $F=\frac{1}{2}$ auf, der ${}^1S_0$-Zustand erfährt keine Aufspaltung: $F=\frac{1}{2}$. Intensitätsverhältnis der Übergänge:

$$②:①=4:2=2.$$

Die Linie ② ist also doppelt so intensiv wie die Linie ①.

In schwierigen Fällen läßt sich aus den Intensitätsverhältnissen meist F angeben; bei bekanntem J kann man dann oft auf I schließen.

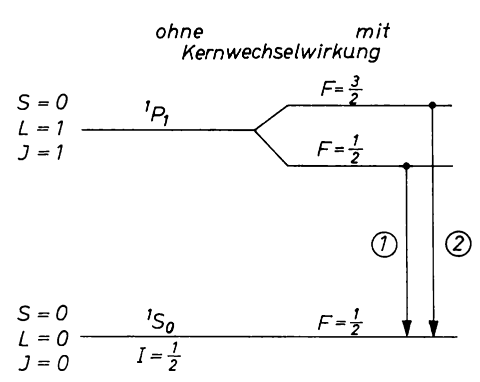


Fig. 29.1. Hyperfeinstrukturaufspaltung des ersten angeregten Zustandes bei $S=0$ (Zweielektronensystem) und $I=\frac{1}{2}$. Der Grundzustand spaltet nicht auf. Die Intensitäten der Hfs-Komponenten verhalten sich wie ② : ① = 2:1

3. Die Größe der Energieaufspaltung im Hfs-Multiplett läßt Schlüsse auf I und das magnetische Kernmoment μ_I zu. Die Kopplung zwischen $\vec{I}$ und $\vec{J}$ ist magnetischer Natur; der nicht verschwindende Drehimpuls der Elektronenhülle ist gleichbedeutend mit einem resultierenden Elektronen-Kreisstrom. Dieser erzeugt am Kernort ein Magnetfeld $\vec{H}_0$, das im zeitlichen Mittel antiparallel zu $\vec{J}$ gerichtet ist und in dem sich das magnetische Kernmoment einstellen kann. Der Wechselwirkungsoperator, der der Zusatzenergie entspricht, ist bei Vernachlässigung aller anderen Einflüsse

$$W_1 = -(\vec{\mu}_I \vec{\bar{H}}_0). \tag{29.2}$$

Mit (28.9) und

$$\vec{\bar{H}}_0 = -\frac{H_0}{\hbar J}\vec{J} \quad \text{(Definition von } H_0\text{)}$$

folgt

$$W_1 = -g_I \frac{\mu_K}{\hbar^2 J} H_0 (\vec{I}\vec{J}).$$

Solange $(\vec{I}\vec{J})$ mit dem übrigen HAMILTON-Operator des Systems kommutiert, wird die Zusatzenergie ΔW_1 gegeben durch die Eigenwerte des

Operators W_1. Diese folgen aus (26.11) zu

$$\Delta W_1 = \frac{A}{2}[F(F+1)-J(J+1)-I(I+1)] \tag{29.3}$$

mit der Abkürzung

$$A = -\frac{1}{J} g_I \mu_K H_0 .$$

Der Aufspaltungsfaktor A ist ein Maß für die Größe der Energieabstände der einzelnen Subterme eines Hfs-Multipletts. Wenn man H_0 berechnen kann, was in einfachen Fällen möglich ist, erlaubt die experimentelle Bestimmung von A einen Schluß auf g_I und damit bei bekanntem I auf μ_I. Die Aufspaltungskonstante A und somit der Energieabstand der Hfs-Terme ist am größten für Elektronenkonfigurationen mit unabgesättigten s-Elektronen und nimmt mit wachsender Anregung der Elektronenhülle ab, da das Magnetfeld, das von weiter „außen" befindlichen Elektronen am Kernort erzeugt wird, kleiner ist. Das Minuszeichen in der Definition von A wird der Tatsache gerecht, daß die g_I-Faktoren, so wie sie nach (28.9) bzw. (28.7) und (28.8) bestimmt werden, in vielen Fällen negativ sind.

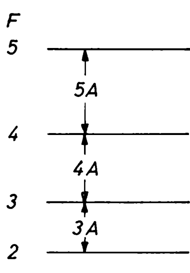


Fig. 29.2. Veranschaulichung der Intervallregel der magnetischen Hyperfeinstruktur. Im Beispiel ist $I=\frac{7}{2}$, $J=\frac{3}{2}$ angenommen

Im Normalfall (d.h. $g_I<0$ und $\vec{H}_0$ antiparallel zu $\vec{J}$) liegt der Term mit dem größten F-Wert energetisch am höchsten (am wenigsten gebunden), für $g_I>0$ oder $\vec{H}_0 \uparrow\uparrow \vec{J}$ ergibt sich die umgekehrte Termlage.

Der Abstand zweier Terme desselben durch I und J gekennzeichneten Hfs-Multipletts ist (s. Fig. 29.2)

$$\Delta W_F - \Delta W_{F-1} = AF,$$

also proportional dem F-Wert des höheren Terms. Dies ist die „Intervallregel der magnetischen Hfs". Der größte Wert für F ist $I+J$; wenn J bekannt ist, kann man auf I schließen.

4. Wird die Substanz zusätzlich in ein äußeres Mangetfeld gebracht, das so schwach ist, daß die Kopplung zwischen $\vec{I}$ und $\vec{J}$ zu $\vec{F}$ erhalten bleibt und $\vec{F}$ um die Richtung des Magnetfeldes präzediert, so kommt als weiterer „Störoperator" ein Term

$$W_{\text{magn}} = -(\vec{\mu}_F \vec{H}) = -(\mu_F)_z H_z$$

zum Hamilton-Operator hinzu (Zeeman-Effekt der Hfs). Dabei ist in Analogie zu (28.3)

$$\vec{\mu}_F = -\frac{1}{\hbar}\left[(\mu_B g_J \vec{J} + \mu_K g_I \vec{I})\frac{\vec{F}}{|\vec{F}|}\right]\frac{\vec{F}}{|\vec{F}|} = -g_F \frac{\mu_B}{\hbar}\vec{F}. \tag{29.4}$$

Da $\mu_K \approx \mu_B/1840$ ist, kann man den zweiten Summanden in der Klammer meist vernachlässigen. Solange die separaten Wechselwirkungen zwischen $\vec{H}$ und $\vec{J}$ sowie $\vec{H}$ und $\vec{I}$ gegen die zwischen $\vec{H}$ und $\vec{F}$ vernachlässigt werden können, bleiben die Eigenfunktionen zum HAMILTON-Operator $p^2/2m + U_{(r)} + W_1 + W_{\text{magn}}$ dieselben wie die zu $p^2/2m + U_{(r)} + W_1$, da die Operatoren F_z und $(\vec{I}\vec{J})$ kommutieren. Die Zusatzenergien im Magnetfeld ergeben sich mit (26.12) als Eigenwerte des Operators W_{magn} zu

$$\Delta W_{\text{magn}} = g_F \mu_B m_F H_z = \mu_B m_F H_z g_J \frac{F(F+1)+J(J+1)-I(I+1)}{2F(F+1)}. \quad (29.5)$$

Jeder durch die Quantenzahl F gekennzeichnete Hfs-Term spaltet also im Magnetfeld in $(2F+1)$ Subniveaus entsprechend den möglichen Werten der

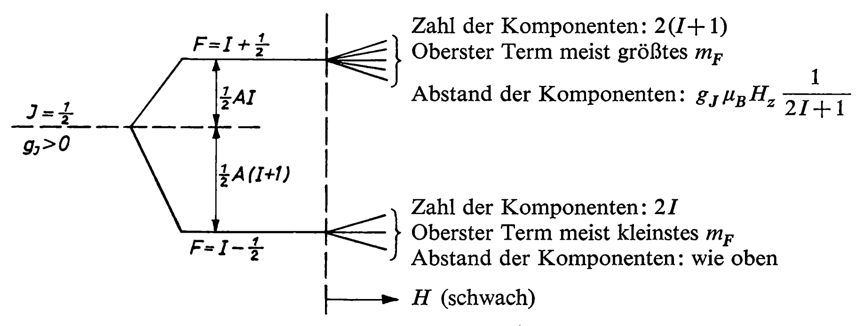


Fig. 29.3. Hyperfeinstrukturaufspaltung eines $(J=\frac{1}{2})$-Terms ohne und mit schwachem Magnetfeld (schematisch)

Quantenzahl m_F auf. Der Abstand zweier zum gleichen Hfs-Term (gekennzeichnet durch die Quantenzahlen I, J, F) gehörigen Subniveaus ist

$$\Delta W_{m_F} - \Delta W_{m_F-1} = g_F \mu_B H_z = g_J \mu_B H_z \frac{F(F+1)+J(J+1)-I(I+1)}{2F(F+1)}. \quad (29.6)$$

Wie man hieraus den Kernspin I bestimmen kann, soll an einem einfachen Beispiel erläutert werden:

Sei $J=\frac{1}{2}$. Dann ist entweder $F=I+\frac{1}{2}$ oder $F=I-\frac{1}{2}$. Für $F=I+\frac{1}{2}$ ergibt sich $g_F = g_J \frac{1}{2I+1}$, für $F=I-\frac{1}{2}$ ergibt sich $g_F = -g_J \frac{1}{2I+1}$. Damit wird

$$\Delta W_{m_F} - \Delta W_{m_F-1} = \pm g_J \mu_B H_z \frac{1}{2I+1} \begin{cases} \text{für } F=I+\frac{1}{2} \\ \text{für } F=I-\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Bei bekanntem g_J liefert eine Ausmessung des Abstandes über diese Beziehung den Kernspin. Die resultierenden Terme sind in Fig. 29.3 schematisch dargestellt.

5. In einem stärkeren äußeren Magnetfeld werden $\vec{I}$ und $\vec{J}$ entkoppelt, F ist dann keine „gute“ Quantenzahl mehr. Die Störoperatoren W_1 und W_{magn} können dann nicht mehr unabhängig voneinander betrachtet werden.

Als Beispiel für eine quantenmechanische Störungsrechnung wollen wir die Energieeigenwerte für den Fall $J=\frac{1}{2}$ berechnen (BREIT-RABI-Formel).

Der gesamte HAMILTON-Operator lautet

$$H=\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+U_{(r)}}_{H_0}\underbrace{-g_I\frac{\mu_K}{\hbar^2 J}H_0(\vec{I}\vec{J})+g_J\frac{\mu_B}{\hbar}H_z J_z+g_I\frac{\mu_K}{\hbar}H_z I_z}_{H'}. \tag{29.7}$$

Die Eigenfunktionen zu H_0 sind zusammengesetzt aus den Elektroneneigenfunktionen ψ_{J,m_J} und den Kerneigenfunktionen φ_{I,m_I} [vgl. (26.4)]:

$$\Psi^0_{J,I,F,M_F}=\sum_{m_J} C_{J,I,F;m_J,M_F}\,\psi_{J,m_J}\,\varphi_{I,M_F-m_J}. \tag{29.8}$$

Bei Vernachlässigung des Operators H' liefern alle zu den gegebenen Quantenzahlen J und I gehörigen Wellenfunktionen (29.8) den gleichen Energieeigenwert $E_{J,I}$. Die Lösung des ungestörten Problems zum speziellen Eigenwert $E_{J,I}$ lautet also

$$H_0\,\Psi^0_{J,I,F,M_F}=E_{J,I}\,\Psi^0_{J,I,F,M_F}. \tag{29.9}$$

Die Eigenfunktion Ψ zum gesamten HAMILTON-Operator H wird jetzt zweckmäßig nach dem vollständigen Funktionensystem Ψ^0 entwickelt (s. § 23):

$$\Psi=\sum_{J,I,F,M_F} a_{J,I,F,M_F}\,\Psi^0_{J,I,F,M_F},$$

wobei die a_{J,I,F,M_F} die Entwicklungskoeffizienten sind. Das SCHRÖDINGER-Problem lautet damit

$$(H_0\Psi+H'\Psi)=E\Psi.$$

Wir multiplizieren von links mit $\Psi^{0*}_{J',I',F',M'_F}$ und integrieren über alle Variablen:

$$\sum_{J,I,F,M_F} a_{J,I,F,M_F}\int\Psi^{0*}_{J',I',F',M'_F}H_0\,\Psi^0_{J,I,F,M_F}\,d\tau+ \\ +\sum_{J,I,F,M_F} a_{J,I,F,M_F}\int\Psi^{0*}_{J',I',F',M'_F}H'\,\Psi^0_{J,I,F,M_F}\,d\tau= \\ =E\sum_{J,I,F,M_F} a_{J,I,F,M_F}\int\Psi^{0*}_{J',I',F',M'_F}\,\Psi^0_{J,I,F,M_F}\,d\tau.$$

Wegen der Orthonormalität der Funktionen Ψ^0 [vgl. (29.8)] und unter Benutzung von (29.9) folgt

$$\left.\begin{aligned} &a_{J',I',F',M'_F}(E_{J',I'}-E)+ \\ &\quad+\sum_{J,I,F,M_F} a_{J,I,F,M_F}\int\Psi^{0*}_{J',I',F',M'_F}H'\,\Psi^0_{J,I,F,M_F}\,d\tau=0.\end{aligned}\right\} \tag{29.10}$$

(29.10) ist ein homogenes Gleichungssystem für die Koeffizienten a_{J,I,F,M_F}. Damit es eine nichttriviale Lösung hat, muß die Determinante verschwinden.

Bis hierher haben wir noch exakt gerechnet. In einer für das vorliegende Problem gut erfüllten Näherung wollen wir nunmehr annehmen, daß die durch die Quantenzahl J gekennzeichneten Elektronenterme so weit auseinanderliegen, daß die Störenergie H' klein ist gegen deren energetischen Abstand. Ebenso beeinflußt die Störung sicher nicht die Größe der Quantenzahl I des Kernspins. Dann liefert das Matrixelement des Operators H' nur nichtverschwindende Beiträge für $J'=J$ und $I'=I$, also

$$a_{J,I,F,M_F}=\delta_{J,J'}\,\delta_{I,I'}\,a_{J',I',F,M_F}\,.$$

Einsetzen in (29.10) liefert

$$\left.\begin{aligned} &a_{J',I',F',M'_F}(E_{J',I'}-E)+\\ &+\sum_{F,M_F} a_{J',I',F,M_F}\underbrace{\int \Psi^{0\,*}_{J',I',F',M'_F}\,H'\,\Psi^{0}_{J',I',F,M_F}\,d\tau}_{H'_{F',M'_F;\,F,M_F}}=0\,.\end{aligned}\right\}\quad(29.11)$$

Die Matrixelemente des Störoperators lassen sich mit (26.11) und (26.4) wie folgt ausrechnen (die Striche an den Quantenzahlen I' und J' können jetzt weggelassen werden):

$$\begin{aligned} H'\,\Psi^0_{J,I,F,M_F}&=\frac{A}{2}\,[F(F+1)-J(J+1)-I(I+1)]\,\Psi^0_{J,I,F,M_F}+\\ &+\frac{g_J\,\mu_B}{\hbar}\,H_z\sum_{m_J}\hbar\,m_J\,C_{J,I,F;\,m_J,M_F}\,\psi_{J,m_J}\,\varphi_{I,M_F-m_J}+\\ &+\frac{g_I\,\mu_K}{\hbar}\,H_z\sum_{m_J}\hbar(M_F-m_J)\,C_{J,I,F;\,m_J,M_F}\,\psi_{J,m_J}\,\varphi_{I,M_F-m_J}\,,\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} H'_{F',M'_F;\,F,M_F}&=\int \Psi^{0\,*}_{J,I,F',M'_F}\,H'\,\Psi^0_{J,I,F,M_F}\,d\tau\\ &=\frac{A}{2}\,[F(F+1)-J(J+1)-I(I+1)]\,\delta_{F,F'}\,\delta_{M_F,M'_F}+\\ &\quad+H_z\sum_{m_J,m'_J}[g_J\,\mu_B\,m_J+g_I\,\mu_K(M_F-m_J)]\times\\ &\qquad\times C_{J,I,F';\,m'_J,M'_F}\,C_{J,I,F;\,m_J,M_F}\cdot\delta_{m'_J,m_J}\,\delta_{M'_F,M_F}\\ &=\delta_{M_F,M'_F}\Bigg[\delta_{F,F'}\,\frac{A}{2}\,[F(F+1)-J(J+1)-I(I+1)]+\\ &+H_z\sum_{m_J}[g_J\,\mu_B\,m_J+g_I\,\mu_K(M_F-m_J)]\,C_{J,I,F';\,m_J,M'_F}\,C_{J,I,F;\,m_J,M_F}\Bigg]\,.\end{aligned}\right\}\quad(29.12)$$

Abgekürzt:

$$H'_{F',M'_F;\,F,M_F}=\delta_{M_F,M'_F}\,H'_{F',F}\,,$$

wobei $H'_{F',F}$ eine Abkürzung für die große Klammer in (29.12) ist. Wie man sieht, hängt aber $H'_{F',F}$ auch von den übrigen Quantenzahlen ab.

Einsetzen von (29.12) in (29.11) ergibt

$$a_{J,I,F',M'_F}(E_{J,I}-E)+\sum_F a_{J,I,F,M'_F}\,H'_{F',F}=0\,. \qquad (29.13)$$

Nunmehr kann auch der Strich an der Quantenzahl M'_F weggelassen werden. Für vorgegebene Quantenzahlen J und I können F und F' alle Werte in Einheitsschritten zwischen

$|J-I|$ und $(J+I)$ annehmen. Der Ausdruck (29.13) enthält also $2I+1$ Gleichungen, wenn $I<J$, und $2J+1$ Gleichungen, wenn $J<I$ ist.

Das System (29.13) soll hier nur für den Spezialfall $J=\frac{1}{2}$ gelöst werden. Es reduziert sich dann auf zwei Gleichungen für $F'=I+\frac{1}{2}$ und $F'=I-\frac{1}{2}$. Für $F'=I+\frac{1}{2}$ ist

$$a_{\frac{1}{2},I,I+\frac{1}{2},M_F}(E_{\frac{1}{2},I}-E)+a_{\frac{1}{2},I,I+\frac{1}{2},M_F}H'_{I+\frac{1}{2},I+\frac{1}{2}}+ \\ +a_{\frac{1}{2},I,I-\frac{1}{2},M_F}H'_{I+\frac{1}{2},I-\frac{1}{2}}=0$$

und für $F'=I-\frac{1}{2}$

$$a_{\frac{1}{2},I,I-\frac{1}{2},M_F}(E_{\frac{1}{2},I}-E)+a_{\frac{1}{2},I,I+\frac{1}{2},M_F}H'_{I-\frac{1}{2},I+\frac{1}{2}}+ \\ +a_{\frac{1}{2},I,I-\frac{1}{2},M_F}H'_{I-\frac{1}{2},I-\frac{1}{2}}=0.$$

Dies sind zwei Gleichungen für die beiden a-Koeffizienten. Die Determinante des (homogenen) Systems muß verschwinden:

$$\begin{vmatrix} E_{\frac{1}{2},I}-E+H'_{I+\frac{1}{2},I+\frac{1}{2}} & H'_{I+\frac{1}{2},I-\frac{1}{2}} \\ H'_{I-\frac{1}{2},I+\frac{1}{2}} & E_{\frac{1}{2},I}-E+H'_{I-\frac{1}{2},I-\frac{1}{2}} \end{vmatrix}=0.$$

Diese quadratische Gleichung für die gesuchten Energieeigenwerte E hat die Lösungen

$$\left.\begin{aligned} E=E_{\frac{1}{2},I}+\tfrac{1}{2}(H'_{I+\frac{1}{2},I+\frac{1}{2}}+H'_{I-\frac{1}{2},I-\frac{1}{2}})\pm \\ \pm\sqrt{\tfrac{1}{4}(H'_{I+\frac{1}{2},I+\frac{1}{2}}-H'_{I-\frac{1}{2},I-\frac{1}{2}})^2+H'_{I+\frac{1}{2},I-\frac{1}{2}}H'_{I-\frac{1}{2},I+\frac{1}{2}}}\,. \end{aligned}\right\} \tag{29.14}$$

Dabei ist nach (29.12) und mit (26.6)

$$\begin{aligned} H'_{I+\frac{1}{2},I+\frac{1}{2}} &= \frac{A}{2}I+g_I\,\mu_K\,H_z\,M_F\sum_{m_J=-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}C^2_{\frac{1}{2},I,I+\frac{1}{2};m_J,M_F}+ \\ &\quad +(g_J\,\mu_B-g_I\,\mu_K)\,H_z\sum_{m_J}m_J\,C^2_{\frac{1}{2},I,I+\frac{1}{2};m_J,M_F} \\ &= \frac{A}{2}I+g_I\,\mu_K\,H_z\,M_F+(g_J\,\mu_B-g_I\,\mu_K)\,H_z\left(\frac{M_F}{2I+1}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H'_{I-\frac{1}{2},I-\frac{1}{2}} &= -\frac{A}{2}(I+1)+g_I\,\mu_K\,H_z\,M_F\sum_{m_J}C^2_{\frac{1}{2},I,I-\frac{1}{2};m_J,M_F}+ \\ &\quad +(g_J\,\mu_B-g_I\,\mu_K)\,H_z\sum_{m_J}m_J\,C^2_{\frac{1}{2},I,I-\frac{1}{2};m_J,M_F} \\ &= -\frac{A}{2}(I+1)+g_I\,\mu_K\,H_z\,M_F+(g_J\,\mu_B-g_I\,\mu_K)\,H_z\left(-\frac{M_F}{2I+1}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H'_{I+\frac{1}{2},I-\frac{1}{2}} &= H'_{I-\frac{1}{2},I+\frac{1}{2}}=g_I\,\mu_K\,H_z\,M_F\sum_{m_J}C_{\frac{1}{2},I,I-\frac{1}{2};m_J,M_F}\,C_{\frac{1}{2},I,I+\frac{1}{2};m_J,M_F}+ \\ &\quad +(g_J\,\mu_B-g_I\,\mu_K)\,H_z\sum_{m_J}m_J\,C_{\frac{1}{2},I,I-\frac{1}{2};m_J,M_F}\,C_{\frac{1}{2},I,I+\frac{1}{2};m_J,M_F} \\ &= (g_J\,\mu_B-g_I\,\mu_K)\,H_z\,\frac{\sqrt{(I+\frac{1}{2})^2-M^2}}{2I+1}\,. \end{aligned}$$

Mit den Abkürzungen

$$M=M_F=m_I+m_J$$

und

$$x = \frac{g_J \mu_B - g_I \mu_K}{\frac{A}{2}(2I+1)} H_z$$

folgt dann

$$\frac{1}{2}(H'_{I+\frac{1}{2}, I+\frac{1}{2}} + H'_{I-\frac{1}{2}, I-\frac{1}{2}}) = -\frac{A}{4} + g_I \mu_K H_z M$$

$$\frac{1}{4}(H'_{I+\frac{1}{2}, I+\frac{1}{2}} - H'_{I-\frac{1}{2}, I-\frac{1}{2}})^2 = \frac{1}{4}\left[\frac{A}{2}(2I+1)\right]^2 \left(1 + \frac{2M}{2I+1} x\right)^2$$

$$H'_{I+\frac{1}{2}, I-\frac{1}{2}} H'_{I-\frac{1}{2}, I+\frac{1}{2}} = \left[\frac{A}{2}(2I+1)\right]^2 x^2 \frac{(I+\frac{1}{2})^2 - M^2}{(2I+1)^2}.$$

Damit ergibt sich durch Einsetzen in (29.14) die BREIT-RABI-Formel:

$$\boxed{E = E_{\frac{1}{2}, I} - \frac{A}{4} + g_I \mu_K H_z M \pm \frac{A}{4}(2I+1)\sqrt{1 + \frac{4Mx}{2I+1} + x^2}.} \qquad (29.15)$$

Diskussion: a) Die durch das Magnetfeld und die Wechselwirkung zwischen Kernspin und Hülle hervorgerufene Zusatzenergie der Zustände wird durch (29.15) gegeben. Für verschwindendes äußeres Magnetfeld ($H_z = 0$) ergibt sich

$$\Delta W = E - E_{\frac{1}{2}, I} = -\frac{A}{4} \pm \frac{A}{4}(2I+1) = \begin{cases} \frac{1}{2} A I \\ -\frac{A}{2}(I+1). \end{cases}$$

Dies ist dasselbe Ergebnis wie (29.3) im Falle $J = \frac{1}{2}$. Durch den Vergleich mit (29.3) sieht man, daß das Pluszeichen in (29.15) für den Fall $F = I + \frac{1}{2}$, das Minuszeichen für den Fall $F = I - \frac{1}{2}$ gültig ist.

b) Für kleine Magnetfelder H_z kann man die Größe x^2 in der Wurzel gegen die Einheit vernachlässigen. Dann folgt mit $M = M_F$

$$\Delta W \approx -\frac{A}{4} + g_I \mu_K M_F H_z \pm \frac{A}{4}(2I+1)\left(1 + \frac{2M_F x}{2I+1}\right)$$

$$= \frac{A}{2}\begin{Bmatrix} I \\ -(I+1) \end{Bmatrix} + g_I \mu_K M_F H_z \pm (g_J \mu_B - g_I \mu_K) H_z \frac{M_F}{2I+1} \begin{cases} \text{für } F = I + \frac{1}{2} \\ \text{für } F = I - \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Dies ist dasselbe Ergebnis wie (29.3) und (29.5) im Falle $J = \frac{1}{2}$, wenn $g_I \mu_K$ gegen $g_J \mu_B$ vernachlässigt wird.

c) Die Terme mit $|M| = F = I + \frac{1}{2}$ wachsen linear mit dem Magnetfeld. In diesem Fall kann man die Wurzel in (29.15) ziehen und erhält

$$\Delta W = -\frac{A}{4} + g_I \mu_K M H_z + \frac{A}{4}(2I+1)(1 \pm x)$$

$$= \frac{AI}{2} \pm \left(\frac{1}{2} g_J \mu_B + g_I \mu_K I\right) H_z \quad \text{für} \quad \begin{cases} M = I + \frac{1}{2} \\ M = -(I + \frac{1}{2}). \end{cases}$$

Die Steigung der Kurven $\Delta W_{(H)}$ hängt im wesentlichen vom Wert g_J ab.

d) Für große Magnetfelder, die aber nicht so groß sein dürfen, daß auch $\vec{L}$ und $\vec{S}$ entkoppelt werden [für einen solchen Fall wäre (29.7) nicht mehr der richtige HAMILTON-Operator] ergibt sich aus (29.15) mit $x \gg 1$ und $M = m_I + m_J$

$$\begin{aligned} \Delta W &\approx -\frac{A}{4} + g_I \mu_K H_z M \pm \frac{A}{4}(2I+1)x\left(1 + \frac{2M}{x(2I+1)}\right) \\ &= -\frac{A}{4} \pm \frac{AM}{2} + g_I \mu_K H_z \left(M \mp \frac{1}{2}\right) \pm \frac{1}{2} g_J \mu_B H_z . \end{aligned}$$

Die Deutung dieser Terme ist wie folgt:

$\pm\frac{1}{2} g_J \mu_B H_z$ ist die Wechselwirkungsenergie zwischen dem magnetischen Moment der Elektronenhülle und dem äußeren Feld für $J=\frac{1}{2}$, $m_J = \pm\frac{1}{2}$.

$(M \mp \frac{1}{2})\, g_I \mu_K H_z = m_I g_I \mu_K H_z$ ist die Wechselwirkungsenergie zwischen dem magnetischen Kernmoment und dem äußeren Feld.

$-\frac{A}{4} \pm \frac{AM}{2} = \pm\frac{A}{2}\left(M \mp \frac{1}{2}\right) = A\, m_J\, m_I$ ist die Wechselwirkungsenergie der magnetischen Momente von Hülle und Kern miteinander (im zeitlichen Mittel).

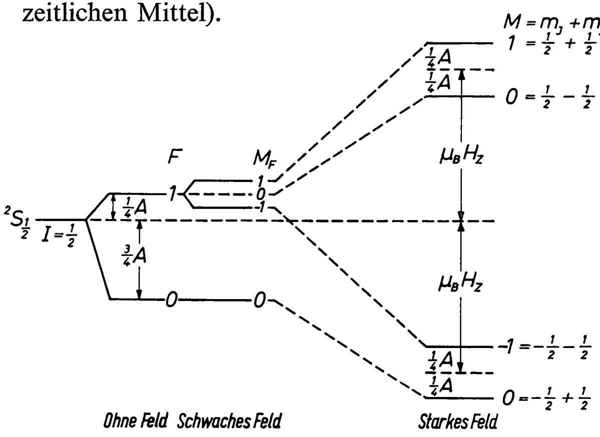


Fig. 29.4. Aufspaltungsschema eines $^2S_{\frac{1}{2}}$-Terms mit $I=\frac{1}{2}$ im äußeren Magnetfeld. Nach KOPFERMANN, Kernmomente, 1956

Aus dem Abstand zweier Terme bei gleichem m_J und starkem Magnetfeld (PASCHEN-BACK-Effekt der Hfs) kann die Aufspaltungskonstante A bestimmt werden. Eine sehr genaue Ausmessung der Termabstände gestattet darüber hinaus einen Schluß auf g_I.

Fig. 29.4 zeigt die Aufspaltung am Beispiel des $^2S_{\frac{1}{2}}$-Zustandes eines Atoms mit dem Kernspin $I=\frac{1}{2}$ (schematisch; $g_I \mu_K$ wurde gegen $g_J \mu_B$ vernachlässigt; nach §28 ist für den betrachteten Zustand $g_J = 2$).

Die experimentellen Anordnungen zur Bestimmung der Termlagen der Hfs-Terme bzw. der Übergangsenergien zwischen zwei solchen Termen werden bei KOPFERMANN ausführlich diskutiert*.

Absorption und Emission von elektromagnetischer Strahlung findet statt zwischen je zwei Termen des Systems. Benutzt man sichtbares Licht, so sind die resultierenden Frequenzen aus (5.2) zu berechnen. Bei der im optischen Gebiet vorherrschenden „elektrischen Dipolstrahlung" gelten dabei folgende Auswahlregeln (Begründung s. §49):

$\Delta L = \pm 1$ (Paritätswechsel);
$\Delta F = 0, \pm 1$, aber $F=0 \rightarrow F=0$ verboten;
$\Delta I = 0$ (der Kernspin ändert sich nicht);
$\Delta M = \begin{cases} 0 & \text{„}\sigma\text{-Komponenten"}; \\ \pm 1 & \text{„}\pi\text{-Komponenten"}. \end{cases}$

π- und σ-Komponenten unterscheiden sich durch ihre Polarisation und durch die Abhängigkeit der Intensität von der Richtung der Beobachtung relativ zu $\vec{H}$, wie dies auch vom ZEEMAN-Effekt in der Atomhülle bekannt ist.

Erzwingt man „magnetische Dipolübergänge", etwa durch ein magnetisches Wechselfeld hoher Frequenz, so können Elektronenübergänge innerhalb des ZEEMAN-Multipletts eines Feinstrukturterms stattfinden (experimentell wird meist der Grundzustand untersucht). Die zugehörigen Auswahlregeln sind

$\Delta L = 0$ (Paritätsgleichheit der beiden Zustände);
$\Delta F = 0, \pm 1$, aber $F=0 \rightarrow F=0$ verboten;
$\Delta I = 0$;
$\Delta M = 0, \pm 1$.

Man unterscheidet wiederum π- und σ-Komponenten. π-Übergänge ($\Delta M = \pm 1$) können nur von zum statischen Feld senkrechten magnetischen Wechselfeldkomponenten induziert werden, σ-Übergänge nur von einer zum statischen Feld parallelen Wechselfeldkomponente.

Beobachtet man im Beispiel der Fig. 29.4 die Übergänge $\Delta m_J = 0$, $\Delta m_I = 1$ im „starken" Feld, so erhält man nur *eine* Linie der feldunabhängigen Frequenz

$$\nu = \frac{A}{4\pi\hbar}.$$

Ebenso liefern die $\Delta M = 0$-Übergänge nur *eine* Linie mit der feldstärkeabhängigen Frequenz

$$\nu = \frac{\mu_B}{\pi\hbar} H_z.$$

* H. KOPFERMANN, Kernmomente, Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt a. M. 1956.

§ 30. Elektrisches Kernquadrupolmoment

a) Klassische Rechnung

Sei $\rho_{K(\vec{r})}$ die Protonendichte im Kern (Zahl der Protonen pro cm^3), $\rho_{e(\vec{r}')}$ die Elektronendichte im Atom, so daß

$$\int \rho_{K(\vec{r})}\, dV = Z$$

und

$$\int \rho_{e(\vec{r}')}\, dV' = Z$$

ist. Die Elektronen erzeugen am Kernort ein elektrisches Potential $\varphi_{(\vec{r})}$. Für dieses von der Ladungsverteilung $\rho_{e(\vec{r}')}$ herrührende Potential liefert die Elektrodynamik den Ausdruck

$$\varphi_{(\vec{r})} = -\frac{e}{4\pi\,\varepsilon_0}\int \frac{\rho_{e(\vec{r}')}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, dV'. \tag{30.1}$$

Umformung: Sei $x = r/r'$ und θ der von den Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{r}'$ eingeschlossene Winkel. Dann folgt

$$\varphi_{(\vec{r})} = -\frac{e}{4\pi\,\varepsilon_0}\int \frac{\rho_{e(\vec{r}')}}{r'\sqrt{1+x^2-2x\cos\theta}}\, dV'.$$

Wie man durch Binomialentwicklung leicht bestätigt, läßt sich die Wurzel im Nenner für $|x|<1$ in eine Reihe entwickeln:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2-2x\cos\theta}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_{l(\cos\theta)}\, x^l. \tag{30.2}$$

Dabei sind die $P_{l(\cos\theta)}$ die durch (21.9) definierten LEGENDRE-Polynome (für $m=0$). Wenn angenommen wird, daß stets $x<1$ ist, also daß sich die Elektronen außerhalb des Kerns befinden*, wird das Potential

$$\varphi_{(\vec{r})} = -\frac{e}{4\pi\,\varepsilon_0}\int \frac{\rho_{e(\vec{r}')}}{r'} \sum_{l=0}^{\infty} P_{l(\cos\theta)} \left(\frac{r}{r'}\right)^l dV'.$$

Die ersten Glieder der Summe sind

$$(\varphi_{(\vec{r})})_{l=0} = -\frac{e}{4\pi\,\varepsilon_0}\int \frac{\rho_{e(\vec{r}')}}{r'}\, dV'$$ (konstantes, r-unabhängiges Potential)

$$(\varphi_{(\vec{r})})_{l=1} = -\frac{e}{4\pi\,\varepsilon_0}\, r\cos\theta \int \frac{\rho_{e(\vec{r}')}}{r'^2}\, dV'$$ („Dipol“-Entwicklungsterm)

$$(\varphi_{(\vec{r})})_{l=2} = -\frac{e}{4\pi\,\varepsilon_0}\, r^2 P_{2(\cos\theta)} \int \frac{\rho_{e(\vec{r}')}}{r'^3}\, dV'$$ („Quadrupol“-Entwicklungsterm).

* Diese Annahme ist gerechtfertigt, wenn man die $s_{\frac{1}{2}}$- und $p_{\frac{1}{2}}$-Elektronen nicht mitbetrachtet. Diese haben bei relativistischer Rechnung eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung und tragen daher zur Quadrupolwechselwirkung nichts bei. Sie sind jedoch für die „Isotopieverschiebung“ der Spektrallinien verantwortlich, s. § 34.

Wenn der Kern sich im Einfluß dieses Potentials befindet, entsteht klassisch eine Wechselwirkungsenergie der Größe

$$W = e\int \varphi_{(\vec{r})}\,\rho_{K(\vec{r})}\,dV = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\int\!\!\int \frac{\rho_{e(\vec{r}')}\,\rho_{K(\vec{r})}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,dV'\,dV$$

$$= -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\int\!\!\int \frac{\rho_{e(\vec{r}')}\,\rho_{K(\vec{r})}}{r'}\sum_{l=0}^{\infty} P_{l\,(\cos\theta)}\left(\frac{r}{r'}\right)^l dV'\,dV.$$

Wie man der Darstellung entnimmt, ist der Ausdruck symmetrisch in den Kern- und Elektronenkoordinaten, so daß es gleichgültig ist, ob man W als Energie des Kerns im Feld der Hülle oder der Hülle im Feld des Kerns auffaßt.

Die Kernladungsverteilung sei rotationssymmetrisch um die ζ_K-Achse (s. Fig. 30.1). Dann ist es sinnvoll, die $P_{l\,(\cos\theta)}$ durch die Winkel θ' und ω

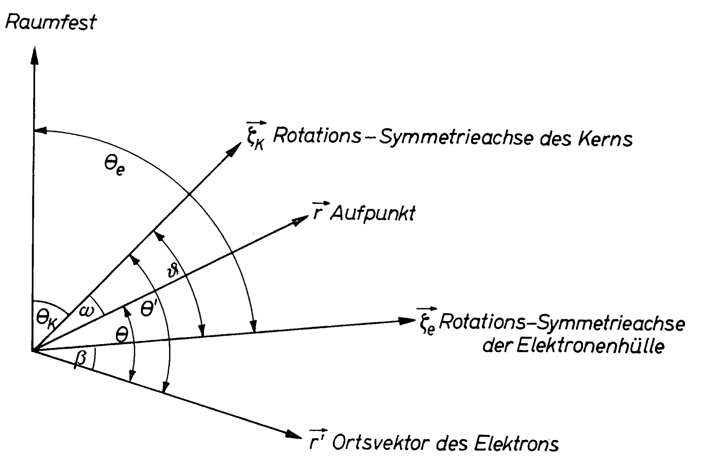


Fig. 30.1. Ebene Darstellung der (eigentlich räumlichen) Vektoren und Polarwinkel. Der Kern befindet sich am Ursprung des dargestellten Relativsystems

sowie die zugehörigen Azimute Φ' und α auszudrücken. Dies geschieht mittels des „Additionstheorems der Kugelfunktionen" (s. Fig. 30.2 und Übung IX.5)

$$P_{l\,(\cos\theta)} = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{+l} Y^*_{l,m\,(\theta',\Phi')}\,Y_{l,m\,(\omega,\alpha)} \tag{30.3}$$

(gilt für jedes sphärische Dreieck mit den Seiten θ, θ' und ω und dem Winkel $\Phi'-\alpha$ gegenüber θ). Außerdem läßt sich das Volumelement dV nunmehr darstellen als

$$dV = r^2\,dr\,\sin\omega\,d\omega\,d\alpha.$$

Der erste Entwicklungsterm im Ausdruck für die Energie berechnet sich zu

$$W_0 = -\frac{Z e^2}{4\pi\,\varepsilon_0}\int \frac{\rho_{e(\vec{r}')}}{r'}\,dV',$$

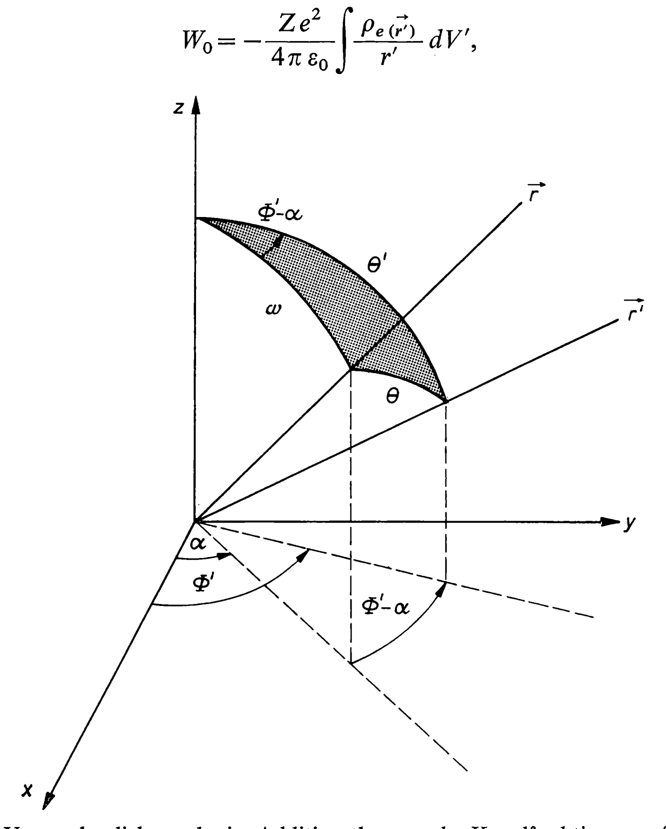


Fig. 30.2. Veranschaulichung der im Additionstheorem der Kugelfunktionen auftretenden Winkel

wobei $\frac{-e}{4\pi\,\varepsilon_0}\int \frac{\rho_{e(\vec{r}')}}{r'}\,dV'$ das Potential (30.1) der Elektronenhülle am Ursprung $r=0$ ist. Also

$$W_0 = Z e\,\varphi_{(r=0)}\,.$$

W_0 ist die Wechselwirkungsenergie der Elektronenhülle mit einem punktförmigen Kern der Ladung Z. Will man diese Wechselwirkung in die SCHRÖDINGER-Gleichung einführen, dann tritt zu dem für die Nukleonen angenommenen Potential $U_{(r)}$ ein COULOMB-Term

$$-\frac{Z e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\, r}$$

für jedes Elektron der Hülle hinzu. Bei nur einem Elektron resultiert das Wasserstoff-Problem (vgl. Übungsaufgabe VIII.4).

Der zweite Entwicklungsterm ($l=1$) der Energie ergibt sich zu

$$W_1 = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\pi}{3}\sum_{m=-1}^{+1}\iiint \frac{\rho_{e(\vec{r}')}}{r'^2} Y^*_{1,m(\theta',\Phi')}\, dV' \times$$
$$\times \iiint \rho_{K(\vec{r})} Y_{1,m(\omega,\alpha)}\, r^3\, dr \sin\omega\, d\omega\, d\alpha,$$

der dritte Entwicklungsterm zu

$$W_2 = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\pi}{5}\sum_{m=-2}^{+2}\iiint \frac{\rho_{e(\vec{r}')}}{r'^3} Y^*_{2,m(\theta',\Phi')}\, dV' \times$$
$$\times \iiint \rho_{K(\vec{r})} Y_{2,m(\omega,\alpha)}\, r^4\, dr \sin\omega\, d\omega\, d\alpha.$$

In beiden Ausdrücken kann man die Integration über den Azimutwinkel α ausführen, wenn man voraussetzt, daß $\rho_{K(\vec{r})}$ rotationssymmetrisch um die ζ_K-Achse ist, also nicht von α abhängt. Da $Y_{l,m}$ den Faktor $e^{im\alpha}$ enthält und

$$\int_0^{2\pi} e^{im\alpha}\, d\alpha = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad m \neq 0, \text{ ganz} \\ 2\pi & \text{für} \quad m = 0 \end{cases}$$

ist, liefern in den Summen jeweils nur die Glieder mit $m=0$ nichtverschwindende Beiträge. Mit (21.10) wird das Dipol-Wechselwirkungsglied

$$W_1 = -\frac{2\pi e^2}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_0 \frac{\rho_{e(\vec{r}')}}{r'^2}\cos\theta'\, dV' \int_{-1}^{+1}\int_0^{\infty} \rho_{K(\vec{r})}\, r^3\, dr \cos\omega\, d(\cos\omega).$$

Wenn die ω-Abhängigkeit von $\rho_{K(\vec{r})}$ symmetrisch um $\omega=90°$ ist, was anschaulich bedeutet, daß die Mittelebene ($\zeta_K=0$-Ebene) eine Symmetrieebene des Kerns ist, dann ergibt das letzte Integral Null. Quantenmechanisch betrachtet ist dies aus Paritätsgründen stets gegeben, denn wenn der Kern sich in einem Zustand ψ_k bestimmter Parität befindet, ist (vgl. §27c)

$$\psi_{k(-\vec{r})} = \pm\psi_{k(\vec{r})},$$

und damit

$$\rho_{k(-\vec{r})} = |\psi_{k(-\vec{r})}|^2 = \rho_{k(\vec{r})}.$$

Der Übergang $+r \to -r$ bedeutet aber in Kugelkoordinaten den Übergang $\omega \to \pi-\omega$; $\alpha \to \pi+\alpha$. Also kommt man zu dem Schluß, daß *das elektrische Dipolmoment des Kerns aus Paritätsgründen verschwindet**. Damit ist

$$W_1 = 0.$$

* Hier ist das permanente Dipolmoment gemeint. Ein momentanes elektrisches Dipolmoment kann der Kern sehr wohl haben, s. § 47.

Das Quadrupolwechselwirkungsglied verschwindet hingegen nicht:

$$W_2 = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{8\pi^2}{5}\times$$

$$\times\iiint \frac{\rho_{e(\vec{r}')}}{r'^3} Y^*_{2,0\,(\theta',\Phi')}\,dV' \iint \rho_{K(\vec{r})}\,Y_{2,0\,(\omega,\alpha=0)}\,r^4\,dr\,d(\cos\omega)\,.$$

Das Integral über r' kann man hier über den ganzen Raum erstrecken, obwohl die Entwicklung (30.2) für sehr kleine r' nicht gilt. Aber da solche Elektroneneigenfunktionen, die bei $r'=0$ merklich von Null verschieden sind, Kugelsymmetrie aufweisen (s. oben), verschwindet das Winkelintegral in diesen Fällen.

Man definiert das „innere Quadrupolmoment" des Kerns als

$$Q_0 = 2\int \rho_{K(r,\omega)}\,r^2\,P_{2\,(\cos\omega)}\,dV, \tag{30.4}$$

$$Q_0 = 4\pi\sqrt{\frac{4\pi}{5}}\int_{-1}^{+1}\int_0^\infty \rho_{K(r,\omega)}\,Y_{2,0\,(\omega,\alpha=0)}\,r^4\,dr\,d(\cos\omega)\,.$$

Dabei wurde von der Identität

$$P_{l\,(\cos\theta)} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\,Y_{l,0\,(\theta,\Phi=0)}$$

Gebrauch gemacht [s. (21.10)].

Somit läßt sich W_2 schreiben als

$$W_2 = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{\pi}{5}}\,Q_0\iiint \frac{\rho_{e(\vec{r}')}}{r'^3}\,Y^*_{2,0\,(\theta',\Phi')}\,dV'. \tag{30.5}$$

Zur Größe des Kernquadrupolmoments: Man sieht sofort, daß $Q_0=0$ wird, wenn die Ladungsverteilung des Kerns kugelsymmetrisch ist, d.h. wenn ρ_K nicht von ω abhängt. Denn dann kann man in (30.4) die Integration über ω ausführen und erhält mit

$$P_{2\,(\cos\omega)} = \tfrac{1}{2}(3\cos^2\omega - 1)$$

das Ergebnis

$$\int_{-1}^{+1} P_{2\,(\cos\omega)}\,d(\cos\omega) = 0\,. \tag{30.6}$$

Also verschwindet das Quadrupolmoment.

Für „Zigarren"-Form des Kerns (verlängertes Rotationsellipsoid) werden Werte von $|\cos\omega|\approx 1$ bevorzugt, das Quadrupolmoment wird positiv. Für „Untertassen"-Form des Kerns (abgeplattetes Rotationsellipsoid) werden Werte von $|\cos\omega|\approx 0$ bevorzugt, es entsteht ein negatives Quadrupolmoment.

Beispiele:

1. Im Abstand R um den Äquator laufendes Proton.

$$\omega=90°, \quad \cos\omega=0, \quad Q_0=2(-\tfrac{1}{2})R^2=-R^2. \tag{30.7}$$

2. Zwei halbe Protonen auf der ζ_K-Achse, je im Abstand $R/2$ vom Ursprung.

$$\omega=0;\ \pi, \quad \cos\omega=\pm 1, \quad P_2=1,$$

$$Q_0=2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{R}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{R}{2}\right)^2\right]=\frac{R^2}{2}. \tag{30.8}$$

Aus den Beispielen sieht man, daß die Größe des Kernquadrupolmomentes etwa gleich dem Kernquerschnitt sein wird. Q_0 wird daher meist in den Einheiten $[10^{-24}\ \mathrm{cm}^2]=$ [barn] angegeben.

3. Hat der Kern die Gestalt eines homogen geladenen Rotationsellipsoids mit den Halbachsen a und b, so ergibt sich

$$Q_0=\frac{8\pi}{15}\rho\, a^2\, b(b^2-a^2)=\frac{2}{5}Z(b^2-a^2). \tag{30.9}$$

Im Ausdruck (30.5) für W_2 bleibt das Integral über die Elektronenkoordinaten auszuführen. Dazu wird angenommen, daß die Elektronendichte $\rho_{e(\vec{r}')}$ rotationssymmetrisch um die ζ_e-Achse ist. Das Additionstheorem der Kugelfunktionen (30.3) ergibt

$$P_{l\,(\cos\theta')}=\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\,Y_{l,0\,(\theta',\Phi')}=\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{+l}Y^*_{l,m\,(\vartheta,\varphi)}\,Y_{l,m\,(\beta,\gamma)}.$$

Außerdem wird das Volumelement zu

$$dV'=r'^2dr'\sin\beta\, d\beta\, d\gamma.$$

Eingesetzt ergibt sich

$$W_2=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{\pi}{5}}\sqrt{\frac{4\pi}{5}}Q_0\sum_{m=-2}^{+2}\iiint\frac{\rho_{e\,(r',\beta)}}{r'^3}\times$$
$$\times\, Y^*_{2,m\,(\beta,\gamma)}\,Y_{2,m\,(\vartheta,\varphi)}\,r'^2\,dr'\sin\beta\, d\beta\, d\gamma.$$

Bei Integration über γ fallen wieder alle Glieder mit $m\neq 0$ fort, und es wird

$$\left.\begin{aligned}W_2&=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\pi^2}{5}Q_0\,Y_{2,0\,(\vartheta,\varphi)}\iint\frac{\rho_{e\,(r',\beta)}}{r'^3}\times\\&\quad\times Y^*_{2,0\,(\beta,\gamma)}\,r'^2\,dr'\sin\beta\, d\beta\\&=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\pi\, Q_0\, P_{2\,(\cos\vartheta)}\iint\frac{\rho_{e\,(r',\beta)}}{r'}\times\\&\quad\times P_{2\,(\cos\beta)}\,dr'\,d(\cos\beta).\end{aligned}\right\} \tag{30.10}$$

Kugelsymmetrische Elektronenverteilungen, bei denen ρ_e nicht von β abhängt, bringen wegen (30.6) keinen Beitrag zu W_2. Also ergeben nur solche Elektronenhüllen eine Quadrupolwechselwirkungsenergie, für die $J \neq 0$ und $J \neq \frac{1}{2}$ ist.

Man kann den Ausdruck (30.10) noch weiter umformen, um ihn etwas anschaulicher verständlich zu machen. Dazu betrachtet man das Potential (30.1) in einem kartesischen Koordinatensystem, in dem die ζ_e-Achse die Rolle der z-Achse spielt (vgl. Fig. 30.1). Dann ist

$$|\vec{r}-\vec{r}\,'| = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

und

$$z' = r' \cos\beta\,.$$

Zweimaliges Differenzieren ergibt an der Stelle $r=0$

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right)_{r=0} = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho_{e\,(r',\beta)}}{r'^3}(3\cos^2\beta-1)\,dV'$$

$$= -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\iint 4\pi\,\frac{\rho_{e\,(r',\beta)}}{r'^3}\,P_{2\,(\cos\beta)}\,d(\cos\beta)\,dr'.$$

Damit läßt sich W_2 darstellen als

$$W_2 = \frac{e\,Q_0}{4}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)_{r=0} P_{2\,(\cos\vartheta)}\,. \tag{30.11}$$

Die Wechselwirkungsenergie kommt also zustande durch die Ankopplung des Kernquadrupolmoments an den Gradienten der elektrischen Feldstärke, der durch die Hülle erzeugt wird.

In der Spektroskopie wird die „Quadrupolkopplungskonstante“ B definiert als

$$B = e\,Q_0\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)_{r=0},$$

damit läßt sich (30.11) schreiben als

$$W_2 = \frac{B}{4}P_{2\,(\cos\vartheta)}\,.$$

Die Aufgabe der quantenmechanischen Rechnung ist, den Differentialquotienten $(\partial^2\varphi/\partial z^2)_{r=0}$ entlang der J-Achse und $P_{2\,(\cos\vartheta)}$ durch die Quantenzahlen des Systems auszudrücken. Weiterhin muß berücksichtigt werden, daß weder die Symmetrieachse der Elektronenverteilung noch die des Kerns im Raum fest bleiben, sondern der Gesamtdrehimpuls $\vec{F}$ des Systems Kern plus Elektronenhülle.

B e i s p i e l: Wechselwirkungsenergie eines Kernquadrupols mit einem Elektron im $p_{\frac{3}{2}}$-Zustand.

Die Wellenfunktion des Elektrons wird aus (26.9) entnommen, der Radialanteil sei mit $R_{(r')}$ bezeichnet. Die Ladungsdichte ist dann

$$\rho_{e\,(r',\beta)} = |\Psi_{(r',\beta)}|^2 = |R_{(r')}|^2\,|\varphi_{j=\frac{3}{2},\,m_j\,(\beta)}|^2,$$

wobei mit (21.10) gilt

$$|\varphi_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}|^2 = |\varphi_{\frac{3}{2},-\frac{3}{2}}|^2 = \frac{3}{8\pi}(1-\cos^2\beta)$$

$$|\varphi_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}|^2 = |\varphi_{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}}|^2 = \frac{1}{8\pi}(1+3\cos^2\beta).$$

Damit wird aus (30.10)

$$W_2 = -\frac{\pi e^2}{4\pi\,\varepsilon_0}\,Q_0\,P_{2\,(\cos\vartheta)}\int\limits_0^\infty \frac{|R_{(r')}|^2}{r'}\,dr' \times$$

$$\times \int\limits_{-1}^{+1} P_{2\,(\cos\beta)} \begin{Bmatrix} \dfrac{3}{8\pi}(1-\cos^2\beta) \\ \dfrac{1}{8\pi}(1+3\cos^2\beta) \end{Bmatrix} d(\cos\beta) \quad \text{für} \quad \begin{cases} m_j = \pm\frac{3}{2} \\ m_j = \pm\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Das Winkelintegral liefert $-\dfrac{1}{10\pi}$ für $m_j = \pm\dfrac{3}{2}$ und $+\dfrac{1}{10\pi}$ für $m_j = \pm\dfrac{1}{2}$, also

$$W_2 = \pm\frac{e^2}{40\pi\,\varepsilon_0}\,Q_0\,P_{2\,(\cos\vartheta)}\int\limits_0^\infty \frac{|R_{(r')}|^2}{r'}\,dr' \quad \text{für} \quad \begin{cases} m_j = \pm\frac{3}{2} \\ m_j = \pm\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Das Radialintegral verlangt die Kenntnis der Radialfunktion $R_{(r')}$. Als einfache Näherung kann man die Wasserstoffeigenfunktionen (s. Übungsaufgabe VIII, 4) im $2p$-Zustand

$$R_{2,1} = \left(\frac{Z}{2r_H}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{Zr}{r_H\sqrt{3}} \exp\left(-\frac{Zr}{2r_H}\right)$$

verwenden; dann ergibt das Radialintegral

$$\int\limits_0^\infty \frac{|R_{2,1}|^2}{r'}\,dr' = \frac{1}{24}\left(\frac{Z}{r_H}\right)^3.$$

Damit liefert die klassische Rechnung schließlich

$$W_2 = \pm\frac{e^2}{960\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{Z}{r_H}\right)^3 Q_0\,P_{2\,(\cos\vartheta)} \quad \text{für} \quad \begin{cases} m_j = \pm\frac{3}{2} \\ m_j = \pm\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Man sieht, daß bei Existenz eines Kernquadrupolmomentes eine Hfs-Aufspaltung z.B. des $p_{\frac{3}{2}}$-Nievaus erfolgt, und zwar in diesem Falle in zwei je zweifach entartete Subniveaus. Diese Aufspaltung überlagert sich bei Existenz eines magnetischen Kerndipolmomentes der magnetischen Hfs-Aufspaltung und bewirkt eine Störung der Intervallregel (vgl. Fig. 29.2).

b) Quantenmechanischer Rechenansatz

Der HAMILTON-Operator des Gesamtsystems aus Kern und Elektronenhülle enthält einen Term, der die elektrostatische Wechselwirkung der beiden Teilsysteme beschreibt. Bei Beschränkung auf *ein* Elektron lautet dieser Term ($\vec{r}_p$=Ortsvektor eines Protons, $\vec{r}_e$=Ortsvektor des Elektrons):

$$H' = -\sum_{p=1}^{Z} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_e - \vec{r}_p|} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{p=1}^{Z} \frac{1}{r_e} \sum_{l=0}^{\infty} P_{l\,(\cos\theta)} \left(\frac{r_p}{r_e}\right)^l .$$

Der Entwicklungsterm für $l=0$ ist

$$H'_0 = -\sum_{p=1}^{Z} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_e} = -\frac{Z e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_e}$$

und beschreibt die Wechselwirkung eines Punktkerns der Ladung Ze mit dem Elektron. Dieser Term wird dem „ungestörten" HAMILTON-Operator zugeschlagen, der dann die Form hat:

$$H_0 = H_{\text{Kern}} + H_{\text{Elektron}} = H_{\text{Kern}} + \frac{p_e^2}{2m_e} - \frac{Z e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_e} .$$

Die Lösungen des Problems

$$H_0 \Psi_0 = E \Psi_0$$

sind die Wasserstoff-Eigenfunktionen und -Eigenwerte.

Der Entwicklungsterm für $l=1$ kann nach den Überlegungen des §30a gleich Null gesetzt werden, so daß als „Störung" nur das Quadrupolglied (und höhere Glieder, die hier wegen ihrer Kleinheit nicht mitbetrachtet werden sollen) übrigbleibt:

$$H'_2 = -\sum_{p=1}^{Z} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_e} P_{2\,(\cos\theta)} \left(\frac{r_p}{r_e}\right)^2 .$$

Der H'_2-Term koppelt Elektronen- und Kernkoordinaten aneinander.

Mit der sicher vernünftigen Annahme, daß die Zusatzenergien aufgrund der Quadrupolkopplung klein sind gegen die Abstände der Eigenwerte des ungestörten Systems, kann man H'_2 als Störung betrachten. Zunächst verschafft man sich die „ungestörten" Eigenfunktionen zum Operator H_0, die gleichzeitig Eigenfunktionen zum (raumfesten) Operator $\vec{F}$ des Gesamtdrehimpulses

$$\vec{F} = \vec{I} + \vec{j}$$

und seiner (raumfesten) z-Komponente

$$F_z = I_z + j_z$$

sind, durch den Ansatz

$$\Psi_0 = \sum_{m_I} C_{I,j,F;m_I,m_F} \psi_{I,m_I} \psi_{n,j,m_j}.$$

Dabei ist ψ_{I,m_I} die Eigenfunktion des Kerns, ψ_{n,j,m_j} die Eigenfunktion des Elektrons (n steht für die übrigen Quantenzahlen des Elektronenzustandes) und $m_F = m_I + m_j$. Die Störenergie ΔW_2 erhält man aus

$$\Delta W_2 = \int \Psi_0^* H_2' \Psi_0 \, d\tau,$$

dabei ist sowohl über die Kern- als auch über die Elektronenkoordinaten zu integrieren. Zweckmäßigerweise drückt man wieder $P_{2(\cos\theta)}$ nach Fig. 30.1 durch die dem System angepaßten Winkel aus und definiert das Kernquadrupolmoment quantenmechanisch als [vgl. (30.4)]

$$Q_0 = \left[2 \int \psi_{I,m_I}^* r_k^2 P_{2(\cos\omega)} \psi_{I,m_I} \, d\tau\right]_{m_I = I} \tag{30.12}$$

sowie den Gradienten der elektrischen Feldstärke am Kernort als

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{d z^2}\right)_{r=0} = \left[\int \psi_{n,j,m_j}^* \frac{3\cos^2\beta - 1}{r'^3} \psi_{n,j,m_j} \, d\tau'\right]_{m_j = j}$$

(Richtungsdifferentialquotient in $\vec{j}$-Richtung).

Die Rechnung ist zu langwierig, um hier explizit durchgeführt werden zu können *. Das Ergebnis ist die erstmals von CASIMIR hergeleitete Formel

$$\Delta W_2 = \frac{e Q_0}{4} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right)_{r=0} \frac{\frac{3}{2} C(C+1) - 2I(I+1) J(J+1)}{I(2I-1) J(2J-1)} \tag{30.13}$$

mit

$$C = F(F+1) - I(I+1) - J(J+1).$$

ΔW_2 bewirkt eine von der Quanteneinstellung der Drehimpulse $\vec{I}$ und $\vec{J}$ abhängige Aufspaltung der Hfs-Niveaus. Sie ist schon ohne magnetisches Kerndipolmoment vorhanden und überlagert sich bei Existenz eines solchen der magnetischen Aufspaltung.

Für $I = 0$, $\frac{1}{2}$ oder $J = 0$, $\frac{1}{2}$ verschwindet der Ausdruck (30.13), da dann Kern oder Elektronenhülle kugelsymmetrisch sind und im Mittel keine Vorzugsrichtung haben (Q_0 kann trotzdem von Null verschieden sein). In allen anderen Fällen kann man aus der Hfs-Aufspaltung auf die Größe des Produktes aus elektrischem Kernquadrupolmoment und Feldgradient schließen. Da die Bestimmung des Feldgradienten oft auf Schwierigkeiten stößt, sind

* Einzelheiten s. RAMSEY, Nuclear Moments, John Wiley 1953.

die spektroskopischen Werte für das Kernquadrupolmoment meist nur ungenau bekannt. Aus speziellen Kernreaktionen läßt sich in günstig gelagerten Fällen das Quadrupolmoment genauer messen.

Das experimentelle Material ist in Fig. 30.3 schematisch zusammengestellt; man sieht, daß bei wachsender Nukleonenzahl das Kernquadrupolmoment zwischen positiven und negativen Werten hin- und heroszilliert.

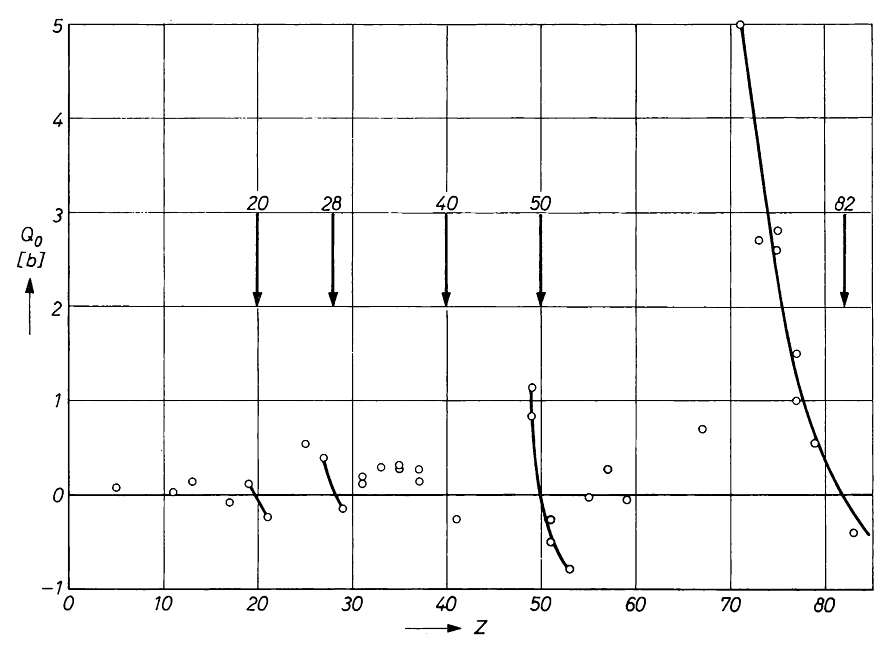


Fig. 30.3. Gemessene Werte des Kernquadrupolmomentes von stabilen *u-g*-Kernen (Grundzustände). Beachte die Nulldurchgänge bei und zwischen den magischen Zahlen

Dies zeigt, daß die Kerne im allgemeinen nicht ganz kugelförmig sind; man kann ferner auf einen Schalenaufbau der Kerne schließen. Denn ist z.B. eine Protonenschale voll aufgefüllt, so wird eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung und damit $Q_0=0$ resultieren. Enthält ein Kern darüber hinaus ein weiteres Proton als „Bauchbinde", so nimmt er „Untertassen"-Gestalt an und sein Quadrupolmoment wird nach (30.7) negativ; fehlt ein Proton an einer vollen Schale, so wird der Kern „zigarrenförmig", Q_0 wird nach (30.8) positiv. Bei abgeschlossenen sowie bei halbvollen Schalen wird $Q_0=0$. Dazwischen kann Q_0 zum Teil recht große Werte annehmen, etwa im Gebiet der seltenen Erden. Die Deformationen sind jedoch auch hier nur klein; im extremsten Fall unterscheiden sich die Halbachsen des Modell-Rotationsellipsoids um etwa 30%.

Der experimentelle Befund unterstützt die Schalenmodellvorstellung, wenn man die magischen Zahlen als Schalenabschluß deutet (vgl. § 16). Allerdings ergeben sich bei einer quantitativen Behandlung Unstimmigkeiten in der Richtung, daß die aus dem Schalenmodell berechneten Quadrupolmomente kleiner als die gemessenen sind. Die Abweichungen können durch Betrachtung eines Kernmodells, das außer der Schalenstruktur die kollektiven Deformationen des Kerntröpfchens („Rumpf“) berücksichtigt, in einigermaßen befriedigender Weise behoben werden (vgl. § 51).

XI. Einteilchen-Schalenmodell des Atomkerns

Das einfachste quantenmechanische Kernmodell ist das Einteilchen-Schalenmodell. Es ist gedacht für Kerne mit ungerader Nukleonenzahl und basiert auf der Vorstellung, daß einige wesentliche Eigenschaften der Kerngrundzustände wie Spin, Parität und Kernmomente allein durch das unpaarige Nukleon verursacht werden. Das Vielnukleonenproblem wird in dieser Näherung als Einteilchenproblem behandelt, indem angenommen wird, daß sich das unpaarige Teilchen in einem Kernpotential bewegt, das von den übrigen Nukleonen („Rumpf“) herrührt. Damit hat der Ansatz eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Wasserstoffproblem, bei dem sich ein Elektron im (elektrischen) Potential des Kerns befindet. Ähnlich wie in der Hülle gewisse „Elektronenschalen“ resultieren, bei deren Abschluß jeweils eine kugelsymmetrische, inerte „Edelgaskonfiguration“ auftritt, so werden sich beim Schalenmodell des Atomkerns bei gewissen Nukleonenzahlen abgeschlossene Schalen ergeben, die mit den magischen Zahlen (s. §16) identifiziert werden können. Um die experimentell gefundenen magischen Zahlen zu reproduzieren, muß man jedoch zusätzlich zu einem nur von r abhängigen Potential eine starke Spin-Bahn-Kopplung der Nukleonen annehmen, die zu einer j-j-Kopplung innerhalb des Kerns führt (vgl. §26).

In §31 befassen wir uns allgemein mit der Spin-Bahn-Kopplung. In §32 wird das SCHRÖDINGER-Problem mit einem parabelförmigen Kernpotential und in §33 mit einem kastenförmigen Kernpotential gelöst. Es zeigt sich, daß die Form des Kernpotentials, die den experimentellen Befunden am besten gerecht wird, zwischen diesen beiden Grenzfällen liegt. Als Anwendung, aber darüber hinaus auch im Interesse der Sache, beschäftigen wir uns in §34 mit der Frage der Verteilung der elektrischen Ladung im Kern.

§ 31. Spin-Bahn-Kopplung

Als Einführung betrachten wir die Spin-Bahn-Kopplung eines im Atomverband gebundenen Elektrons. Die Kopplung beruht auf der Wechselwirkung der mit den Drehimpulsen verbundenen magnetischen Momente.

Bewegt sich ein Elektron ($z=-1$) in einem elektrischen Feld

$$\vec{E} = -\frac{1}{z e} \operatorname{grad} U$$

(auf das Elektron wirkt dann die Kraft $\vec{K} = -\operatorname{grad} U = z e \vec{E}$), so erzeugt die Bewegung des Elektrons mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ (es sei $v \ll c$ angenommen) am Ort des Elektrons ein Magnetfeld der Größe

$$\vec{H} = \varepsilon_0 [\vec{E} \times \vec{v}] = -\frac{\varepsilon_0}{z e} [\operatorname{grad} U \times \vec{v}] = -\frac{\varepsilon_0}{z e m} [\operatorname{grad} U \times \vec{p}],$$

wobei mit $\vec{p} = m\vec{v}$ der Elektronenimpuls bezeichnet ist.

Dieses Magnetfeld wirkt auf das magnetische Moment $\vec{\mu}_s$ des Elektronenspins ein. Der Operator der Wechselwirkungsenergie ist nach §28

$$W' = -(\vec{\mu}_s \vec{H})$$

mit

$$\vec{\mu}_s = -g_s \frac{\mu_0 e}{2m} \vec{s}.$$

Damit ergibt sich

$$W' = -g_s \frac{\mu_0 e}{2m} \frac{\varepsilon_0}{z e m} (\vec{s} [\operatorname{grad} U \times \vec{p}]).$$

Wenn U nur vom Abstand r abhängt, ist

$$\operatorname{grad} U = \frac{dU}{dr} \frac{\vec{r}}{r}.$$

Mit $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ und $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ folgt

$$W' = -\frac{g_s}{2 z c^2 m^2} \frac{1}{r} \left(\frac{dU}{dr}\right) (\vec{s}\,\vec{l}). \tag{31.1}$$

Der Wechselwirkungsoperator enthält also das Produkt aus Bahn- und Spindrehimpuls, dessen Eigenwerte nach (26.11) berechnet werden können. Solange es sich um ein einzelnes Elektron handelt, muß die Quantenzahl $j = l \pm \frac{1}{2}$ sein. Wenn W' mit dem übrigen HAMILTON-Operator kommutiert, folgt dann mit (26.11) für die Zusatzenergie * als Eigenwert des Operators W' der Ausdruck

$$\Delta W' = -\frac{\hbar^2 g_s}{8 z c^2 m^2} \frac{1}{r} \left(\frac{dU}{dr}\right) \begin{Bmatrix} l \\ -(l+1) \end{Bmatrix} \text{ für } \begin{Bmatrix} j = l + \frac{1}{2} \\ j = l - \frac{1}{2}. \end{Bmatrix} \tag{31.2}$$

* Ein Faktor $\frac{1}{2}$, der als THOMAS-Korrektur bezeichnet wird und von relativistischen Effekten herrührt, kann im Rahmen dieser Abhandlung nicht begründet werden. Siehe A. SOMMERFELD, Atombau und Spektrallinien, Braunschweig 1939, Teil I, Seite 707.

Zur Abkürzung definieren wir

$$\alpha_0 = -\frac{\hbar^2 g_s}{8 z c^2 m^2 r}\left(\frac{dU}{dr}\right). \tag{31.3}$$

Damit wird

$$\Delta W' = \alpha_0 \begin{Bmatrix} l \\ -(l+1) \end{Bmatrix}. \tag{31.4}$$

Für Terme mit $l=0$ gibt es keine Zusatzenergie, da j nicht negativ werden kann, also stets $j=\frac{1}{2}$ und damit $\Delta W'=0$ ist. Ein s-Term* wird also nicht durch die Spin-Bahn-Kopplung beeinflußt.

Im COULOMB-Potential

$$U = \frac{z Z e^2}{4\pi \varepsilon_0 r}$$

[vgl. (3.10) und (3.6)] ist

$$\alpha_0 = g_s \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c} \frac{(\hbar c)^3}{(m c^2)^2} \frac{Z}{r^3}.$$

Der Term mit „parallelen" Spin- und Bahndrehimpulsvektoren liegt energetisch höher (weniger gebunden) als der Term mit „antiparallelen" Vektoren.

Als Beispiel betrachten wir die Aufspaltung des p-Terms eines Einelektronensystems aufgrund der Spin-Bahn-Kopplung:

Die SCHRÖDINGER-Gleichung lautet

$$(H^0 + W')\Psi = E\Psi$$

mit

$$H^0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U_{(r)}.$$

Wir nehmen an, daß das Problem

$$H^0 \Psi^0_{n,l} = E^0_n \Psi^0_{n,l}$$

gelöst sei; die Funktionen $\Psi^0_{n,l}$ seien durch (26.8) gegeben. Wenn die Operatoren H^0 und W' kommutieren, findet man die Eigenwerte $E_{n,l}$ aus

$$E_{n,l} = E^0_n + \Delta W'_l.$$

Im Falle des p-Zustandes ($l=1$) führt dies auf das Dublett (s. Fig. 31.1)

$$E_{n,1} = E^0_n + \alpha_0 \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \end{Bmatrix} \quad \text{für} \quad j = \begin{Bmatrix} \frac{3}{2}, \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \tag{31.5}$$

* Spektroskopische Abkürzung für einen Term mit $l=0$. Allgemein haben sich folgende Buchstabenabkürzungen eingebürgert:

l	0	1	2	3	4	5	6
Abkürzung	s	p	d	f	g	h	i

usw.

wobei jetzt

$$\alpha_0 = g_s \frac{Z e^2}{4\pi \varepsilon_0 \hbar c} \frac{(\hbar c)^3}{(m c^2)^2} \int \Psi_{n,l}^{0\,*} \frac{1}{r^3} \Psi_{n,l}^0 \, d\tau$$

bedeutet. Durch die Spin-Bahn-Aufspaltung wird der „Schwerpunkt" des ^2p-Zustandes nicht verschoben, da der $^2p_{\frac{3}{2}}$-Zustand 4fach entartet ist (denn m_j kann die Werte $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ und $-\frac{3}{2}$ annehmen), der $^2p_{\frac{1}{2}}$-Zustand nur zweifach ($m_j = \pm\frac{1}{2}$). Diese m_j-Entartung wird z.B. in einem äußeren Magnetfeld aufgehoben (Zeeman-Effekt, s. § 29).

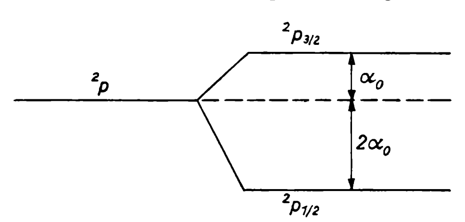


Fig. 31.1. Aufspaltung eines ^2p-Elektronenterms durch die Spin-Bahn-Kopplung

Die Termverschiebung (31.5) wurde aus der Feinstruktur der Spektrallinien nach Vorzeichen und Größe für Elektronenterme bestätigt.

Auch bei Protonen und Neutronen im Kern gibt es eine anscheinend zu $(\vec{s}\,\vec{l})$ proportionale Termverschiebung. Diese kann aber nicht allein durch magnetische Spin-Bahn-Kopplung zustande kommen, da z.B. das Neutron ungeladen ist und kein Magnetfeld erzeugt. Der Mechanismus der Wechselwirkung ist weitgehend unbekannt und soll hier völlig offen bleiben. Der Vergleich mit dem Experiment zeigt, daß ein Ansatz wie (31.1) vernünftig ist, wenn man eine dimensionslose Konstante einfügt und das *Vorzeichen ändert*. Dies deutet an, daß der Mechanismus, der der Spin-Bahn-Kopplung von Nukleonen im Kern zugrunde liegt, grundlegend anders sein muß als der elektromagnetische, der für Elektronen im Atomverband wirkt.

§ 32. Einteilchen-Schalenmodell mit Parabelpotential

Die Grundannahmen des Einteilchen-Schalenmodells für den Atomkern sind:

1. Ein *u-g-* oder *g-u-*Kern wird gedanklich zerlegt in einen *g-g-*Rumpf und ein unpaariges Einzelteilchen. Dieses Einzelteilchen bewegt sich in dem als kugelsymmetrisch angenommenen Potential, das der Rumpf erzeugt. Zur Rechnung wird – drastisch ausgedrückt – der aus Nukleonen bestehende Rumpf weggedacht und durch ein Potential $U_{(r)}$ ersetzt. Hiermit werden automatisch alle Stöße des ausgezeichneten Teilchens mit den Rumpfnukleonen unmöglich; das Modell unterscheidet sich also stark vom Tröpfchenmodell.

Dem Pauli-Prinzip wird Rechnung getragen, indem man annimmt, daß die $(A-1)$ Rumpfnukleonen die $(A-1)$ niedrigsten Energiezustände im Potentialtopf besetzen.

Die Form des Potentials muß so gewählt werden, daß die Rechenergebnisse möglichst den experimentellen Gegebenheiten gerecht werden. In diesem Paragraphen werden wir ein Parabelpotential (Potential des harmonischen Oszillators) annehmen, im nächsten Paragraphen ein Rechteckpotential („Kasten“-Potential). Der Vergleich mit dem Experiment zeigt, daß für leichte Kerne das Parabelpotential, für schwere Kerne das Rechteckpotential eine bessere Näherung darstellt.

2. Es wird eine Spin-Bahn-Kopplung des unpaarigen Nukleons in Analogie zu (31.1) angenommen (s. dazu die Bemerkungen am Schluß von §31):

$$W' = -\frac{\lambda}{c^2 M^2}\left(\frac{1}{r}\frac{dU}{dr}\right)(\vec{s}\,\vec{l}), \tag{32.1}$$

wobei λ eine dimensionslose Konstante, M die reduzierte Nukleonenmasse und U das Kernpotential ist.

Wir betrachten nun das Oszillatorpotential (vgl. §22e)

$$U = -V_0 + \tfrac{1}{2} M\omega^2 r^2 \tag{32.2}$$

mit den freien Konstanten V_0 und ω. Dabei erlauben wir uns die Vereinfachung, das Potential außerhalb des Kerns, also für* $r > \sqrt{\frac{2V_0}{M\omega^2}}$, auch durch (32.2) zu beschreiben, obwohl in Wirklichkeit außerhalb des Kerns keine Kernkräfte mehr wirken, das Potential also konstant (gleich Null) sein müßte. Das bedeutet, daß für die gebundenen Zustände, für die wir uns hier allein interessieren, die Wellenfunktionen für großes r schneller gegen Null streben als bei einem realistischeren Potential. Wenn aber V_0 groß genug ist, wird die Vereinfachung auf die relative Lage der niedrig liegenden Energiezustände keinen großen Einfluß haben.

Die Eigenwerte des ungestörten HAMILTON-Operators (d.h. ohne Spin-Bahn-Kopplung) lassen sich der Gleichung (22.22), die zugehörigen Eigenfunktionen der Gleichung (22.23) entnehmen. Mit Spin-Bahn-Kopplung ergibt sich mit (31.4) und (32.1) eine Zusatzenergie von

$$\Delta W' = -\alpha' \begin{Bmatrix} l \\ -(l+1) \end{Bmatrix} \quad \text{für} \quad I = \begin{cases} l+\frac{1}{2} \\ l-\frac{1}{2}, \end{cases}$$

wobei

$$\alpha' = \frac{\lambda}{2}\frac{\hbar^2}{c^2 M^2}\frac{1}{r}\left(\frac{dU}{dr}\right) = \frac{\lambda}{2}\frac{\hbar^2\omega^2}{Mc^2}$$

eine aus dem Experiment zu bestimmende Größe (Dimension: Energie) ist.

* Eine Beziehung zwischen den Parametern des Schalenmodells ergibt sich, wenn man den Kernradius nach (13.2) einsetzt:

$$\hbar\omega = \frac{\hbar c}{R_0}\sqrt{\frac{2V_0}{Mc^2}}\,A^{-\frac{1}{3}} \approx 7{,}7\sqrt{\frac{V_0}{\text{MeV}}}\,A^{-\frac{1}{3}}\,[\text{MeV}]\,.$$

Tabelle 32.1. *Übersicht über das Zustandekommen der Kernspins und der magischen Zahlen nach der Vorstellung des Einteilchen-Schalenmodells für Kerne mit ungeradem A. Gilt unabhängig für Protonen und für Neutronen*

Symbol	$1s_{\frac{1}{2}}$	$1p_{\frac{3}{2}}$	$1p_{\frac{1}{2}}$	$1d_{\frac{5}{2}}$	$1d_{\frac{3}{2}}$	$2s_{\frac{1}{2}}$	$1f_{\frac{7}{2}}$	$1f_{\frac{5}{2}}$	$2p_{\frac{3}{2}}$	$2p_{\frac{1}{2}}$
n	0	1			2			3		
l	0	1		2		0	3		1	
I	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
Zahl der Zustände $(2I+1)$	2	4	2	6	4	2	8	6	4	2
Zahl der Nukleonen in voller „Schale"	2	6			12		8		12	
Magische Zahl	2		8			20	(28)			(40)

Symbol	$1g_{\frac{9}{2}}$	$1g_{\frac{7}{2}}$	$2d_{\frac{5}{2}}$	$2d_{\frac{3}{2}}$	$3s_{\frac{1}{2}}$	$1h_{\frac{11}{2}}$	$1h_{\frac{9}{2}}$	$2f_{\frac{7}{2}}$	$2f_{\frac{5}{2}}$	$3p_{\frac{3}{2}}$	$3p_{\frac{1}{2}}$
n			4					5			
l	4		2		0	5		3		1	
I	$\frac{9}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
Zahl der Zustände $(2I+1)$	10	8	6	4	2	12	10	8	6	4	2
Zahl der Nukleonen in voller „Schale"	10		32						44		
Magische Zahl	50					82					

Symbol	$1i_{\frac{13}{2}}$	$1i_{\frac{11}{2}}$	$2g_{\frac{9}{2}}$	$2g_{\frac{7}{2}}$	...
n		6			...
l	6		4		...
I	$\frac{13}{2}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{7}{2}$	...
Zahl der Zustände $(2I+1)$	14	12	10	8	...
Zahl der Nukleonen in voller „Schale"			58		...
Magische Zahl	126				184

Die Energieeigenwerte des Gesamtsystems erhält man damit zu

$$E_{n\,l} = -V_0 + \hbar\,\omega(n+\tfrac{3}{2}) - \alpha' \begin{Bmatrix} l \\ -(l+1) \end{Bmatrix}. \tag{32.3}$$

Die in §22e erhaltene Energieentartung in der Quantenzahl l wird also durch die Spin-Bahn-Kopplung aufgehoben. Man sieht, daß der Term mit $I=l+\frac{1}{2}$ energetisch niedriger liegt, also fester gebunden ist, als der Term mit $I=l-\frac{1}{2}$ (also umgekehrt wie bei Elektronen, s. §31). Die Aufspaltung wächst mit l und kann so groß werden, daß bei gegebenem n jeweils der Term mit dem größten l-Wert und $I=l+\frac{1}{2}$ energetisch zum Term-Multiplett der Quantenzahl $(n-1)$ rutscht. Es resultiert das Schema der Tabelle 32.1 (vgl. auch Fig. 33.2).

Zur Symbolik: Die kleinen Buchstaben sind die spektroskopischen Termsymbole und charakterisieren den l-Wert des Zustandes; die als Index angehängten halbzahligen Werte stehen für die Quantenzahl der Vektorsumme aus Spin- und Bahndrehimpuls des unpaarigen Nukleons, also für den Kernspin (der g-g-Rumpf soll, wie alle g-g-Kerne, den Kernspin Null haben). Die Zahl vor dem Buchstaben ist 1, wenn das folgende Symbol zum ersten Mal auftritt, 2 beim zweiten Mal usw. (die Zahl steht hier *nicht* für die Quantenzahl n wie bei der Bezeichnung der Terme der Elektronenhülle).

Um die magischen Zahlen richtig zu erhalten, zählt man bei großem l jeweils die Terme mit größtem l und $I=l+\frac{1}{2}$ zur niedrigeren Energiegruppe. Die Terme $1f_{\frac{7}{2}}$ und $1g_{\frac{9}{2}}$ liegen energetisch zwischen den vorangehenden und

Tabelle 32.2. *Energetische Termreihenfolge beim Einteilchen-Schalenmodell (noch schematisch, aber mit dem Experiment in roher Übereinstimmung, nach* Mayer-Jensen)

N ungerade . .	$1s_{\frac{1}{2}}$	$1p_{\frac{3}{2}}$	$1p_{\frac{1}{2}}$	$1d_{\frac{5}{2}}$	$2s_{\frac{1}{2}}$	$1d_{\frac{3}{2}}$	$1f_{\frac{7}{2}}$	$2p_{\frac{3}{2}}$	$1f_{\frac{5}{2}}$	$2p_{\frac{1}{2}}$	$1g_{\frac{9}{2}}$	$2d_{\frac{5}{2}}$
Z ungerade . .	$1s_{\frac{1}{2}}$	$1p_{\frac{3}{2}}$	$1p_{\frac{1}{2}}$	$1d_{\frac{5}{2}}$	$2s_{\frac{1}{2}}$	$1d_{\frac{3}{2}}$	$1f_{\frac{7}{2}}$	$2p_{\frac{3}{2}}$	$1f_{\frac{5}{2}}$	$2p_{\frac{1}{2}}$	$1g_{\frac{9}{2}}$	$1g_{\frac{7}{2}}$
Magische Zahl .	2		8			20	(28)			(40)	50	

N ungerade . .	$1g_{\frac{7}{2}}$	$3s_{\frac{1}{2}}$	$1h_{\frac{11}{2}}$	$2d_{\frac{3}{2}}$	$2f_{\frac{7}{2}}$	$1h_{\frac{9}{2}}$	$3p_{\frac{3}{2}}$	$2f_{\frac{5}{2}}$	$3p_{\frac{1}{2}}$	$1i_{\frac{13}{2}}$	$2g_{\frac{9}{2}}$	
Z ungerade . .	$2d_{\frac{5}{2}}$	$1h_{\frac{11}{2}}$	$2d_{\frac{3}{2}}$	$3s_{\frac{1}{2}}$	$1h_{\frac{9}{2}}$							
Magische Zahl .				82						126		

folgenden Energiegruppen, so daß die magischen Zahlen 28 und 40 nicht besonders stark ausgezeichnet sind. Die richtige Reihenfolge für die energetische Lage der Terme weicht innerhalb der „Schalen" von der schematischen der Tabelle 32.1 etwas ab, und zwar gilt ungefähr die in Tabelle 32.2 angegebene Termreihenfolge *.

* Genaueres s. M. G. Mayer und H. D. Jensen, Elementary Theory of Nuclear Shell Structure, John Wiley, 1957.

Mit den Daten der Tabellen 32.1 und 32.2 ist es möglich, die Spins und Paritäten der Grundzustände von *g-u-* und *u-g*-Kernen vorherzusagen. So ergibt sich z.B. für O^{17} ($N=9$, ungerade Neutronenzahl) als Vorhersage ein $d_{\frac{5}{2}}$-Zustand, d.h. Kernspin $\frac{5}{2}$ und $l=2$ (gerade), also gerade Parität. Für N^{15} ($Z=7$, ungerade Protonenzahl) sollte der Kernspin $\frac{1}{2}$ und die Parität ungerade sein ($p_{\frac{1}{2}}$-Zustand). Diese Voraussagen sind bei der überwiegenden Mehrheit der Kerne in Einklang mit dem experimentellen Befund. Zuweilen auftretende Verschiebungen, besonders bei schweren Kernen, lassen sich aus der Vorstellung erklären, daß es wegen der Paarungsenergien oft günstiger ist, daß sich die drei am schwächsten gebundenen Nukleonen zu einem abgesättigten Paar mit hohem Drehimpuls und einem Einzelteilchen mit kleinem Drehimpuls koppeln. Zum Beispiel sagt das Modell für den Kern Ta^{181} ($Z=73$) einen $\frac{11}{2}^-$-Grundzustand voraus, während $\frac{7}{2}^+$gemessen wurde. Aus Paarungsenergiegründen ist offenbar die Kombination ($\frac{11}{2}^-$-Protonenpaar und $\frac{7}{2}^+$-Proton) günstiger als ($\frac{7}{2}^+$-Protonenpaar und $\frac{11}{2}^-$-Proton).

Trotz des einfachen, fast zu simpel erscheinenden Ansatzes des Parabelpotentials für die Kernkräfte gelingt es, mit dem Einteilchen-Schalenmodell eine gewisse Ordnung in die gemessenen Werte für die Spins (s. Fig. 27.1) und Paritäten der Grundzustände der Atomkerne zu bringen. Darüber hinaus kann das Modell dazu benutzt werden, Spin und Parität von angeregten Zuständen vorauszusagen. So wird man z.B. erwarten, daß einer der niedrig liegenden Anregungszustände des Ta^{181} ein $\frac{11}{2}^-$-Zustand ist; ein solcher Zustand existiert tatsächlich bei einer Anregungsenergie von 0,159 MeV. Allerdings gibt es außer den hier vorausgesagten „Einteilchen"-Anregungszuständen noch sogenannte „kollektive" Anregungszustände, die nicht aus dem Schalenmodell, wohl aber aus dem Tröpfchenmodell gedeutet werden können (s. §51).

Aus der Lösung (22.23) des SCHRÖDINGER-Problems kann man die nach dem Schalenmodell zu erwartende Abhängigkeit der Nukleonendichte von den Ortskoordinaten bestimmen. Unter Berücksichtigung des Spins nach (26.9) und (26.10) lauten z.B. die normierten Nukleonen-Wellenfunktionen im $s_{\frac{1}{2}}$-, $p_{\frac{3}{2}}$- und $p_{\frac{1}{2}}$-Zustand mit der Abkürzung

$$a=B^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{\hbar}{M\omega}\right)^{\frac{1}{2}}:$$

$$\left.\begin{aligned}\psi_{s_{\frac{1}{2}}}&=2\left(\frac{1}{\pi a^6}\right)^{\frac{1}{4}}\exp\left(-\frac{r^2}{2a^2}\right)Y_{0,0}\,\chi_\pm\\&=\left(\frac{1}{\pi a^2}\right)^{\frac{3}{4}}\exp\left(-\frac{r^2}{2a^2}\right)\chi_\pm\end{aligned}\right\}\qquad(32.4)$$

(χ_+ gilt für $m_j=+\frac{1}{2}$, χ_- für $m_j=-\frac{1}{2}$);

$$\psi_{p_{\frac{3}{2}}} = 2\left(\frac{4}{9\pi a^{10}}\right)^{\frac{1}{4}} r \exp\left(-\frac{r^2}{2a^2}\right) \begin{cases} \chi_+ Y_{1,1} & \text{für } m_j = +\frac{3}{2} \\ \sqrt{\frac{2}{3}}\chi_+ Y_{1,0} + \sqrt{\frac{1}{3}}\chi_- Y_{1,1} & \text{für } m_j = +\frac{1}{2} \\ \sqrt{\frac{1}{3}}\chi_+ Y_{1,-1} + \sqrt{\frac{2}{3}}\chi_- Y_{1,0} & \text{für } m_j = -\frac{1}{2} \\ \chi_- Y_{1,-1} & \text{für } m_j = -\frac{3}{2}, \end{cases} \tag{32.5}$$

$$\psi_{p_{\frac{1}{2}}} = 2\left(\frac{4}{9\pi a^{10}}\right)^{\frac{1}{4}} r \exp\left(-\frac{r^2}{2a^2}\right) \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{3}}\chi_+ Y_{1,0} - \sqrt{\frac{2}{3}}\chi_- Y_{1,1} & \text{für } m_j = +\frac{1}{2} \\ \sqrt{\frac{2}{3}}\chi_+ Y_{1,-1} - \sqrt{\frac{1}{3}}\chi_- Y_{1,0} & \text{für } m_j = -\frac{1}{2}. \end{cases} \tag{32.6}$$

Die Nukleonendichte (d.h. die Wahrscheinlichkeit, ein Nukleon im Volumelement zu finden) eines Kerns der Nukleonenzahl A erhält man durch Integration über die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten der einzelnen Nukleonen:

$$\rho_{(\vec{r})} = \int \Psi^* \left[\sum_{k=1}^{A} \delta_{(\vec{r}-\vec{r}_k)}\right] \Psi \, d\tau_1 \, d\tau_2 \ldots d\tau_A . \tag{32.7}$$

Dabei setzt sich (bei Vernachlässigung der Wechselwirkung zwischen den Nukleonen!) die Funktion Ψ des gesamten Kerns nach (24.4) aus Produkten der Wellenfunktionen der einzelnen Nukleonen zusammen. Die Ausführung der Integration liefert wegen der Orthonormalität der ψ-Funktionen (s. Übungsaufgabe VIII, 7)

$$\rho_{(\vec{r})} = \sum_{k=1}^{A} |\psi_{k(\vec{r})}|^2 . \tag{32.8}$$

Die Normierung ergibt

$$\int \rho_{(\vec{r})} \, d\tau = A ,$$

wobei A die Nukleonenzahl bedeutet.

Für abgeschlossene Schalen und Unterschalen resultieren rein kugelsymmetrische Verteilungen (Beispiele s. Fig. 32.1):

a) He^4. Der Kern besteht aus 2 Protonen und 2 Neutronen, alle im $s_{\frac{1}{2}}$-Zustand. Alle $|\psi_k|^2$ sind gleich, also folgt

$$\rho_{(r)} = 4\left(\frac{1}{\pi a^2}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) . \tag{32.9}$$

Die Modelldichte hat die Form einer GAUSS-Kurve.

b) C^{12}. Der Kern besteht aus je 2 Protonen und Neutronen im $s_{\frac{1}{2}}$-Zustand und je 4 Protonen und Neutronen im $p_{\frac{3}{2}}$-Zustand. Es resultiert die Nukleonendichte

$$\left.\begin{aligned}\rho &= 4\left(\frac{1}{\pi a^2}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) + \\ &+ 8\,\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\pi a^{10}}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{4}{3}\,(Y_{1,1}^2 + Y_{1,0}^2 + Y_{1,-1}^2)\, r^2 \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) \\ &= 4\left(\frac{1}{\pi a^2}\right)^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{4}{3}\frac{r^2}{a^2}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right).\end{aligned}\right\} \qquad (32.10)$$

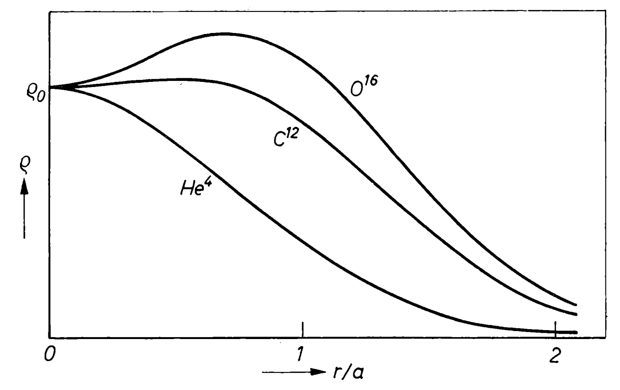


Fig. 32.1. Verteilungen der Nukleonendichte für die Kerne He^4, C^{12} und O^{16} nach dem Einteilchen-Schalenmodell. $\rho_0 = 4(\pi a^2)^{-\frac{3}{2}}$

c) O^{16}. Zusätzlich zu den Nukleonen im C^{12}-Kern enthält der Kern je 2 Protonen und Neutronen im $p_{\frac{1}{2}}$-Zustand. Es ergibt sich

$$\rho = 4\left(\frac{1}{\pi a^2}\right)^{\frac{3}{2}} \left(1 + 2\frac{r^2}{a^2}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right). \qquad (32.11)$$

Für diese Kerne stimmen die theoretischen Vorhersagen einigermaßen mit dem experimentellen Befund überein (Diskussion s. § 34), wenn die Konstante a entsprechend angepaßt wird. Zum Beispiel ergibt sich aus den Elektronenstreumessungen (s. § 34) am C^{12} ein Wert $a = 1{,}64 \cdot 10^{-13}$ cm, woraus folgt

$$M c^2 \cdot \hbar\omega \approx 1{,}6 \cdot 10^4\,[\mathrm{MeV}^2].$$

Wird für M etwa die Nukleonenmasse eingesetzt, so ergibt sich

$$\hbar\omega \approx 16\,\mathrm{MeV}.$$

Die Konstante a hängt etwas von A ab, s. § 34.

Kerne mit nicht abgeschlossenen Schalen oder Unterschalen sind nicht kugelsymmetrisch. Aus den Schalenmodell-Wellenfunktionen kann man einen Wert für das Quadrupolmoment dieser Kerne berechnen. Beim Vergleich mit experimentell bestimmten Werten für das Quadrupolmoment stellt sich jedoch heraus, daß die berechneten Werte zu klein sind. Das deutet darauf hin, daß das Schalenmodell allein nicht alle Eigenschaften der Kerne richtig beschreiben kann. Offenbar bleibt der Rumpf, der die Nukleonen der abgeschlossenen Schalen enthält, nicht kugelsymmetrisch, sondern wird durch die Wechselwirkung mit den „äußeren" Nukleonen permanent verformt. Rechnungen, die diese Vorstellung berücksichtigen, geben bessere Übereinstimmung mit den experimentell bestimmten Werten des Quadrupolmoments.

§ 33. Einteilchen-Schalenmodell mit Rechteckpotential

Die Rechnung mit einem Rechteckpotential nach Fig. 22.2 ist insofern kompliziert, als im Spin-Bahn-Kopplungsglied (32.1) die Ableitung des Potentials auftritt. Diese wird aber bei $r=R$ unendlich. Wir gehen deshalb

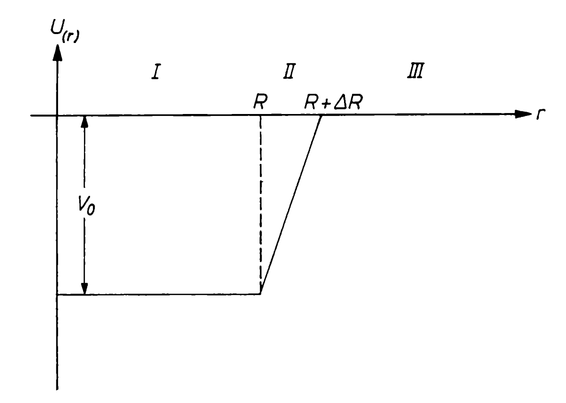


Fig. 33.1. Rechteckpotential mit schräger Wand; der Übergang $\Delta R \to O$ wird später vollzogen

von dem Potential der Fig. 33.1 aus und vollziehen später den Grenzübergang $\Delta R \to 0$.

Der Radialteil der SCHRÖDINGER-Gleichung lautet

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\left(u''-\frac{l(l+1)}{r^2}u\right)+\left[U-\frac{\lambda\hbar^2}{2M^2c^2}\frac{1}{r}\left(\frac{dU}{dr}\right)\left\{\begin{matrix} l \\ -(l+1)\end{matrix}\right\}\right]u=Eu. \quad (33.1)$$

Hierbei ist M die reduzierte Masse des unpaarigen Teilchens im Potentialtopf der übrigen Nukleonen. Zur Lösung zerlegen wir den Raum in drei Gebiete:

I. Für $r<R$ ist $U=-V_0$, $dU/dr=0$. Dann wird (33.1) zu

$$u_{\mathrm{I}}''+\left(\frac{2M}{\hbar^2}(V_0+E)-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)u_{\mathrm{I}}=0. \tag{33.2}$$

II. Für $R\leqq r\leqq R+\Delta R$ ist das Glied mit dU/dr so groß, daß man die langsam mit r veränderlichen Terme aus (33.1) dagegen vernachlässigen kann:

$$u_{\mathrm{II}}''+\frac{\lambda}{Mc^2}\frac{1}{r}\frac{dU}{dr}\begin{Bmatrix} l \\ -(l+1)\end{Bmatrix}u_{\mathrm{II}}=0. \tag{33.3}$$

III. Für $r>R+\Delta R$ ist $U=0$ und $dU/dr=0$, außerdem ist $E<0$ für gebundene Zustände, also

$$u_{\mathrm{III}}''+\left(\frac{2M}{\hbar^2}(-|E|)-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)u_{\mathrm{III}}=0. \tag{33.4}$$

Die Gleichung (33.1) wird zunächst im mittleren Bereich gelöst. Im Gültigkeitsbereich ist in guter Näherung $r=R$ und $u_{\mathrm{II}(r)}=u_{\mathrm{II}(R)}$. Damit läßt sich (33.3) in den Grenzen von $r=R$ bis $r=R+\Delta R$ integrieren:

$$u'_{\mathrm{II}(R+\Delta R)}-u'_{\mathrm{II}(R)}=-\frac{\lambda}{Mc^2}\frac{1}{R}\begin{Bmatrix} l \\ -(l+1)\end{Bmatrix}V_0\,u_{\mathrm{II}(R)}. \tag{33.5}$$

Wegen der Stetigkeit der Funktion $u_{(r)}$ müssen bei $\Delta R\to 0$ die Bedingungen

$$u_{\mathrm{I}(R)}=u_{\mathrm{II}(R)}=u_{\mathrm{II}(R+\Delta R)}=u_{\mathrm{III}(R+\Delta R)}$$

erfüllt sein. Außerdem gelten die Anschlußbedingungen für die Ableitungen

$$\left(\frac{du_{\mathrm{I}}}{dr}\right)_R=\left(\frac{du_{\mathrm{II}}}{dr}\right)_R \quad\text{und}\quad \left(\frac{du_{\mathrm{II}}}{dr}\right)_{R+\Delta R}=\left(\frac{du_{\mathrm{III}}}{dr}\right)_{R+\Delta R}.$$

Damit folgt aus (33.5) nach Division durch $u_{\mathrm{II}(R)}$ und für $\Delta R\to 0$

$$\left(\frac{1}{u_{\mathrm{I}}}\frac{du_{\mathrm{I}}}{dr}\right)_{r=R}-\left(\frac{1}{u_{\mathrm{III}}}\frac{du_{\mathrm{III}}}{dr}\right)_{r=R}=\frac{\lambda}{Mc^2}\frac{V_0}{R}\begin{Bmatrix} l \\ -(l+1)\end{Bmatrix}$$

oder

$$\left(\frac{d(\ln u_{\mathrm{I}})}{dr}-\frac{d(\ln u_{\mathrm{III}})}{dr}\right)_{r=R}=\frac{\lambda V_0}{Mc^2 R}\begin{Bmatrix} l \\ -(l+1)\end{Bmatrix}. \tag{33.6}$$

Man sieht zunächst, daß für $l=0$ die rechte Seite von (33.6) verschwindet, da bei $l=0$ nur $j=\frac{1}{2}$ sein kann, also die obere Zeile in der Klammer gilt. Die

Lösung von (33.2) ist (22.17), die Lösung von (33.4) ist (22.18). Damit geht (33.6) genau in (22.19) über; die Lösung im Falle $l=0$ ist (22.10). Der dortigen Diskussion sind die Lagen der Energieeigenwerte zu entnehmen, sie entsprechen den $s_{\frac{1}{2}}$-Zuständen im Schalenmodell.

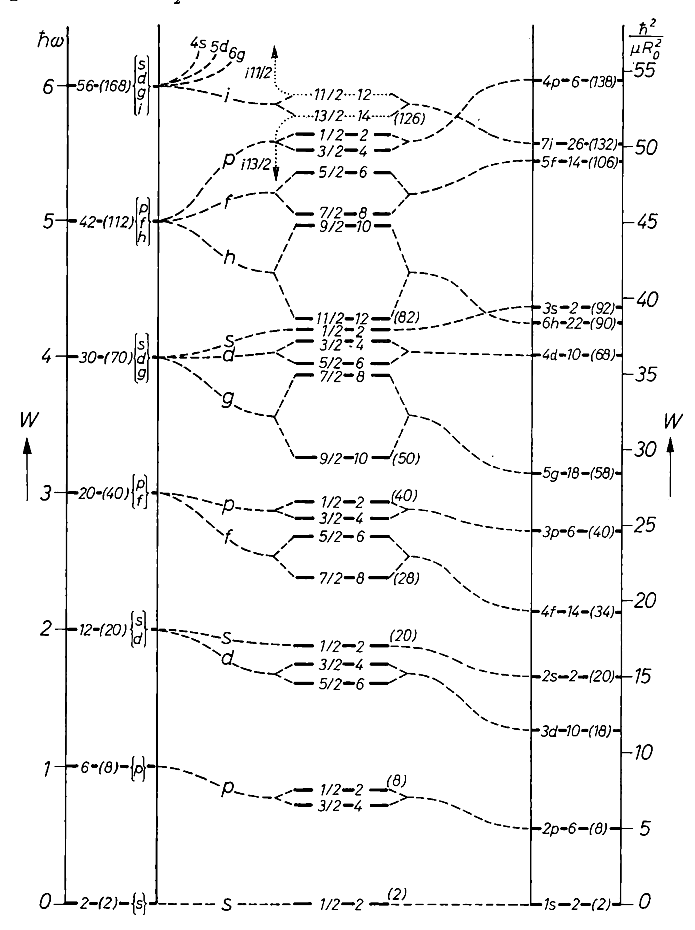


Fig. 33.2. Termschema eines Nukleons. Linke Seite für das Parabelpotential, rechte Seite für das Kastenpotential, Mitte: Spin-Bahn-Aufspaltung. Eingeklammerte Zahlen = maximale Besetzungszahlen. Der Übersichtlichkeit halber wurden Termüberschneidungen nicht eingezeichnet. Nach KOPFERMANN, Kernmomente, 1956

Für $l=1$ nimmt die rechte Seite von (33.6) für einen $p_{\frac{3}{2}}$-Zustand den Wert $\lambda V_0/Mc^2 R$, für einen $p_{\frac{1}{2}}$-Zustand den Wert $-2\lambda V_0/Mc^2 R$ an. Die linke Seite ist identisch mit der mittleren Gleichung (22.19a). Eine Auswertung kann nur numerisch erfolgen. Entsprechendes gilt für die höheren l-Werte;

für $l=2$ ergeben sich die $d_{\frac{3}{2}}$- und $d_{\frac{5}{2}}$-Zustände, für $l=3$ die $f_{\frac{5}{2}}$- und $f_{\frac{7}{2}}$-Zustände usw.

Durch die Spin-Bahn-Kopplung wird also jeder durch l gekennzeichnete Zustand in zwei Zustände aufgespaltet. Die numerische Größe der Aufspaltung wird wieder durch den theoretisch nicht bekannten Zahlenfaktor λ bestimmt, so daß eine gewisse Willkür bestehen bleibt und man versuchen muß, diesen Faktor den experimentellen Daten möglichst gut anzupassen.

Außerdem sind beim betrachteten Kastenpotential die Zahlenwerte von V_0 und R in gewissen Grenzen wählbar, während beim Parabelpotential als freie Konstanten die Größen V_0 und ω auftreten. Es ist also nicht ganz leicht, die Ergebnisse der beiden Rechnungen ohne Zusatzannahmen quantitativ zu vergleichen. Es liegt nahe, mit (13.2) über den Kernradius zu verfügen, ohne dabei einen allzu großen Fehler befürchten zu müssen (außer bei sehr leichten Kernen)*. Ein Versuch, die Rechnungen einigermaßen mit dem Experiment in Einklang zu bringen, wurde von HAXEL, JENSEN und SUESS unternommen, das Resultat ist in Fig. 33.2 dargestellt.

Der Schalenabschluß bei den magischen Zahlen kommt auch bei der Rechnung mit Rechteckpotential gut zum Ausdruck, ist also von der genauen Form des Kernpotentials unabhängig. Die wahre Form des Kernpotentials wird zwischen den extremen Annahmen der beiden Rechnungsansätze liegen; dies wird durch die im folgenden zu besprechenden experimentellen Untersuchungen bestätigt.

§ 34. Ladungsverteilung des Kerns, Vergleich mit Experimenten

a) Definition des Radius der elektrischen Ladungsverteilung

Daß der Kern nicht punktförmig sein kann, ist bereits aus der Besprechung des Tröpfchenmodells (s. Kapitel VI), des Schalenmodells (§32 und §33) und der Existenz der Kernquadrupolmomente (§30) klar geworden. In diesem Paragraphen wollen wir uns mit der räumlichen Verteilung der Kernladung beschäftigen. Die Vermutung liegt nahe, daß die Ausdehnung der Protonenwolke im Kern mit der Ausdehnung der Neutronenwolke übereinstimmt, so daß sich der „Kernradius“ und der „Radius der Ladungsverteilung“, wenn überhaupt, dann nur unwesentlich unterscheiden. Dies gilt insbesondere für leichte Kerne, die annähernd gleiche Protonen- und Neutronenzahlen haben und bei denen COULOMB-Effekte zwischen den Protonen vernachlässigt werden können.

Es gibt mehrere Definitionen des „Radius“ der Ladungsverteilung. Wenn die Ladungsdichte rein kugelsymmetrisch ist und etwa die in Fig. 34.1 dar-

* Siehe Fußnote auf S. 213.

gestellte Abhängigkeit vom Abstand vom Kernmittelpunkt hat, kann man die Ausdehnung des Kerns durch folgende Größen beschreiben:

1. Der Radius R der homogen geladenen Kugel mit gleicher Gesamtladung ist definiert durch

$$e\int_0^\infty \rho_{L(r)}\, 4\pi r^2\, dr = eZ = e\,\frac{4\pi}{3} R^3 \rho_0 \frac{Z}{A},$$

Fig. 34.1. Ladungsverteilung des Kerns (schematisch). C = „Halbwertsradius“, $R_{\text{Äq}}$ = „Äquivalentradius“, t = „Hautdicke“

wobei ρ_0 die *Nukleonen*dichte am Kernmittelpunkt ist. $e\rho_0 \frac{Z}{A}$ ist dann die *Ladungs*dichte bei $r=0$. Also

$$\rho_0 \frac{4\pi}{3} R^3 = A,$$

$$R = \left[\frac{3A}{\rho_0 Z}\int_0^\infty \rho_{L(r)}\, r^2\, dr\right]^{\frac{1}{3}}. \qquad (34.1)$$

2. Der „mittlere quadratische Radius“ der Ladungsverteilung ist definiert als Erwartungswert der Größe r^2:

$$\overline{r_L^2} = \frac{e\int_0^\infty r^2 \rho_{L(r)}\, 4\pi r^2\, dr}{e\int_0^\infty \rho_{L(r)}\, 4\pi r^2\, dr} = \frac{1}{Z}\int_0^\infty r^2 \rho_{L(r)}\, 4\pi r^2\, dr. \qquad (34.2)$$

Für die homogen geladene Kugel mit $\rho_{L(r)} = \frac{Z}{A}\rho_0 = \text{const}$ im Intervall $0 \leqq r \leqq R$, $\rho_L = 0$ für $r > R$ ergibt sich

$$\overline{r_L^2} = \frac{1}{A}\int_0^R \rho_0\, 4\pi r^4\, dr = \frac{4\pi\rho_0}{A}\,\frac{R^5}{5} = \frac{3}{5} R^2. \qquad (34.3)$$

Im allgemeinen Fall ist der mittlere quadratische Radius der Ladungsverteilung der Erwartungswert des Operators

$$\frac{1}{Z}\sum_{p=1}^{Z} R_p^2,$$

wobei $\vec{R}_p$ der Ortsvektor des p-ten Protons im Kernschwerpunktssystem * ist. Bezeichnet man mit $\vec{r}_p$ den Ortsvektor des p-ten Protons in einem beliebiegen System, mit $\vec{r}_n$ den Ortsvektor des n-ten Neutrons im gleichen System, dann liegt der Schwerpunkt des Kerns bei

$$\vec{R}_S=\frac{1}{A}\left(\sum_{p=1}^{Z}\vec{r}_p+\sum_{n=1}^{N}\vec{r}_n\right); \qquad Z+N=A, \tag{34.4}$$

und es gilt

$$\vec{R}_p=\vec{r}_p-\vec{R}. \tag{34.5}$$

Der mittlere quadratische Radius ist dann

$$\overline{R_L^2}=\frac{1}{Z}\int \Psi^*\left(\sum_{p=1}^{Z} R_p^2\right)\Psi\, d\tau_1\, d\tau_2 \ldots d\tau_A; \tag{34.6}$$

die Wellenfunktion Ψ des Gesamtsystems der A Nukleonen setzt sich gemäß (24.2) aus Produkten der Wellenfunktionen ψ_i $(i=1 \ldots A)$ der Einzelteilchen zusammen.

Unter Benutzung von (34.4) und (34.5) erhält man

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{Z} R_p^2 &= \sum_{p=1}^{Z}\left(r_p^2-2\vec{r}_p\vec{R}_S+R_S^2\right)\\ &=\sum_{p=1}^{Z}\left[\left(1-\frac{2}{A}\right)r_p^2-\frac{2}{A}\vec{r}_p\sum_{\substack{p'=1\\p'\neq p}}^{Z}\vec{r}_{p'}-\frac{2}{A}\vec{r}_p\sum_{n=1}^{N}\vec{r}_n+R_S^2\right]\\ &=\left(1-\frac{2}{A}\right)\sum_{p=1}^{Z} r_p^2-\frac{2}{A}\sum_{\substack{p,p'=1\\p'\neq p}}^{Z}\vec{r}_p\vec{r}_{p'}-\frac{2}{A}\sum_{p=1}^{Z}\sum_{n=1}^{N}\vec{r}_p\vec{r}_n+Z R_S^2\end{aligned}$$

mit

$$R_S^2=\frac{1}{A^2}\left(\sum_{p=1}^{Z} r_p^2+\sum_{\substack{p,p'=1\\p'\neq p}}^{Z}\vec{r}_p\vec{r}_{p'}+2\sum_{p=1}^{Z}\sum_{n=1}^{N}\vec{r}_p\vec{r}_n+\sum_{n=1}^{N} r_n^2+\sum_{\substack{n,n'=1\\n'\neq n}}^{N}\vec{r}_n\vec{r}_{n'}\right).$$

* Genau genommen im Relativsystem der Messung. Als Ursprung wählt man im allgemeinen den Schwerpunkt des Kerns.

Also

$$\frac{1}{Z}\sum_{p=1}^{Z} R_p^2 = \left(1-\frac{2}{A}+\frac{Z}{A^2}\right)\frac{1}{Z}\sum_{p=1}^{Z} r_p^2 + \frac{1}{A^2}\sum_{n=1}^{N} r_n^2 + \frac{Z-2A}{ZA^2}\sum_{\substack{p,p'=1\\p'\neq p}}^{Z} \vec{r}_p\,\vec{r}_{p'} + \\ + \frac{1}{A^2}\sum_{\substack{n,n'=1\\n'\neq n}}^{N} \vec{r}_n\,\vec{r}_{n'} + \frac{2(Z-A)}{ZA^2}\sum_{p=1}^{Z}\sum_{n=1}^{N} \vec{r}_p\,\vec{r}_n .$$

Daher wird mit

$$\overline{r_L^2} = \frac{1}{Z}\int \Psi^*\left(\sum_{p=1}^{Z} r_p^2\right)\Psi\, d\tau_1\, d\tau_2 \ldots d\tau_A$$

und

$$\overline{r_N^2} = \frac{1}{N}\int \Psi^*\left(\sum_{n=1}^{N} r_n^2\right)\Psi\, d\tau_1\, d\tau_2 \ldots d\tau_A$$

$\overline{R_L^2}$ nach (34.6) zu

$$\left.\begin{aligned} \overline{R_L^2} = \frac{A^2-2A+Z}{A^2}\overline{r_L^2} + \frac{N}{A^2}\overline{r_N^2} + \frac{Z-2A}{ZA^2}\int \Psi^*\left(\sum_{\substack{p,p'=1\\p'\neq p}}^{Z} \vec{r}_p\,\vec{r}_{p'}\right)\Psi\, d\tau_1 \ldots d\tau_A + \\ + \frac{1}{A^2}\int \Psi^*\left(\sum_{\substack{n,n'=1\\n'\neq n}}^{N} \vec{r}_n\,\vec{r}_{n'}\right)\Psi\, d\tau_1 \ldots d\tau_A + \\ + \frac{2(Z-A)}{ZA^2}\int \Psi^*\left(\sum_{p=1}^{Z}\sum_{n=1}^{N} \vec{r}_p\,\vec{r}_n\right)\Psi\, d\tau_1 \ldots d\tau_A . \end{aligned}\right\} \quad (34.7)$$

Der Unterschied zwischen (34.2) und (34.7) besteht darin, daß die in (34.7) auftretenden Integrale mit solchen Wellenfunktionen berechnet werden können, die aus der SCHRÖDINGER-Gleichung mit einem auf einen beliebigen Koordinatenursprung bezogenen Kernpotential gewonnen wurden. Wird ein ortsfestes, mittleres Potential [z.B. das Parabelpotential (32.2)] für die Kernteilchen angesetzt, dann führt der Kernschwerpunkt relativ zum Koordinatenursprung Nullpunktschwingungen aus. Daher ist der im Kernschwerpunktssystem gemessene Kernradius kleiner als der im ortsfesten System berechnete.

Für leichte Kerne kann man (24.4) als Näherung für die Wellenfunktionen Ψ des Systems annehmen und die Schalenmodellfunktionen (32.4), (32.5) und (32.6) für die Funktionen ψ_i einsetzen (COULOMB-Effekte zwischen den Protonen sind dabei vernachlässigt). Dann ergibt sich aus (34.7) ein theoretischer Ausdruck für $\overline{R_L^2}$, der mit experimentellen Werten verglichen werden kann. Wir wollen dies am Beispiel der kugelsymmetrischen Kerne He^4, C^{12} und O^{16} vorführen. Da diese Kerne die gleiche Anzahl von Protonen und Neutronen haben und deren Verteilungen dieselben sind, ist

$$\overline{r_L^2} = \overline{r_N^2}$$

sowie

$$\int \Psi^* \left(\sum_{\substack{p,p'=1 \\ p' \neq p}}^{Z} \vec{r}_p \vec{r}_{p'} \right) \Psi \, d\tau_1 \dots d\tau_A = \int \Psi^* \left(\sum_{\substack{n,n'=1 \\ n' \neq n}}^{N} \vec{r}_n \vec{r}_{n'} \right) \Psi \, d\tau_1 \dots d\tau_A ,$$

also vereinfacht sich (34.7) zu

$$\left.\begin{aligned} \overline{R_L^2} = \frac{A-1}{A} \overline{r_L^2} - \frac{2(A-Z)}{ZA^2} \Bigg[& \int \Psi^* \left(\sum_{\substack{p,p'=1 \\ p' \neq p}}^{Z} \vec{r}_p \vec{r}_{p'} \right) \Psi \, d\tau_1 \dots d\tau_A + \\ & + \int \Psi^* \left(\sum_{p=1}^{Z} \sum_{n=1}^{N} \vec{r}_p \vec{r}_n \right) \Psi \, d\tau_1 \dots d\tau_A \Bigg] . \end{aligned}\right\} \quad (34.8)$$

Die Terme in der eckigen Klammer beschreiben die Tatsache, daß sich gewisse Nukleonenpaare im Mittel nicht symmetrisch zum Kernschwerpunkt bewegen. Zur Berechnung der Größe $\overline{r_L^2}$ benutzen wir (32.8) und (32.4). Wenn man bedenkt, daß die Protonendichte Z/A-mal so groß ist wie die Nukleonendichte, bekommt man für die Verteilung der Protonen aus (32.9), (32.10) und (32.11)

$$\rho_{\text{Schalenmodell}} = 4 \frac{Z}{A} \left(\frac{1}{\pi a^2} \right)^{\frac{3}{2}} \left(1 + \alpha \frac{r^2}{a^2} \right) \exp\left(-\frac{r^2}{a^2} \right)$$

mit $\alpha = 0$ für He^4, $\alpha = \frac{4}{3}$ für C^{12} und $\alpha = 2$ für O^{16}. Der mittlere quadratische Radius der Ladungsverteilung berechnet sich damit zu

$$\begin{aligned} (\overline{r_L^2})_{\text{Schalenmodell}} &= 4 \frac{4\pi}{A} \left(\frac{1}{\pi a^2} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty \left(r^4 + \alpha \frac{r^6}{a^2} \right) \exp\left(-\frac{r^2}{a^2} \right) dr \\ &= 4 \frac{4\pi}{A} \left(\frac{1}{\pi a^2} \right)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{3}{8} \sqrt{\pi a^{10}} + \frac{\alpha}{a^2} \frac{15}{16} \sqrt{\pi a^{14}} \right] \\ &= \frac{3}{A} (2 + 5\alpha) \, a^2 . \end{aligned}$$

α hängt mit Z zusammen; für die drei kugelsymmetrischen Kerne kann man schreiben

$$\alpha = \frac{Z-2}{3} .$$

Damit wird schließlich für diese Kerne

$$(\overline{r_L^2})_{\text{Schalenmodell}} = \frac{5Z-4}{A} a^2 . \quad (34.9)$$

Als nächstes wenden wir uns der Berechnung des Integrals

$$I = \int \Psi^* \left(\sum_{\substack{p,p'=1 \\ p' \neq p}}^{Z} \vec{r}_p \vec{r}_{p'} \right) \Psi \, d\tau_1 \dots d\tau_A \quad (34.10)$$

zu. Die Determinante (24.4) für die Wellenfunktion Ψ gestattet die Darstellung

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{A!}} \sum_k (-1)^k \psi_{1(\vec{r}_{k_1})} \psi_{2(\vec{r}_{k_2})} \cdots \psi_{A(\vec{r}_{k_A})}. \tag{34.11}$$

Die Summation läuft dabei über alle $A!$ möglichen Permutationen der Koordinaten $\vec{r}_1 \ldots \vec{r}_A$. Das Vorzeichen wird durch die Anzahl der Inversionen (d.h. der Vertauschung je zweier Indizes) bezüglich der ausgezeichneten Permutation $1 \ldots A$ bestimmt. Die $\psi_{i(\vec{r}_i)}$ bilden ein orthonormales Funktionensystem; die Koordinaten $\vec{r}_i$ und das Volumelement enthalten Orts- und Spinvariable.

Zunächst setzt man das Konjugiert-Komplexe von (34.11) für Ψ^* in (34.10) ein. Aus der Permutationssumme erhält man $A!$ Summanden. Jeder hat die Form

$$(-1)^k \frac{1}{\sqrt{A!}} \int \psi^*_{1(\vec{r}_{k1})} \cdots \psi^*_{A(\vec{r}_{k_A})} \left(\sum_{\substack{p,\, p'=1 \\ p \neq p'}}^{Z} \vec{r}_p \vec{r}_{p'} \right) \Psi \, d\tau_1 \ldots d\tau_A .$$

Wenn man die Koordinaten $\vec{r}_{k_i}$ und $\vec{r}_{k_j}$ vertauscht, ändert sich der Operator nicht, aber Ψ ändert wegen der Antisymmetrie gegen Koordinatenvertauschung das Vorzeichen. Man vertauscht jetzt so oft, bis die ursprüngliche Koordinatenreihenfolge $\vec{r}_1 \ldots \vec{r}_A$ wieder hergestellt ist. Dies liefert einen Faktor $(-1)^k$, der den Vorfaktor $(-1)^k$ kompensiert. Alle $A!$ Summanden sind daher gleich und man erhält

$$I = \sqrt{A!} \int \psi^*_{1(\vec{r}_1)} \cdots \psi^*_{A(\vec{r}_A)} \left(\sum_{\substack{p,\, p'=1 \\ p' \neq p}}^{Z} \vec{r}_p \vec{r}_{p'} \right) \Psi \, d\tau_1 \ldots d\tau_A .$$

Jetzt wird (34.11) für Ψ eingesetzt. Dabei kürzt sich zunächst der Faktor $\sqrt{A!}$ heraus. Jeder der Summanden von Ψ enthält eine ψ-Funktion, die von $\vec{r}_p$ abhängt, und eine, die von $\vec{r}_{p'}$ abhängt. Man kann das Integral daher wie folgt zerlegen:

$$\begin{aligned}
I = & \sum_{\substack{p,\, p'=1 \\ p<p'}}^{Z} \sum_k (-1)^k \int \psi^*_{1(\vec{r}_1)} \cdots \psi^*_{p-1(\overrightarrow{r_{p-1}})} \psi^*_{p+1(\overrightarrow{r_{p+1}})} \cdots \\
& \cdots \psi^*_{p'-1(\overrightarrow{r_{p'-1}})} \psi^*_{p'+1(\overrightarrow{r_{p'+1}})} \cdots \psi^*_{A(\vec{r}_A)} \psi_{1(\overrightarrow{r_{k1}})} \cdots \\
& \cdots \psi_{p-1(\overrightarrow{r_{k_{p-1}}})} \psi_{p+1(\overrightarrow{r_{k_{p+1}}})} \cdots \psi_{p'-1(\overrightarrow{r_{k_{p'-1}}})} \psi_{p'+1(\overrightarrow{r_{k_{p'+1}}})} \cdots \\
& \cdots \psi_{A(\vec{r}_{k_A})} d\tau_1 \ldots d\tau_{p-1} d\tau_{p+1} \ldots d\tau_{p'-1} d\tau_{p'+1} \ldots d\tau_A \times \\
& \times \int \psi^*_{p(\vec{r}_p)} \psi^*_{p'(\vec{r}_{p'})} \vec{r}_p \vec{r}_{p'} \psi_{i(\vec{r}_p)} \psi_{j(\vec{r}_{p'})} d\tau_p \, d\tau_{p'} + \\
& + \sum_{\substack{p,\, p'=1 \\ p>p'}}^{Z} \sum_k (-1)^k \int \psi^*_{1(r_1)} \cdots \psi^*_{p'-1(\overrightarrow{r_{p'-1}})} \psi^*_{p'+1(\overrightarrow{r_{p'+1}})} \cdots \\
& \cdots \psi^*_{p-1(\overrightarrow{r_{p-1}})} \psi^*_{p+1(\overrightarrow{r_{p+1}})} \cdots \psi^*_{A(\vec{r}_A)} \psi_{1(\overrightarrow{r_{k1}})} \cdots \\
& \cdots \psi_{p'-1(\overrightarrow{r_{k_{p'-1}}})} \psi_{p'+1(\overrightarrow{r_{k_{p'+1}}})} \cdots \psi_{p-1(\overrightarrow{r_{k_{p-1}}})} \psi_{p+1(\overrightarrow{r_{k_{p+1}}})} \cdots \\
& \cdots \psi_{A(\overrightarrow{r_{k_A}})} d\tau_1 \ldots d\tau_{p'-1} d\tau_{p'+1} \ldots d\tau_{p-1} d\tau_{p+1} \ldots d\tau_A \times \\
& \times \int \psi^*_{p'(\vec{r}_{p'})} \psi^*_{p(\vec{r}_p)} \vec{r}_p \vec{r}_{p'} \psi_{i(\vec{r}_{p'})} \psi_{j(\vec{r}_p)} d\tau_p \, d\tau_{p'} .
\end{aligned}$$

Das erste Teilintegral in beiden Termen ist wegen der Orthonormalität der $\psi_{m(\vec{r}_j)}$ nur dann von Null verschieden und zwar gleich Eins, wenn die Permutation $(k_1, \ldots k_m, \ldots k_A)$ bei $m \neq p, p'$ identisch mit der Permutation $(1, \ldots, p-1, p+1, \ldots, p'-1, p'+1, \ldots A)$ bzw. $(1, \ldots, p'-1, p'+1, \ldots, p-1, p+1, \ldots A)$ ist. Daher ist entweder $i=p, j=p'$ oder $i=p', j=p$. Somit ergibt sich

$$I = \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{Z} \int \psi^*_{i(\vec{r}_i)} \psi^*_{j(\vec{r}_j)} \vec{r}_i \vec{r}_j (\psi_{i(\vec{r}_i)} \psi_{j(\vec{r}_j)} - \psi_{i(\vec{r}_j)} \psi_{j(\vec{r}_i)}) \, d\tau_i \, d\tau_j +$$
$$+ \sum_{\substack{i,j=1\\ i>j}}^{Z} \int \psi^*_{j(\vec{r}_j)} \psi^*_{i(\vec{r}_i)} \vec{r}_i \vec{r}_j (\psi_{j(\vec{r}_j)} \psi_{i(\vec{r}_i)} - \psi_{j(\vec{r}_i)} \psi_{i(\vec{r}_j)}) \, d\tau_j \, d\tau_i .$$

Der zweite Teil des Ausdrucks kann durch die Vertauschung der Indizes i und j in den ersten überführt werden. Also ist

$$\left. \begin{aligned} I = 2 \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{Z} \int \psi^*_{i(\vec{r}_i)} \psi^*_{j(\vec{r}_j)} \vec{r}_i \vec{r}_j \psi_{i(\vec{r}_i)} \psi_{j(\vec{r}_j)} \, d\tau_i \, d\tau_j - \\ -2 \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{Z} \int \psi^*_{i(\vec{r}_i)} \psi^*_{j(\vec{r}_j)} \vec{r}_i \vec{r}_j \psi_{i(\vec{r}_j)} \psi_{j(\vec{r}_i)} \, d\tau_i \, d\tau_j = I_1 - I_2 . \end{aligned} \right\} \quad (34.12)$$

Die Einteilchenwellenfunktionen ψ_i können nach (32.4), (32.5) und (32.6) als Produkte von Radial-, Winkel- und Spinanteil geschrieben werden. Es ist daher naheliegend, auch den Operator in Radial- und Winkelanteil aufzuspalten. Mit

$$\vec{r}_i \vec{r}_j = r_i r_j \cos\theta = r_i r_j P_{1(\cos\theta)}$$

und dem Additionstheorem für Kugelfunktionen (30.3) wird

$$\vec{r}_i \vec{r}_j = \frac{4\pi}{3} r_i r_j \sum_{M=-1}^{+1} Y^*_{1,M(\theta_i,\Phi_i)} Y_{1,M(\theta_j,\Phi_j)} .$$

Wir betrachten zunächst den Winkelanteil. Jeder Summand von I_1 enthält einen Ausdruck der Form

$$\sum_{M=-1}^{+1} \int Y^*_{l_i,m_i} Y^*_{1,M} Y_{l_i,m_i} \, d\Omega_i \int Y^*_{l_j,m_j} Y_{1,M} Y_{l_j,m_j} \, d\Omega_j .$$

Es gilt allgemein*

$$\int Y^*_{l_3,m_3} Y_{l_2,m_2} Y_{l_1,m_1} \, d\Omega = \sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi(2l_3+1)}} \, C_{l_1,l_2,l_3;m_1,m_3} \cdot C_{l_1,l_2,l_3;0,0} . \quad (34.13)$$

Für die CLEBSCH-GORDAN-Koeffizienten ergibt sich nach (26.5):

$$\left. \begin{aligned} &\text{a) } C_{0,1,0;0,0} = 0 \quad &&\text{c) } C_{1,1,0;0,0} = -\sqrt{\tfrac{1}{3}} \quad &&\text{e) } C_{0,1,1;0,1} = 1 \\ &\text{b) } C_{1,1,1;0,0} = 0 \quad &&\text{d) } C_{0,1,1;0,0} = 1 \quad &&\text{f) } C_{0,1,1;0,-1} = 1. \end{aligned} \right\} \quad (34.14)$$

---

* Beweis s. M. E. ROSE, Elementary Theory of Angular Momentum, John Wiley, 1957. Im vorliegenden Fall könnte man die Integrale auch mit Hilfe der Darstellungen (21.10) elementar berechnen.

Aus (34.14a) und (34.14b) sieht man sofort, daß $I_1=0$ ist; denn für l_i und l_j kommen nach (32.4), (32.5) und (32.6) nur die Werte 1 oder 0 in Frage.

In I_2 sind die Winkelanteile Ausdrücke der Form

$$\left.\begin{aligned}\sum_{M=-1}^{+1}\int Y^*_{l_i,m_i} Y^*_{1,M} Y_{l_j,m_j}\, d\Omega_i \int Y^*_{l_j,m_j} Y_{1,M} Y_{l_i,m_i}\, d\Omega_j &= \\ = \frac{3}{4\pi}\frac{2l_i+1}{2l_j+1} C^2_{l_i,1,l_j;0,0} \sum_{M=-1}^{+1} C^2_{l_i,1,l_j;m_i,m_j}, &\end{aligned}\right\}\qquad(34.15)$$

dabei muß in der letzten Summe $m_j=m_i+M$ sein, sonst verschwinden die Koeffizienten.

Wenn $l_i=l_j$ ist, wird wegen (34.14a) bzw. (34.14b) der Koeffizient $C_{l_i,1,l_j;0,0}$ gleich Null. Also ist z.B. $I_2=0$ für den Kern He^4.

Tabelle 34.1. *Werte der Funktion F in Gleichung* (34.16) *für* C^{12} *und* O^{16}

ψ_i \ ψ_j	$\psi_{p\frac{3}{2}}$ $m=+\frac{3}{2}$	$\psi_{p\frac{3}{2}}$ $m=+\frac{1}{2}$	$\psi_{p\frac{3}{2}}$ $m=-\frac{1}{2}$	$\psi_{p\frac{3}{2}}$ $m=-\frac{3}{2}$	$\psi_{p\frac{1}{2}}$ $m=+\frac{1}{2}$	$\psi_{p\frac{1}{2}}$ $m=-\frac{1}{2}$
$\psi_{s\frac{1}{2}}$ $m_s=+\frac{1}{2}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\psi_{s\frac{1}{2}}$ $m_s=-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

C^{12} (first four columns)

O^{16} (all six columns)

Nur für $l_i \neq l_j$ ergeben sich nicht verschwindende Beiträge (physikalisch: Der Dipoloperator $r\cos\theta$ verknüpft s- und p-Zustände). Wegen der Bedingung $i<j$ in (34.12) kommt nur $l_i=m_i=0$; $l_j=1$, $m_j=\pm 1, 0$ in Frage. Die rechte Seite von (34.15) ist dann für jedes m_j gleich $1/4\pi$.

Nun kann man I_2 im einzelnen aus (32.4), (32.5) und (32.6) berechnen. Da für die Funktionen ψ_i nur die $s_{\frac{1}{2}}$-Funktionen (32.4), für ψ_j nur die p-Funktionen (32.5) und (32.6) eingesetzt zu werden brauchen, kann man den Radialteil vor die Klammer ziehen:

$$\left.\begin{aligned} I_2 &= \frac{8\pi}{3}\left[2\left(\frac{1}{\pi a^6}\right)^{\frac{1}{4}} 2\left(\frac{4}{9\pi a^{10}}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^2 \left[\int_0^\infty r^4 \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) dr\right]^2 \times \\ &\quad \times \frac{1}{4\pi}\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{Z} F_{(\theta_i,\Phi_i;\theta_j,\Phi_j;s_i,s_j)} \\ &= a^2 \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{Z} F. \end{aligned}\right\}\qquad(34.16)$$

Die Werte der Funktion F lassen sich unter Berücksichtigung der Orthonormalität der Spineigenfunktionen berechnen und sind in Tabelle 34.1 zusammengestellt.

Durch Aufsummierung ergibt sich

$$\left.\begin{array}{lll} I=0 & \text{für} & \mathrm{He}^4, \\ I=-I_2=-4a^2 & \text{für} & \mathrm{C}^{12}, \\ I=-I_2=-6a^2 & \text{für} & \mathrm{O}^{16}. \end{array}\right\} \qquad (34.17)$$

Schließlich ist aus (34.8) noch das Integral

$$K=\int \Psi^* \left(\sum_{p=1}^{Z} \sum_{n=1}^{N} \vec{r}_p \vec{r}_n \right) \Psi \, d\tau_1 \dots d\tau_A$$

zu lösen. Es kann auch dargestellt werden als

$$K=\int \Psi^* \left(\sum_{i=1}^{Z} \sum_{j=Z+1}^{A} \vec{r}_i \vec{r}_j \right) \Psi \, d\tau_1 \dots d\tau_A$$

und ist für die Kerne He^4, C^{12} und O^{16} identisch mit dem Integral I.

Damit erhält man für $\overline{R_L^2}$ aus (34.8) und (34.9)

$$\overline{R_L^2}=\frac{A-1}{A}\,\frac{5Z-4}{A}\,a^2-4I\,\frac{A-Z}{ZA^2}.$$

Im einzelnen:

$$\overline{R_L^2}=\left\{\begin{array}{lll} \frac{9}{8}\,a^2 & \text{für} & \mathrm{He}^4 \\ \frac{151}{72}\,a^2 & \text{für} & \mathrm{C}^{12} \\ \frac{141}{64}\,a^2 & \text{für} & \mathrm{O}^{16}. \end{array}\right.$$

$\sqrt{\overline{R_L^2}}$ ist noch nicht die Meßgröße, da das Proton selbst eine endliche Ausdehnung hat. Wir haben ja bisher nur die Verteilung der Ladungsschwerpunkte der Protonen betrachtet. Der der Messung zugängliche Radius wird größer sein als $\sqrt{\overline{R_L^2}}$. In erster Näherung kann man für leichte Kerne die mittleren Radien $\sqrt{\overline{R_L^2}}$ und a_p (=mittlerer Protonenradius) quadratisch addieren, dann wird also

$$(\overline{r_L^2})_{\mathrm{exp}}=\overline{R_L^2}+a_p^2.$$

Für schwere Kerne ist die Korrektur komplizierter.

Aus Messungen* des Wirkungsquerschnittes für elastische Elektronenstreuung (s. unten) wurde der mittlere Protonenradius** zu

$$a_p \approx 0{,}8 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{cm}$$

* Experimentelle Werte aus: R. Hofstadter, Nuclear and Nucleon Scattering of High Energy Electrons, Ann. Rev. Nucl. Sci. **7**, 231, (1957) und U. Meyer-Berkhout, Ann. Phys. **8**, 119 (1959).

** Das Problem der „Ausdehnung" des Protons ist in Wirklichkeit sehr kompliziert.

bestimmt, der mittlere Radius des He^4-Kerns zu

$$(\sqrt{\overline{r_L^2}})_{\exp} = 1{,}61 \cdot 10^{-13}\,\text{cm}.$$

Damit ergibt sich für den Parameter $a=(\hbar/M\omega)^{\frac{1}{2}}$ des Schalenmodells der Wert

$$a_{He^4} = 1{,}32 \cdot 10^{-13}\,\text{cm}.$$

Für C^{12} und O^{16} liefern die Messungen die Werte

$$a_{C^{12}} = 1{,}64 \cdot 10^{-13}\,\text{cm} \quad (\text{aus } (\sqrt{\overline{r_L^2}})_{\exp} = (2{,}50 \pm 0{,}15) \cdot 10^{-13}\,\text{cm})$$
$$a_{O^{16}} = 1{,}69 \cdot 10^{-13}\,\text{cm} \quad (\text{aus } (\sqrt{\overline{r_L^2}})_{\exp} = (2{,}65 \pm 0{,}05) \cdot 10^{-13}\,\text{cm}).$$

Die Zahlenwerte für a deuten an, daß das Parabelpotential nicht für alle drei betrachteten Kerne exakt dasselbe ist, was nach den Ausführungen des §33 nicht verwundert.

3. Der „Äquivalentradius" $R_{\text{Äq}}$ ist in Anlehnung an (34.3) definiert durch

$$R_{\text{Äq}}^2 = \tfrac{5}{3}\,\overline{R_L^2}.$$

Für die homogen geladene Kugel ist $R_{\text{Äq}} = R$.

4. Als weitere Größe zur Charakterisierung der Ladungsverteilung kann man denjenigen Abstand vom Kernmittelpunkt wählen, bei dem die Ladungsdichte auf die Hälfte ihres Wertes im Zentrum abgefallen ist. Diese Größe ist in Fig. 34.1 mit C bezeichnet.

Die Schalenmodell-Ladungsverteilung

$$\rho_{\text{Schalenmodell}} = 4\,\frac{Z}{A}\left(\frac{1}{\pi a^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(1+\alpha\frac{r^2}{a^2}\right)\exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right)$$

enthält nur einen freien Parameter, nämlich a. Der Zusammenhang mit C folgt aus

$$\frac{1}{2} = \left(1+\alpha\frac{C^2}{a^2}\right)\exp\left(-\frac{C^2}{a^2}\right).$$

Als mögliche zweiparametrige Verteilungsfunktionen sind vorgeschlagen worden (nur die wichtigsten werden hier aufgeführt):

$$\rho_{L(r)} = \frac{Z}{A}\,\rho_0\,\frac{1}{1+e^{\frac{r-C}{\gamma}}} \quad (\text{„Fermi-Verteilung"}) \qquad (34.18)$$

(dabei ist $t=2\gamma\ln 9 \approx 4{,}40\,\gamma$ die „Hautdicke", d.h. die Dicke der Oberflächenschicht des Kerns, in der die Ladungsdichte von 90% auf 10% ihres

Wertes bei $r=0$ sinkt) und

$$\rho_{L(r)}=\frac{Z}{A}\rho_0\begin{cases}1-\frac{1}{2}\exp\left[-n\left(1-\frac{r}{C}\right)\right] & \text{für} \quad r\leqq C\\ \frac{1}{2}\exp\left[+n\left(1-\frac{r}{C}\right)\right] & \text{für} \quad r\geqq C\end{cases} \tag{34.19}$$

(„Family-II-Verteilung“).

Während sich die Schalenmodellverteilung für die kugelsymmetrischen leichten Kerne gut bewährt hat, sind die zweiparametrigen Formen (34.18) und (34.19) als Näherungsfunktionen für schwere Kerne besser geeignet. Die einfache Vorstellung der homogen geladenen Kugel mit scharfem Rand ist sicher ein zu grobes Bild.

Experimentelle Aussagen über die Form der Ladungsverteilungsfunktion sind nur mit großem Aufwand zu gewinnen. Als Sonde für die Abtastung der Ladungsverteilung im Kerninnern eignen sich am besten geladene Leptonen (Elektronen oder Müonen), die mit den Kernkräften nicht in Wechselwirkung treten. So stammen die genauesten Aussagen aus der *elastischen Streuung* energiereicher *Elektronen* an Atomkernen * und aus der Messung der Energiezustände in *Müonenatomen* (das sind Atome, in denen eins der Elektronen der Hülle durch ein negativ geladenes Müon ersetzt ist). Eine Information über den Unterschied der Kernradien verschiedener Isotope desselben Elements erhält man darüberhinaus aus der „*Isotopieverschiebung*“ der bei Übergängen in der Elektronenhülle emittierten Spektrallinien. Die diesen Methoden zugrunde liegenden theoretischen Überlegungen werden im folgenden skizziert.

b) Elastische Elektronenstreuung

Zur quantenmechanischen Behandlung des Streuproblems vernachlässigen wir zunächst die Spins von Elektron und Kern sowie relativistische Effekte. Dann kann die SCHRÖDINGER-Gleichung zur Lösung herangezogen werden. Die Korrekturen für Spin und relativistische Einflüsse werden später angegeben.

Sei H_1 die als Störoperator aufgefaßte COULOMB-Energie

$$H_1=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{Z}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{R}_k|}\exp\left(-\frac{|\vec{r}-\vec{R}_k|}{a}\right)$$

* Die Wellenlänge der Elektronen darf höchstens von der Größenordnung der Kernabmessungen sein, daraus folgt eine Mindestenergie von

$$E_{\min}\approx c\,p=\frac{\hbar c}{\lambda}\approx\frac{2\cdot 10^{-5}\,\text{eV cm}}{10^{-12}\,\text{cm}}=20\,\text{MeV}.$$

Gute Auflösung der Einzelheiten erzielt man erst ab $E\gtrsim 200$ MeV.

($\vec{r}$ = Ortsvektor des Elektrons, $\vec{R}_k$ = Ortsvektor des k-ten Protons). Der Faktor $\exp\left(-\frac{|\vec{r}-\vec{R}_k|}{a}\right)$ ist hier formal eingeführt, um Konvergenzschwierigkeiten zu vermeiden; physikalisch beschreibt er pauschal die Abschirmung des Kerns durch seine Elektronenhülle. Die Größe a ist sicher viel größer als der Kernradius.

Aus der 2. Goldenen Regel (zeitabhängiges Störpotential, s. Anhang) ergibt sich die Übergangswahrscheinlichkeit w pro sec, daß ein Elektron unter der Einwirkung der Störung H_1 von einem Bewegungszustand des Impulses $\vec{p}_0$ und der Energie E_0 in den Bewegungszustand $\vec{p}$, E abgelenkt wird, zu

$$w = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\int \Psi^*_{\text{End}} H_1 \Psi_{\text{Anf}}\, d\tau\right|^2 \rho_{(E_{\text{End}})}.$$

Dabei ist Ψ die Gesamtwellenfunktion des aus Kern und Elektron bestehenden Systems im Anfangs- bzw. Endzustand (Index Anf bzw. End). Ein- und auslaufendes Elektron werden näherungsweise durch ebene Wellen* beschrieben, die Nukleonenkoordinaten seien $\vec{R}_k$ ($k = 1 \ldots A$). Also

$$\Psi_{\text{Anf}} = C\, e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_0 \vec{r})}\, \Phi_{\text{Anf}}(\vec{R}_1, \ldots, \vec{R}_A)$$

$$\Psi_{\text{End}} = C\, e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \vec{r})}\, \Phi_{\text{End}}(\vec{R}_1, \ldots, \vec{R}_A).$$

Die Normierung der Elektronenwellen wird in einem Kasten der Größe L^3 vorgenommen; dann ist $C = L^{-\frac{3}{2}}$.

Damit ergibt sich das Matrixelement des Störoperators zu

$$\left.\begin{aligned} &\int \Psi^*_{\text{End}} H_1 \Psi_{\text{Anf}}\, d\tau_e\, d\tau_K \\ &= \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 L^3}\iint \Phi^*_{\text{End}}\, e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\vec{r})} \sum_{k=1}^{Z} \frac{e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{R}_k|}{a}}}{|\vec{r}-\vec{R}_k|} \cdot \Phi_{\text{Anf}}\, e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_0\vec{r})}\, d\tau_e\, d\tau_K. \end{aligned}\right\} \quad (34.20)$$

Wir lösen zunächst das Integral über die Elektronenkoordinaten. Jeder Term der Summe hat die Form

$$\chi_{(\vec{R}_k)} = \int \frac{e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{R}_k|}{a}}}{|\vec{r}-\vec{R}_k|}\, e^{\frac{i}{\hbar}[(\vec{p}_0-\vec{p})\vec{r}]}\, d\tau_e. \quad (34.21)$$

* BORNsche Näherung, gültig für $Z/137\,\beta \ll 1$ mit $\beta = v/c$. Der Ansatz der ebenen Wellen bei Anwendung der 2. Goldenen Regel beschränkt die Gültigkeit der Ableitung auf leichte Kerne. Siehe auch A. MESSIAH, Quantum Mechanics, North Holland Publ. Co., Amsterdam, 1961, Kap. X, § 19.

Man geht zweckmäßig zu Kugelkoordinaten mit der Achse

$$\vec{s} = \frac{1}{\hbar}(\vec{p}_0 - \vec{p})$$

über (s. Fig. 34.2):

$$\vec{r} = \vec{R}_k + \vec{r}\,'$$

$$\frac{1}{\hbar}(\vec{p}_0 - \vec{p})\,\vec{r} = \vec{s}\,\vec{r} = s\,r'\cos\theta + (\vec{s}\,\vec{R}_k)$$

$$d\tau_e = r'^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr'.$$

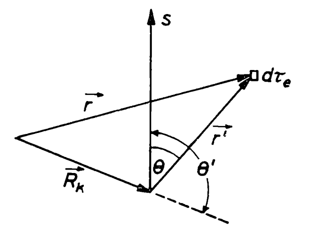


Fig. 34.2. Vektordiagramm zur Lösung der Integrale (34.21) und (34.27)

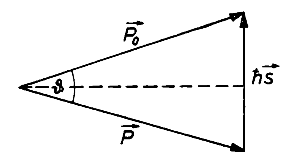


Fig. 34.3. Impulsdiagramm bei der elastischen Elektronenstreuung. $\hbar\vec{s}$ ist der auf den Kern übertragene Rückstoßimpuls

Damit wird aus (34.21)

$$\begin{aligned}\chi_{(\vec{R}_k)} &= \int \frac{e^{-r'/a}}{r'}\, e^{i s r' \cos\theta}\, e^{i(\vec{s}\,\vec{R}_k)}\, r'^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr' \\ &= e^{i(\vec{s}\,\vec{R}_k)}\, 2\pi \int_0^\infty \int_{-1}^{+1} r'\, e^{-r'/a}\, e^{i s x r'}\, dx\, dr' \\ &= e^{i(\vec{s}\,\vec{R}_k)} \frac{4\pi}{s^2 + \frac{1}{a^2}}.\end{aligned}$$

Außer für $\vartheta \approx 0$ (s. Fig. 34.3) kann man bei großen Werten von p und p_0 die Größe $1/a^2$ neben s^2 vernachlässigen. Die herzuleitende Formel gilt also nur für $a^2 s^2 \gg 1$. Es folgt

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 L^3} \frac{4\pi}{s^2} \underbrace{\int \Phi^*_{\text{End}} \sum_{k=1}^{Z} e^{i(\vec{s}\,\vec{R}_k)}\, \Phi_{\text{Anf}}\, d\tau_K}_{\mathcal{N}} \right|^2 \rho_{(E)}. \qquad (34.22)$$

Wenn das Elektron beim Stoß nicht viel Energie verliert, was nach §10 bis zu Elektronenenergien von etwa 100 MeV erfüllt ist, kann man der Fig. 34.3 den Zusammenhang

$$s = \frac{2}{\hbar}\sqrt{p\,p_0}\,\sin\frac{\vartheta}{2} \qquad (34.23)$$

entnehmen [vgl. (10.7)]. Damit wird

$$w=\frac{2\pi^3 e^4 \hbar^3}{(4\pi\varepsilon_0)^2 p^2 p_0^2}\,\frac{1}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}}\,|\mathcal{N}|^2\,\frac{\rho_{(E)}}{L^6}.$$

Die $\sin^4\frac{\vartheta}{2}$-Abhängigkeit entsteht also direkt aus dem COULOMB-Gesetz, wie dies auch in der klassischen RUTHERFORD-Formel (4.3) zum Ausdruck kommt. Für $s\to 0$ geht $\mathcal{N}\to Z$.

Als nächstes wollen wir den statistischen Faktor $\rho_{(E)}=dn/dE$ betrachten. Er ist gleich der Zahl der Zustände im Energieintervall dE, in denen das Gesamtsystem eine Energie zwischen E und $E+dE$ hat und der Streuprozeß in das Raumwinkelelement $d\Omega$ unter dem Winkel ϑ zur Einfallsrichtung führt.

Im Phasenraum (vgl. §13) des Elektrons ist die Zahl der Energiezustände mit Impulsbetrag zwischen p und $p+dp$ und Richtung $d\Omega$ gegeben durch die Anzahl der Zellen (Größe h^3) im Kugelschalenelement des Impulsraumes mit dem Radius p; über die Ortskoordinaten wird integriert (Ergebnis: L^3). Also

$$dn\,d\Omega=p^2\,dp\,d\Omega\,\frac{L^3}{h^3}. \tag{34.24}$$

Da p und E bei konstantem ϑ eindeutig verknüpft sind, ist

$$\rho\,d\Omega=\frac{dn}{dE}\,d\Omega=\frac{dn}{dp}\,\frac{dp}{dE}\,d\Omega=\frac{p^2 L^3}{h^3}\,\frac{1}{dE/dp}\,d\Omega.$$

Die Gesamtenergie des Systems nach dem Stoß ist

$$E=\sqrt{c^2 p^2+m_e^2 c^4}+\sqrt{c^2\hbar^2 s^2+M^2 c^4}.$$

Unter der Annahme $p\gg m_e c$ folgt mit (34.23)

$$\frac{dE}{dp}=c+\frac{c^2\hbar^2}{2\sqrt{c^2\hbar^2 s^2+M^2 c^4}}\,\frac{d(s^2)}{dp}=c+\frac{2c^2 p_0\sin^2\frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{c^2\hbar^2 s^2+M^2 c^4}}$$
$$\approx c\left(1+\frac{2p_0}{Mc}\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right).$$

Damit wird unter Benutzung von (10.6)

$$\rho\,d\Omega=\frac{p^3 L^3}{8\pi^3\hbar^3 c\,p_0}\,d\Omega,$$

so daß

$$w\,d\Omega = \frac{e^4 p}{(4\pi\varepsilon_0)^2\, 4L^3 p_0^2 c}\; \frac{1}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}}\; |\mathcal{N}|^2\, d\Omega .$$

Um von der Übergangswahrscheinlichkeit pro sec zum Wirkungsquerschnitt überzugehen, erinnern wir uns der Definition (4.6). Danach ist

$$d\sigma = \frac{w\,d\Omega}{j},$$

wenn j der Strom der einfallenden Teilchen ist. Da sich ein Teilchen im Volumen L^3 befindet und die Elektronengeschwindigkeit in guter Näherung durch die Lichtgeschwindigkeit c angenähert werden kann, ist $j = c/L^3$ und

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \underbrace{\left(\frac{Z e^2}{4\pi\varepsilon_0\, 2 p_0 c}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}}}_{\text{RUTHERFORD-Formel}}\; \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{2p_0}{Mc}\sin\frac{\vartheta}{2}}}_{\substack{\text{Berücksichtigung}\\ \text{des Rückstoßes}}}\; \underbrace{|F|^2}_{\substack{=|\mathcal{N}|^2/Z^2,\\ \text{Einfluß der}\\ \text{Kern-}\\ \text{ausdehnung}}} . \tag{34.25}$$

Wenn man die relativistische Theorie des Elektrons nach DIRAC zugrunde legt, die auch den Spin des Elektrons mitberücksichtigt, kommt ein Faktor $\cos^2\vartheta$ hinzu („MOTTsche Streuformel").

Die uns besonders interessierenden Kerneigenschaften sind in der Größe $|F|^2 = |\mathcal{N}/Z|^2$ enthalten [s. (34.22)]. Für elastische Streuung kann man für $\Phi_{\text{End}} = \Phi_{\text{Anf}}$ die Wellenfunktion Φ_0 des Kerngrundzustandes heranziehen. Diese kennt man im allgemeinen nicht, man kann aber näherungsweise (24.4) bzw. (34.11) ansetzen. Da die Summanden im Operator jeweils nur von einem der $\vec{R}_k$ ($k = 1 \ldots Z$) abhängen und die $\psi_{i(\vec{R}_i)}$ zueinander orthonormal sind, liefert das Integral (34.22) für $\mathcal{N}$ nur dann nicht verschwindende Beiträge, wenn vor und hinter dem Operator die gleiche Permutation steht. Es bleiben $A!$ Summanden der Form

$$\frac{1}{A!}(-1)^{2k} \int \psi^*_{1(\vec{R}_{k_1})} \cdots \psi^*_{A(\vec{R}_{k_A})} \left[e^{i(\vec{s}\vec{R}_1)} + \cdots + e^{i(\vec{s}\vec{R}_Z)}\right] \times$$
$$\times\, \psi_{1(\vec{R}_{k_1})} \cdots \psi_{A(\vec{R}_{k_A})}\, d\tau_1 \ldots d\tau_A .$$

Über die Neutronenkoordinaten kann man sofort integrieren, ebenso über die $(Z-1)$ Protonenkoordinaten, die nicht im herausgegriffenen Summanden des Operators vorkommen. Für $k_1 = 1$ erhält man $(A-1)!$ mal den Term

$$\frac{1}{A!} \int \psi^*_{1(\vec{R}_1)}\, e^{i(\vec{s}\vec{R}_1)}\, \psi_{1(\vec{R}_1)}\, d\tau_1 .$$

Für $k_2=1$ ergeben sich gleich viele Terme der Größe

$$\frac{1}{A!}\int \psi^*_{2\,(\vec{R}_1)}\, e^{i(\vec{s}\,\vec{R}_1)}\, \psi_{2\,(\vec{R}_1)}\, d\tau_1$$

usw., so daß der erste Summand des Operators die Größe

$$\frac{(A-1)!}{A!}\sum_{i=1}^{A}\int \psi^*_{i\,(\vec{R}_1)}\, e^{i(\vec{s}\,\vec{R}_1)}\, \psi_{i\,(\vec{R}_1)}\, d\tau_1$$

hat. Jeder der übrigen Summanden des Operators liefert den gleichen Beitrag, da die Integrale sich nur durch die Benennung der Integrationsvariablen unterscheiden. Daher ist

$$\mathcal{N}=\frac{Z}{A}\sum_{i=1}^{A}\int \psi^*_{i\,(\vec{R})}\, e^{i(\vec{s}\,\vec{R})}\, \psi_{i\,(\vec{R})}\, d\tau\,. \tag{34.26}$$

Wenn angenommen wird, daß die Nukleonen im Kern völlig gleichberechtigt sind und sich unabhängig voneinander bewegen (extremes Tröpfchenmodell), haben alle ψ_i die gleiche Ortsabhängigkeit. Dann sind alle Summanden in (34.26) gleich, und es resultiert

$$\mathcal{N}=Z\int \psi^*_{(\vec{R})}\, e^{i(\vec{s}\,\vec{R})}\, \psi_{(\vec{R})}\, d\tau\,. \tag{34.27}$$

Dabei ist $A\psi^*\psi$ die Wahrscheinlichkeit dafür, irgendein Nukleon im Volumelement $d\tau$ zu finden, und $\rho_L=Z\psi^*\psi$ die auf Z normierte Protonendichte im Kern.

Wir nehmen zusätzlich an, daß ρ_L kugelsymmetrisch ist, also nur vom Betrag $|\vec{R}|$, nicht aber von den Winkeln, abhängt. Zur Berechnung des Integrals in (34.27) werden Kugelkoordinaten im Kernsystem eingeführt mit s als Achse (s. Fig. 34.2) (der Betrag des Vektors $\vec{R}$ sei jetzt mit r bezeichnet):

$$\vec{s}\,\vec{R}=s\,r\cos\theta',$$

$$d\tau=2\pi r^2\,dr\sin\theta'\,d\theta'=-2\pi r^2\,dr\,d(\cos\theta')\,,$$

damit ist

$$\mathcal{N}=\int\limits_{x=-1}^{+1}\int\limits_{r=0}^{\infty}\rho_{L\,(r)}\, e^{isrx}\, 2\pi r^2\, dr\, dx\,.$$

Integration über x liefert

$$\mathcal{N}=\frac{4\pi}{s}\int\limits_0^{\infty}\rho_{L\,(r)}\sin(s\,r)\, r\, dr\,.$$

$\mathcal{N}$ enthält über ρ_L den Faktor Z, so daß der Einfluß der Kerngröße auf den Streuquerschnitt durch den „Formfaktor“ $F=\mathcal{N}/Z$ beschrieben wird.

Für kleine (sr) kann man F entwickeln. Wegen

$$\sin(s\,r) = s\,r - \tfrac{1}{6}(s\,r)^3 + \tfrac{1}{120}(s\,r)^5 - + \cdots$$

ergibt sich mit der Normierungsbedingung und (34.2)

$$F = \underbrace{\frac{1}{Z}\int_0^\infty \rho_{L(r)}\, 4\pi r^2\, dr}_{=1 \text{ (Normierung)}} - \frac{1}{6} s^2 \frac{1}{Z}\int_0^\infty \rho_{L(r)}\, r^2\, 4\pi r^2\, dr +$$

$$+ \frac{1}{120} s^4 \frac{1}{Z}\int_0^\infty \rho_{L(r)}\, r^4\, 4\pi r^2\, dr - + \cdots,$$

$$F = 1 - \frac{1}{6} s^2 \overline{r_L^2} + \frac{1}{120} s^4 \overline{r_L^4} - + \cdots.$$

Für genügend kleine sr gilt damit angenähert

$$|F|^2 \approx 1 - \tfrac{1}{3} s^2 \overline{r_L^2}.$$

Schon mit kleinen Impulsübertragungen s kann man also aus der Abweichung der experimentellen von der für $F = 1$ (punktförmiger Kern) erwarteten Streuverteilung auf den mittleren quadratischen Radius der Ladungsverteilung schließen. Erhöhung der Impulsübertragung liefert $\overline{r_L^4}$, $\overline{r_L^6}$ usw.

Um aber $\rho_{L(r)}$ vollständig zu bestimmen (ρ_L ist die FOURIER-Transformierte von $\mathcal{N}$), wäre eine Ausmessung von F über alle Werte von s von Null bis unendlich erforderlich. Dies ist experimentell nicht erreichbar, da nur begrenzte Elektronenenergien zur Verfügung stehen. Daher kennt man $\rho_{L(r)}$ noch nicht exakt.

Die obige Rechnung liefert für einen Kern mit scharfem Rand (homogen geladene Kugel) mit $\rho_0 = \dfrac{3A}{4\pi R^3}$ und $\rho_L = \dfrac{Z}{A}\rho_0$ für $0 \leqq r \leqq R$, $\rho_L = 0$ für $r > R$ das Ergebnis

$$F = \frac{3}{(s\,R)^3}(\sin s\,R - s\,R \cos s\,R).$$

Für ein solches Kernmodell sind Nullstellen von F bei $\operatorname{tg} s\,R = s\,R$ zu erwarten. Die experimentellen Wirkungsquerschnitte zeigen zwar Minima, aber keine Nullstellen. Eine Beschreibung des Kerns als eine Kugel mit diffuser Randzone [s. (34.18) und (34.19)] erklärt die experimentellen Ergebnisse in befriedigender Weise. Kerne mit nicht verschwindendem Quadrupolmoment sollten wegen der Mittelung über alle Orientierungen eine besonders große Hautdicke ergeben; diese Erwartung scheint sich experimentell zu erfüllen.

Für leichte Kerne zeigen die Experimente recht befriedigende Übereinstimmung mit der Schalenmodellverteilung. Für schwere Kerne haben sich (34.18) und (34.19), besonders die FERMI-Verteilung (34.18) gut bewährt; sie unterscheiden sich nur geringfügig.

Besondere Bedeutung kommt der Bestimmung der Formfaktoren der Nukleonen selbst zu. Mit der Methode der Elektronenstreuung kann man nicht nur Aussagen über die Ladungsverteilung, sondern auch über die Verteilung des magnetischen Momentes der Nukleonen gewinnen. Zur Untersuchung des Protons mißt man den Wirkungsquerschnitt für elastische Streuung am Wasserstoff (oder einer Wasserstoffverbindung), für die Untersuchung des Neutrons muß man Deuterium bestrahlen und den Effekt der Protonen subtrahieren. Die Messungen ergeben einen mittleren Radius der Ladungsverteilung des Protons von $0{,}8 \cdot 10^{-13}$ cm. Die genaue Form der Ladungsverteilung ist noch nicht bekannt, kann aber durch eine einfache Exponentialfunktion angenähert werden. Auch das Neutron ist nicht punktförmig, obwohl der mittlere quadratische Radius der Ladungsverteilung Null ist*. Die Verteilung des magnetischen Momentes beider Nukleonen erstreckt sich etwa ebensoweit nach außen wie die der Protonenladung.

c) Müonenatome

Durch die endliche Ausdehnung des Kerns wird die Wellenfunktion eines in einem gebundenen Zustand befindlichen, negativ geladenen Müons** beträchtlich verändert, da das elektrische Potential innerhalb des Kerns von der COULOMB-Form abweicht. Nach der BOHRschen Theorie (§5) bekommt man für den Radius der Müonenbahn im Grundzustand, wenn der Kern die Ladung Ze trägt,

$$(r_H)_{Z,\mu} \approx \frac{m_e}{m_\mu}\,(r_H)_{Z,e} \approx \frac{1}{207}\,\frac{1}{Z}\,0{,}529 \cdot 10^{-8}\,\text{cm},$$

so daß für $Z \gtrsim 40$ die Müonenbahn *innerhalb* des Kerns verlaufen würde. Die Energie der gebundenen Zustände kann man berechnen, wenn man die relativistische Wellengleichung (DIRAC-Gleichung) für das System Müon-Atomkern mit dem der Kernladungsverteilung entsprechenden elektrischen Potential löst. Solche Rechnungen sind kompliziert; sie sind für die Ladungsverteilungen (34.18) und (34.19) durchgeführt worden, so daß man die experimentellen Ergebnisse mit der Theorie vergleichen kann. Dabei zeigt sich, daß z.B. beim Blei der Grundzustand aufgrund der Kerngröße von -21 MeV auf $-10{,}5$ MeV angehoben wird. Dieser gewaltige Effekt läßt sich mit guter Genauigkeit messen.

Da man im Experiment nur die Übergangsfrequenzen des Müons zwischen zwei Energiezuständen mißt (da man den Einfluß der Elektronenhülle

---

* Offenbar muß man sich das Neutron so vorstellen, als herrsche für kleine Abstände vom Zentrum eine negative, weiter außen eine positive Ladungsdichte.

** Das Müon ist ein Lepton der Masse $(206{,}768 \pm 0{,}003)\, m_e$, das eine Lebensdauer von 2,2 μsec hat. Es gibt positiv und negativ geladene Müonen, sie kommen z.B. in der Höhenstrahlung vor. Das Müon verhält sich im vorliegenden Zusammenhang wie ein schweres Elektron.

vernachlässigen kann, entsprechen sie den Wasserstoff- bzw. den RÖNTGEN-Linien) und nur die Lage des Grundzustandes wesentlich von der Kerngröße beeinflußt wird, kann man nur *einen* Parameter der Kerngröße bestimmen; bei leichten Kernen mißt man direkt den mittleren Radius $\sqrt{\overline{R_L^2}}$. Fig. 34.4 zeigt die experimentellen Ergebnisse; auch die Elektronenstreudaten sind

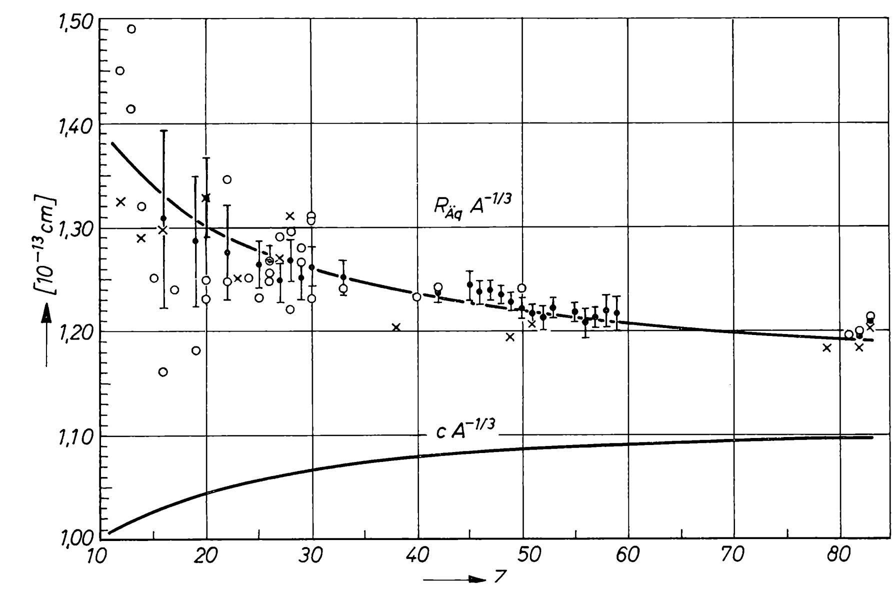


Fig. 34.4. Experimentelle Werte für den Äquivalentradius $R_{\text{Äq}}$ und den Halbwertsradius C als Funktion der Kernladungszahl Z (nach QUITMANN, D., et al., Nucl. Physics **51**, 609 [1964]). Elektronenstreudaten sind als Kreuze, aus der RÖNTGEN-Strahlung der Müonenatome erhaltene Werte als Kreise dargestellt. Die ausgezogenen Kurven wurden aus (34.18) mit den Parametern $\rho_0 = 0{,}168$ Nukleonen/$(10^{-13}\text{cm})^3$, $t = 2{,}49 \cdot 10^{-13}$cm berechnet.

eingezeichnet. Man sieht Übereinstimmung mit (34.18) für $A \gtrsim 20$ bei Wahl folgender Zahlenwerte für die Parameter (Kerne mit großem Quadrupolmoment sind hier ausgenommen):

$$\rho_0 = 0{,}168 \text{ Nukleonen}/(10^{-13}\,\text{cm})^3,$$
$$C = \left(1{,}123\,A^{\frac{1}{3}} - 0{,}941\,A^{-\frac{1}{3}} + O(A^{-\frac{5}{3}})\right) \cdot 10^{-13}\,\text{cm},$$
$$t = 2{,}49 \cdot 10^{-13}\,\text{cm}.$$

Das Auffällige an dieser Übereinstimmung ist, daß sich die experimentellen Daten offenbar für Kerne mit $A \gtrsim 20$ so beschreiben lassen, als herrsche im Kernzentrum für alle Kerne die gleiche Nukleonendichte und als wäre

darüber hinaus die Randzone t für alle Kerne gleich. Allerdings erlauben die Experimente keine genaue Aussage über das Verhalten der Funktion $\rho_{L(r)}$ nahe dem Kernmittelpunkt.

Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß die einfache Annahme (13.2) offenbar nur als grobe Näherung für große A brauchbar ist.

d) Isotopieverschiebung von Spektrallinien

Für zwei Isotope desselben Elementes koinzidieren die Spektrallinien nicht genau. Die beiden wichtigsten Gründe für dieses Verhalten sind:

1. Der sogenannte „Kernmitbewegungseffekt". Das System Kern—Elektronenhülle bewegt sich um den gemeinsamen Schwerpunkt. Dieser fällt

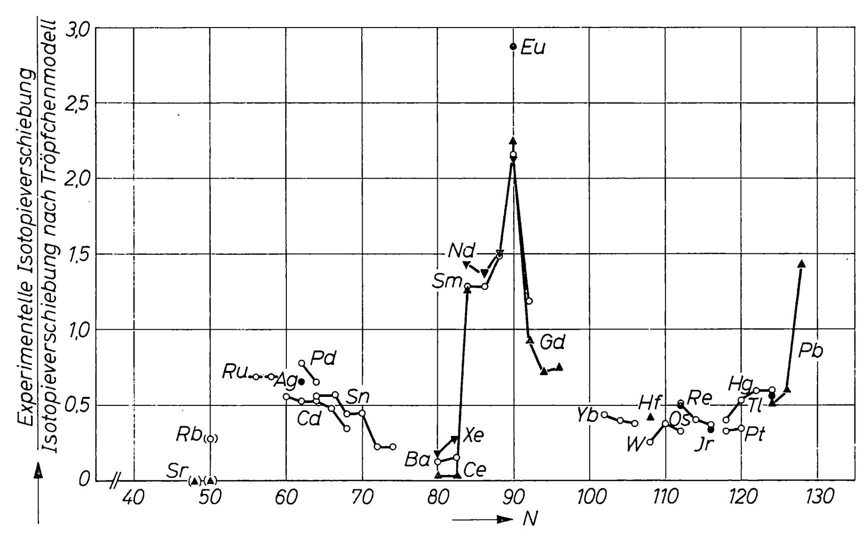


Fig. 34.5. Verhältnis der experimentellen Isotopieverschiebung zur unter der Annahme eines homogen geladenen Kugelkerns mit dem Radius $R = (1{,}20 \cdot 10^{-13}\,\text{cm})\, A^{\frac{1}{3}}$ berechneten Isotopieverschiebung (nach Brix, P., und H. Kopfermann, Rev. Mod. Phys. **30**, 517 [1958]). Die Punkte wurden bei dem neutronenreicheren Isotop des untersuchten Paares eingetragen. Schwarze Kreise bedeuten ungerades Z, alle anderen Symbole gerades Z. Die Werte für Rb und Sr sind sehr unsicher. Die Sprünge der Isotopieverschiebung im Anschluß an die magischen Zahlen fallen auf

nicht mit dem Mittelpunkt des Kerns zusammen. In der Theorie (§ 5) erscheint die reduzierte Masse, die für das schwerere Isotop größer ist als für das leichtere. Damit liegen die Energieterme (5.4) niedriger und werden die Übergangsfrequenzen (5.5) höher für das schwerere Isotop. Dieser Effekt ist bemerkbar hauptsächlich an leichten Kernen bis zu etwa $A \approx 100$.

2. Bei schweren Kernen macht sich ein Effekt in umgekehrter Richtung bemerkbar. Durch die Ausdehnung des Kerns ist die Annahme eines

COULOMB-Potentials für kleine r nicht mehr richtig, und zwar wird es z.B. für eine homogen geladene Kugel parabolisch (s. Fig. 13.1).

Im richtigen Potential werden Elektronen, die eine endliche Aufenthaltswahrscheinlichkeit innerhalb des Kerns haben (also besonders s-Elektronen), nicht mehr so stark gebunden wie bei Annahme eines punktförmigen Kerns, und zwar um so weniger, je größer der Kern ist. Dadurch werden die s-Terme des schwereren Isotops gegenüber denen des leichteren Isotops energetisch angehoben. Dies bewirkt eine Aufspaltung der Spektrallinien, auch bei fehlenden Kernmomenten. Die Intensität der Komponenten ist der Isotopenhäufigkeit proportional. Die Isotopieverschiebung ist der bei Isotopen mit ungeradem A auftretenden Hfs-Aufspaltung überlagert (für schwere Elemente sind beide Aufspaltungen von gleicher Größenordnung).

Aus der Isotopieverschiebung erhält man nicht den Kernradius selbst, sondern die Differenz der Radien benachbarter Isotope. In Fig. 34.5 sind die gemessenen Isotopieverschiebungen als Funktion der Nukleonenzahl dargestellt; die Ordinate ist das Verhältnis der Meßwerte zu berechneten Werten, die unter der (hier völlig ausreichenden) Annahme eines homogen geladenen, kugelsymmetrischen Kerns vom Radius $R = 1{,}20 \cdot 10^{-13}\,\text{cm} \cdot A^{\frac{1}{3}}$ gewonnen wurden. Man erkennt deutlich einen Einfluß der magischen Zahlen 50, 82 und 126 und der großen Quadrupolmomente (Abweichung von der Kugelsymmetrie der Ladungsverteilung) im Gebiet der seltenen Erden (letzteres auch für g-g-Kerne!).

XII. Zweinukleonenproblem (quantenmechanisch)

In diesem Kapitel wollen wir den einfachsten zusammengesetzten Kern, den es gibt, nämlich das Deuteron, und seine Isobaren Diproton und Dineutron mit quantenmechanischen Methoden behandeln.

Das Deuteron besteht aus einem Proton und einem Neutron. Nach §2 kann man die auftretenden 6 Ortskoordinaten in die 3 Schwerpunkts- und die 3 Relativkoordinaten zusammenfassen. Beim Fehlen äußerer Kräfte bewegt sich der Schwerpunkt wie ein freies Teilchen; diese Bewegung soll uns jetzt nicht interessieren. Wir wollen nur die Relativbewegung der beiden Nukleonen untersuchen. Dazu kann man sich das Proton in Ruhe denken und das Neutron als Teilchen mit der Masse

$$\mu = \frac{m_p m_n}{m_p + m_n} \approx \frac{1}{2} m_n$$

auffassen – oder umgekehrt das Neutron in Ruhe und das Proton in seiner Relativbewegung gegen dieses.

Die experimentell ermittelten Daten des Deuterons sind:

Spinquantenzahl: $I = 1$.

Bindungsenergie im Grundzustand: $(BE)_d = -2{,}224$ MeV.
Magnetisches Kerndipolmoment*: $\mu_d = 0{,}8574\ \mu_K$.
Elektrisches Kernquadrupolmoment: $Q_d = (2{,}738 \pm 0{,}014)$ mb.
Diproton und Dineutron sind nicht stabil.

Im folgenden soll gezeigt werden, wie man die experimentellen Größen deuten und mit den zwischen den Nukleonen wirksamen Kräften in Zusammenhang bringen kann.

§ 35. Elementare Theorie des Deuterons

Zunächst vernachlässigen wir den Spin der Nukleonen. Dann hängt die Wellenfunktion des Deuterons nur von den Ortskoordinaten von Proton und Neutron ab. Im Relativsystem ist die Gleichung (2.16) zu lösen. Dazu braucht man einen Ansatz für die Potentialfunktion $U_{(\vec{r})}$, die zunächst völlig unbekannt ist. Als einfachste Näherung versuchen wir ein Kastenpotential (s. Fig. 22.2) der Tiefe V_0 und der Breite b. Nach (22.10) findet man dann für den Fall $l=0$ die Energieeigenwerte aus der transzendenten Gleichung

$$\operatorname{cotg}\left[\frac{b}{\hbar}\sqrt{2\mu(V_0-|E|)}\right] = -\sqrt{\frac{|E|}{V_0-|E|}}, \tag{35.1}$$

die eine Beziehung zwischen den drei Größen V_0, b und $|E|$ darstellt. Nimmt man etwa für die Reichweite b der Kernkräfte einen zunächst willkürlichen Wert an, so kann man aus dem gemessenen $|E| = 2{,}224$ MeV das zugehörige V_0 aus (35.1) berechnen; z.B.

$$V_0 = 36\,\text{MeV} \quad \text{für} \quad b = 2\cdot 10^{-13}\,\text{cm}.$$

Die Anzahl der gebundenen Zustände mit $l=0$ ist wegen

$$\frac{b}{\hbar}\sqrt{2\mu V_0} = 1{,}9$$

nach §22 gleich Eins, d.h. es gibt nur einen gebundenen Zustand des Deuterons mit $l=0$. Numerische Lösung von (22.19) zeigt, daß für $l \neq 0$ gar kein gebundener Zustand existiert.

Die Wellenfunktion des gebundenen Zustands ist nach §22 zusammengesetzt aus den Anteilen (s. Fig. 35.1)

$$u = A\sin kr \quad \text{mit} \quad k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2\mu(V_0-|E|)} \quad \text{für} \quad r \leqq b,$$

$$u = B\,e^{-\kappa r} \quad \text{mit} \quad \kappa = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2\mu|E|} \quad \text{für} \quad r \geqq b.$$

* Vgl. $\mu_p = 2{,}793\ \mu_K$; $\mu_n = -1{,}913\ \mu_K$; $\mu_p + \mu_n - \mu_d = (0{,}0223 \pm 0{,}0012)\ \mu_K \neq 0$!

Numerisch ist

$$\kappa=\sqrt{\frac{m_n}{\hbar^2}|E|}=\frac{m_n c^2}{\hbar c}\sqrt{\frac{|E|}{m_n c^2}}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{2{,}16\cdot 10^{-13}\,\mathrm{cm}}.$$

$|u|^2 dr$ ist die Wahrscheinlichkeit, das Neutron im Abstand zwischen r und $r+dr$ vom Proton zu finden und fällt also nach außen sehr langsam ab. Man entnimmt der Fig. 35.1, daß mit großer Wahrscheinlichkeit der Abstand der beiden Nukleonen größer ist als die Potentialtopfbreite b. Das

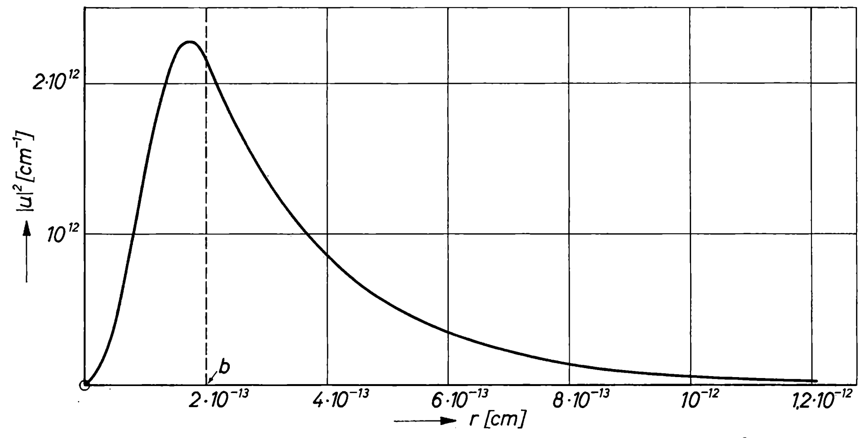


Fig. 35.1. Wellenfunktion des Deuterons: Ortsabhängigkeit der Funktion $|u|^2$. Zugrunde liegt ein Kastenpotential mit den Parametern $V_0=36$ MeV, $b=2\cdot 10^{-13}$ cm

System ist äußerst locker gebunden, was man auch schon aus der geringen Bindungsenergie sieht. Die Beziehung $R=R_0 A^{\frac{1}{3}}$ mit $R_0\approx 1{,}2\cdot 10^{-13}$ cm gilt also sicher *nicht* für den Grundzustand des Deuterons.

Aus der Normierung

$$\int|\psi|^2 d\tau=\int|u|^2 dr=\int_0^b A^2\sin^2 kr\,dr+\int_b^\infty B^2 e^{-2\kappa r}dr=1$$

folgt mit der Anschlußbedingung (vgl. §22)

$$A\sin kb=Be^{-\kappa b}$$

durch elementare Integration

$$A=\sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa b-\frac{\kappa}{k}\sin kb\cos kb+e^{\kappa b}\sin^2 kb}},\qquad B=Ae^{\kappa b}\sin kb.$$

Die hier skizzierte Theorie ist in der Annahme eines rechteckigen Potentialtopfes vorgegebener Breite recht willkürlich. Die einfache Näherung hat

sich jedoch auch für die Beschreibung anderer Eigenschaften des Deuterons (vgl. §47) als zufriedenstellend erwiesen. Andere Formen des Potentials verlangen mehr Rechenaufwand und bringen im Prinzip nichts Neues (vgl. §37).

Bisher haben wir den Spin des Deuterons außer acht gelassen. Um ihn zu berücksichtigen, muß man die Spinvariablen in die Ψ-Funktion einbauen und schreiben (im Relativsystem)

$$\Psi = \Psi_{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2,\, s_1,\, s_2)}\,.$$

Wenn der HAMILTON-Operator keine Kopplungen enthält, kann man die Spinabhängigkeit separieren. Glücklicherweise verschwindet die Spin-Bahn-Kopplung für $l=0$ (s. §31), so daß der Ansatz

$$\Psi = \psi_{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}\, \mathrm{X}_{(s_1,\, s_2)}$$

in diesem Falle gerechtfertigt erscheint. Für die Funktion $\mathrm{X}_{(s_1, s_2)}$ kommt eine der Kombinationen aus Tabelle 26.1 in Frage. Nach dem experimentellen Befund ist $I=S=1$ für den Grundzustand des Deuterons, so daß hierfür die Spinfunktion der letzten Zeile der Tabelle ausgeschlossen werden muß. Damit ergibt sich im einfachen Potentialtopfmodell die Wellenfunktion des Deuterons zu

$$\Psi = \begin{cases} A\,\dfrac{\sin k r}{r}\, Y_{0,0}\, \mathrm{X} & \text{für} \quad r \leqq b \\[2ex] B\,\dfrac{e^{-\kappa r}}{r}\, Y_{0,0}\, \mathrm{X} & \text{für} \quad r \geqq b \end{cases} \tag{35.2}$$

mit

$$\mathrm{X} = \begin{cases} \chi_+^{(n)}\, \chi_+^{(p)} & \text{für} \quad m_s = +1 \\[1ex] \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\chi_+^{(n)}\, \chi_-^{(p)} + \chi_-^{(n)}\, \chi_+^{(p)}\right) & \text{für} \quad m_s = 0 \\[1ex] \chi_-^{(n)}\, \chi_-^{(p)} & \text{für} \quad m_s = -1\,. \end{cases}$$

Weitere Diskussion s. §36 und §37.

§ 36. Streuung von Neutronen an Protonen bei geringer Einfallsenergie

a) Allgemeines über den quantenmechanischen Streuquerschnitt

In diesem Paragraphen wollen wir das Streuproblem quantenmechanisch lösen, da, wie bereits oft erwähnt, aus Streudaten auf die Wechselwirkungskräfte geschlossen werden kann. Die Hoffnung dabei ist, daß man aus dem experimentellen Wirkungsquerschnitt für die Streuung von Neutronen an

Protonen weitere Informationen über das zwischen zwei Nukleonen wirksame Potential erhält. Der Untersuchung des Falles zweier Nukleonen werden einige allgemeine Betrachtungen vorangestellt.

Der Einfachheit halber wird die Rechnung im Relativsystem durchgeführt. Das Streuzentrum sei in Ruhe. Die einfallenden Teilchen werden

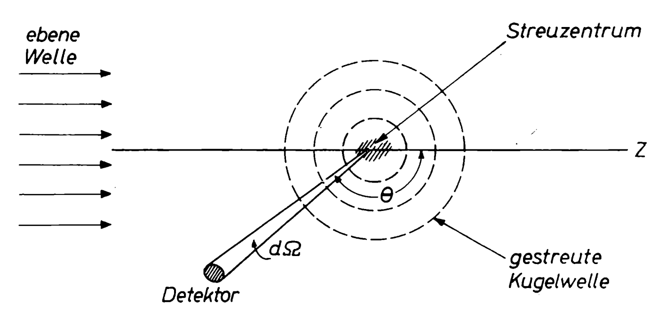


Fig. 36.1. Veranschaulichung des Streuprozesses im Relativsystem

durch ebene Wellen beschrieben (s. Fig. 36.1), die in z-Richtung fortschreiten. Die Zeitabhängigkeit wird abgespaltet, so daß die einlaufende Welle durch

$$\psi_0 = A\, e^{ikz} \quad \text{mit} \quad k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2\mu E} = \frac{|\vec{p}|}{\hbar} = \frac{1}{\lambda\!\!\!^{-}}$$

dargestellt werden kann.

Die Streuung verursacht eine auslaufende Kugelwelle [vgl. (22.4)], deren Amplitude in großen Entfernungen vom Streuzentrum nur vom Streuwinkel θ abhängt (bei kugelsymmetrischem Potential ist die Anordnung rotationssymmetrisch um die Einfallsrichtung, eine Abhängigkeit vom Azimutwinkel kann daher nicht auftreten):

$$\psi_1 = A\, f_{(\theta)} \frac{e^{ikr}}{r}.$$

Die gesamte (nicht normierte) ψ-Funktion erhält man durch Überlagerung zu

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 = A\left(e^{ikz} + f_{(\theta)} \frac{e^{ikr}}{r}\right). \tag{36.1}$$

Jetzt soll der Wirkungsquerschnitt für Streuung mit Hilfe dieser Darstellung der ψ-Funktion ausgedrückt werden. Nach (4.6) ist

$$\sigma = \frac{\text{Zahl der betrachteten Prozesse pro sec und Kern}}{\text{Strom der einfallenden Teilchen}}.$$

Ist $\rho = |\psi_0|^2$ die einlaufende Teilchendichte in [cm^{-3}] und v die (nichtrelativistische) Einfallsgeschwindigkeit im Relativsystem, so ist der ein-

fallende Teilchenstrom gleich ρv. Der in den Detektor fallende auslaufende Teilchenstrom ist mit (2.12) und $\rho' = |\psi_1|^2$ gleich

$$\rho' v = \rho\, |f_{(\theta)}|^2 \frac{1}{r^2} v\, r^2\, d\Omega .$$

Damit wird (exakte Begründung s. §40)

$$d\sigma = |f_{(\theta)}|^2\, d\Omega . \tag{36.2}$$

Dies ist der „differentielle Wirkungsquerschnitt für elastische Streuung". Durch Integration über den Raumwinkel erhält man den „integralen Streuquerschnitt"

$$\sigma = \int_0^\pi |f_{(\theta)}|^2\, 2\pi \sin\theta\, d\theta .$$

Als nächstes soll der Ausdruck $|f_{(\theta)}|^2$ so umgeformt werden, daß er mit dem Potential der Streuwechselwirkung in Zusammenhang gebracht werden kann. Dazu entwickelt man die einfallende ebene Welle nach LEGENDREschen Polynomen [vgl. (21.9)]. Es ergibt sich die mathematische Identität*

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, i^l\, j_{l\,(kr)}\, P_{l\,(\cos\theta)} ,$$

wobei $j_{l\,(kr)}$ die sphärischen BESSEL-Funktionen sind [vgl. (22.17)]. Nach §22 zeigen diese Funktionen für $r \to \infty$ das asymptotische Verhalten

$$j_{l\,(kr)} \xrightarrow{r\to\infty} \frac{1}{kr} \sin\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right) = \frac{e^{ikr - \frac{i\pi l}{2}} - e^{-ikr + \frac{i\pi l}{2}}}{2ikr} .$$

Mit $i^l = \exp\left(\frac{i\pi l}{2}\right)$ ergibt sich damit

$$e^{ikz} \xrightarrow{r\to\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{1}{2ikr} \left[e^{ikr} - (-1)^l e^{-ikr}\right] P_{l\,(\cos\theta)} . \tag{36.3}$$

Somit kann für große Entfernungen vom Streuzentrum die ebene Welle als Überlagerung von aus- und einlaufenden Kugelwellen aufgefaßt werden.

Wir machen nun den Ansatz, daß auch die gesamte ψ-Funktion asymptotisch für große r eine Summe von aus- und einlaufenden Kugelwellen sein soll; die Konstanten α_l und δ_l beschreiben die Veränderung gegenüber der einlaufenden Welle:

$$\psi \xrightarrow{r\to\infty} A \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l (2l+1) \frac{1}{2ikr} \left(e^{i(kr+\delta_l)} - (-1)^l e^{-i(kr+\delta_l)}\right) P_{l\,(\cos\theta)} . \tag{36.4}$$

---

* Beweis siehe z.B. ELTON, Introductory Nuclear Theory, Pitman, London 1959, Chapter 3,3.

Vergleich mit (36.1) liefert

$$f_{(\theta)}\frac{e^{ikr}}{r}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{2ikr}P_{l\,(\cos\theta)}\big[\alpha_l\big(e^{i(kr+\delta_l)}-(-1)^l e^{-i(kr+\delta_l)}\big)-$$
$$-\big(e^{ikr}-(-1)^l e^{-ikr}\big)\big].$$

Links steht eine auslaufende Welle. Also darf auch rechts keine zum Streuzentrum hingerichtete Kugelwelle stehen, es muß daher gelten

$$\alpha_l\, e^{-i(kr+\delta_l)}=e^{-ikr},$$

somit

$$\alpha_l=e^{i\delta_l}.$$

Damit wird nach Multiplikation mit $r e^{-ikr}$

$$f_{(\theta)}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{2ik}P_{l\,(\cos\theta)}\big(e^{2i\delta_l}-1\big)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{k}P_{l\,(\cos\theta)}\,e^{i\delta_l}\sin\delta_l\,.$$

Der differentielle Streuquerschnitt ergibt sich daraus zu

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left|\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{k}\sin\delta_l\,P_{l\,(\cos\theta)}\right|^2. \tag{36.5}$$

Beim differentiellen Wirkungsquerschnitt interferieren die Terme mit verschiedenem l. Das macht den Vergleich zwischen Theorie und Experiment schwierig.

Der integrale Streuquerschnitt ist wegen

$$|f_{(\theta)}|^2=f_{(\theta)}\,f^*_{(\theta)}$$

gegeben durch

$$\sigma=\frac{2\pi}{k^2}\sum_{l,l'=0}^{\infty}\left[\int_{-1}^{+1}d(\cos\theta)\,P_{l\,(\cos\theta)}\,P_{l'\,(\cos\theta)}\,(2l+1)(2l'+1)\times\right.$$
$$\left.\times\, e^{i(\delta_l-\delta_{l'})}\sin\delta_l\sin\delta_{l'}\right].$$

Da aber

$$\int_{-1}^{+1}P_{l\,(\cos\theta)}\,P_{l'\,(\cos\theta)}\,d(\cos\theta)=\begin{cases}\dfrac{2}{2l+1} & \text{für} \quad l=l'\\ 0 & \text{für} \quad l\neq l'\end{cases} \tag{36.6}$$

ist, folgt

$$\sigma=\frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sin^2\delta_l=4\pi\lambda\!\!\!^{-2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sin^2\delta_l\,. \tag{36.7}$$

Der integrale Wirkungsquerschnitt enthält *keine* Interferenzterme zwischen verschiedenen l-Werten mehr.

Das Problem der Berechnung von $|f_{(\theta)}|^2$ ist damit zurückgeführt auf die Bestimmung der Größen δ_l, die als „Streuphasen" bezeichnet werden. Sie hängen vom Potential $U_{(r)}$ der Wechselwirkung ab. Man kann jedoch sofort übersehen, daß für große l (klassisch: große Stoßparameter) der Einfluß von $U_{(r)}$ und damit δ_l klein werden muß, denn quantentheoretisch ist nach (22.2) die ψ-Funktion für kleine r proportional zu r^l, hat also in Kernnähe nur eine geringe Amplitude (energieabhängig).

Diskussion: Der Wirkungsquerschnitt wird in dieser Formulierung bestimmt durch die Phasenverschiebungen, die die einzelnen Streuwellen beim Passieren des Streupotentials erfahren. Die Winkelverteilung $d\sigma/d\Omega$ enthält Interferenzterme zwischen den Wellen mit verschiedenem l. Der integrale Wirkungsquerschnitt setzt sich zusammen aus Anteilen, die jeweils nur von einer Bahndrehimpulsquantenzahl abhängen:

$$\sigma = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l$$

mit

$$\sigma_l = 4\pi \lambda\!\!\!^{-2} (2l+1) \sin^2 \delta_l .$$

Da $\sin^2 \delta_l \leqq 1$, folgt

$$(\sigma_l)_{\max} = 4\pi \lambda\!\!\!^{-2} (2l+1) .$$

Die Partialwirkungsquerschnitte σ_l sind proportional dem Quadrat der Wellenlänge des einfallenden Teilchens (im Relativsystem) und können für kleine Einfallsenergien sehr groß werden. Wieder zeigt sich, daß die Wirkungsquerschnitte im allgemeinen *nichts* mit der geometrischen Kerngröße zu tun haben (vgl. §4). Man bezeichnet zuweilen $\lambda\!\!\!^-$ als die „Größe" des einfallenden Teilchens. Die maximalen partiellen Wirkungsquerschnitte wachsen mit l.

Da die Kernkräfte nur eine begrenzte Reichweite haben, ist für kleine Einfallsenergien nur Streuung mit $l=0$ („s-Wellen"-Streuung) möglich. Wegen $P_{0\,(\cos\theta)} = 1$ folgt dann

$$\left.\begin{aligned} f_{0\,(\theta)} &= \lambda\!\!\!^- e^{i\delta_0} \sin\delta_0 \\ \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{l=0} &= \lambda\!\!\!^{-2} \sin^2\delta_0 \\ \sigma_0 &= 4\pi \lambda\!\!\!^{-2} \sin^2\delta_0 \\ \psi_{l=0} &= \frac{1}{kr} e^{i\delta_0} \sin(kr+\delta_0) . \end{aligned}\right\} \tag{36.8}$$

Da $(d\sigma/d\Omega)_{l=0}$ nicht von θ abhängt, ist die Streuung im Relativsystem isotrop. Dies ist experimentell für die Streuung langsamer Neutronen bestätigt und gibt die theoretische Berechtigung für die Ausführungen des §17.

Erst für Neutronenenergien von der Größenordnung MeV tritt Streuung für andere als s-Wellen auf, der Wirkungsquerschnitt wird dann winkelabhängig.

Die Form der Funktion $\psi_{l=0}$ in (36.8) gilt für alle r außerhalb des Streuzentrums, da $j_0 = \frac{\sin kr}{kr}$ für alle r. In diesem Falle kann man also die exakte Funktion, nicht nur die Näherung für $r \to \infty$, auf einfache Weise explizit hinschreiben.

Als „Streuamplitude" wird oft die Größe

$$a_0 = f_{0\,(\theta)} = \lambda\!\!\!^{-}\, e^{i\delta_0} \sin \delta_0$$

definiert. Dann ist $\sigma = 4\pi |a_0|^2$ die Fläche, die das Streuzentrum dem ankommenden, unendlich klein gedachten Teilchen „anbietet", $2a_0$ der Radius des Kreisscheibchens. a_0 hat nichts mit dem Kernradius zu tun.

b) Neutron-Proton-Streuung bei $l=0$

Nach diesen allgemeinen Überlegungen wollen wir uns jetzt dem Problem der Streuung von langsamen Neutronen an Protonen (Wasserstoff) zuwenden und den Zusammenhang zwischen der Streuphase δ_0 und dem Kernpotential herstellen. Zunächst betrachten wir die Streuung am Grundzustand des Deuterons und wollen das einfache Kastenpotential zugrundelegen. Der Radialteil der SCHRÖDINGER-Gleichung lautet bei $l=0$ mit $u = r\psi$:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2u}{dr^2} + (U-E)\,u = 0\,.$$

Für $r \leqq b$ ist $U = -V_0$; mit $K = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2\mu(E+V_0)}$ lautet die Lösung nach (22.7)

$$u_i = A \sin Kr\,.$$

Für $r > b$ ist $U=0$; die (unnormierte) Lösung des Streuproblems ist mit (36.8)

$$u_a = \frac{1}{k} e^{i\delta_0} \sin(kr + \delta_0), \qquad k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2\mu E}\,.$$

Aus der Stetigkeitsbedingung für ψ und $\partial\psi/\partial r$ bei $r=b$, die sich auf die Stetigkeit von u und du/dr übertragen läßt, folgt

$$A \sin Kb = \frac{1}{k} e^{i\delta_0} \sin(kb + \delta_0)$$

$$AK \cos Kb = k\frac{1}{k} e^{i\delta_0} \cos(kb + \delta_0)\,.$$

Division ergibt

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{K}\operatorname{tg} K b &= \frac{1}{k}\operatorname{tg}(k b + \delta_0), \\ \delta_0 &= -k b + \operatorname{arctg}\left(\frac{k}{K}\operatorname{tg} K b\right). \end{aligned}\right\} \tag{36.9}$$

Im Grenzfall $E \to 0$, d.h. $k \to 0$, wird $K \to \frac{1}{\hbar}\sqrt{2\mu V_0}$ und

$$\left.\begin{aligned} \delta_0 &\xrightarrow{E\to 0} -k b + \frac{k}{K}\operatorname{tg} K b = -k b\left(1 - \frac{\operatorname{tg} K b}{K b}\right), \\ \sigma_0 &\xrightarrow{E\to 0} 4\pi \bar{\lambda}^2 \delta_0^2 = 4\pi b^2 \left(1 - \frac{\operatorname{tg} K b}{K b}\right)^2. \end{aligned}\right\} \tag{36.10}$$

Zahlenwert: Mit $b = 2 \cdot 10^{-13}$ cm, $V_0 = 36$ MeV ist $K b \approx 2$ und $(\sigma_0)_{\text{theor.}} \approx 3{,}5$ b.

Aus den Stetigkeitsbedingungen läßt sich die Konstante A ausrechnen; $|kA|$ kann als das Verhältnis der Amplituden der inneren und äußeren Wellenfunktion gedeutet werden. Für $k \to 0$ ergibt sich

$$\left|\frac{u_{i,\,\max}}{u_{a,\,\max}}\right| = |kA| \approx \frac{k}{K \cos K b}.$$

Im allgemeinen ist die Amplitude der ψ-Funktion innerhalb des Potentialtopfes wegen $k \ll K$ klein gegen die Amplitude außerhalb. Nur für $K b \approx \frac{2n+1}{2}\pi$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ kann die innere Wellenfunktion eine große Amplitude haben. Dann dringt sozusagen das einfallende Teilchen in das Kernpotential ein und bildet einen Verbundzustand („Compound-Kern"), der anschließend wieder auseinanderbricht. Der Wirkungsquerschnitt ist dann besonders groß. Solche „Resonanzmaxima" im Wirkungsquerschnitt lassen auf angeregte Zustände im Compound-Kern schließen. Wir werden darauf in § 41 ff. im einzelnen zurückkommen. Es sei hier nur angemerkt, daß $\cos K b = 0$ nach (22.10) gerade einem erlaubten Zustand im simplen Kastenpotential bei $E = 0$ entspricht.

Fig. 36.2 dient zur Veranschaulichung der Zusammenhänge. Man erkennt die physikalische Deutung der Streuphase δ_0: Die Phasenverschiebung zwischen gestreuter und ungestreuter Welle im Außenraum ist δ_0/k, wird also durch δ_0 bestimmt (und durch die Einfallsenergie). Wenn $\delta_0 > 0$ ist, wird die Wellenfunktion vom Streuzentrum „angezogen", für $\delta_0 < 0$ „abgestoßen". Da man aus dem experimentellen Streuquerschnitt jedoch nur δ_0^2 entnehmen kann, sind andere Experimente* erforderlich, um Aussagen über das Vorzeichen der Streuphase zu gewinnen.

Im Fall $K b = \frac{2n+1}{2}\pi$ würden sich die Funktionen u_i und u_a an der Anschlußstelle gerade im Maximum mit horizontaler Tangente treffen. Dann sind die Amplituden innen und außen gleich.

---

* Einzelheiten sind angegeben bei: R. G. Sachs, Nuclear Theory, Addison-Wesley, 1955, Kap. 5. Es hat sich ergeben, daß die Streuphase im Triplettzustand positiv, im Singulettzustand negativ ist. Der Singulettzustand ist ungebunden ($E \approx +40$ keV).

Während (36.10) für kleine Energien einen Wert von $\sigma_0 = 3{,}5$ b erwarten läßt, ergibt das Experiment $\sigma_0 = 20{,}4$ b (s. Fig. 36.3). Dieser gewaltige Unterschied kann nur erklärt werden, wenn man auch die Spineinstellung der

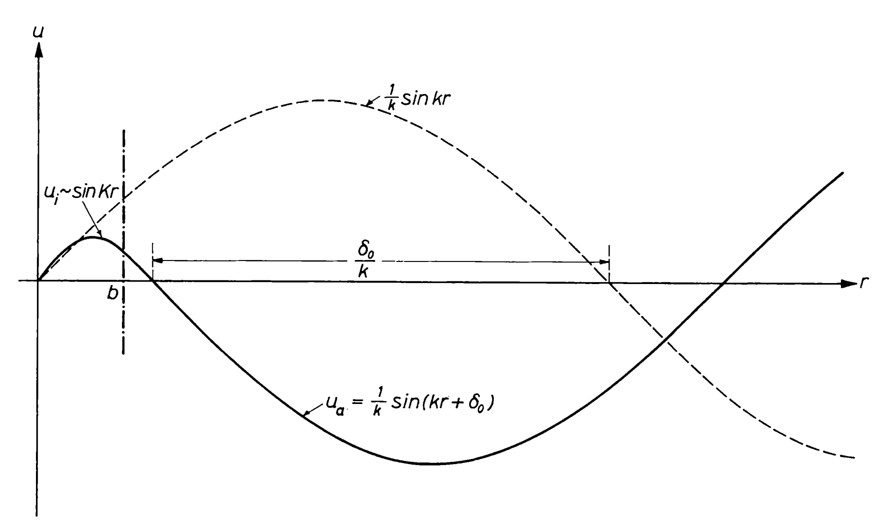


Fig. 36.2. Wellenfunktion bei der Neutron-Proton-Streuung im Relativsystem (ausgezogene Kurve). Die Welle im Außenraum (gestrichelt eingezeichnet) wird durch das Potential „angezogen", die Phasenverschiebung beträgt $\frac{\delta_0}{k}$. Im Diagramm ist $Kb \neq \frac{2n+1}{2}\pi$

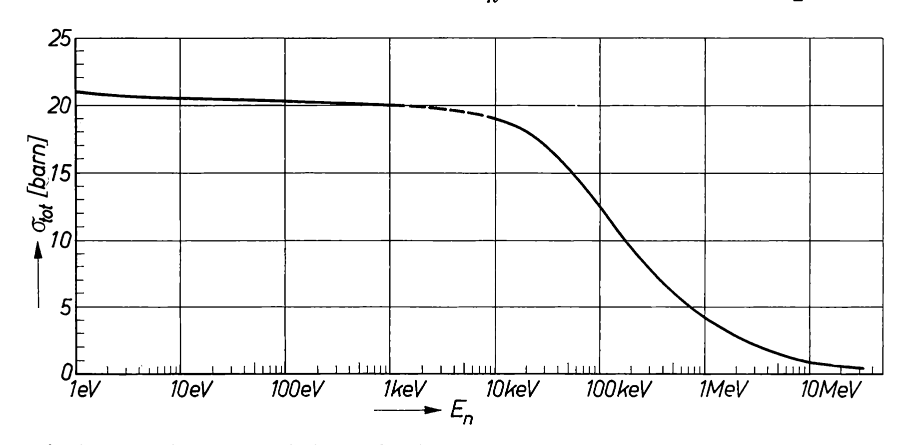


Fig. 36.3. Wirkungsquerschnitt σ_{tot} für die Wechselwirkung von Neutronen mit Protonen. Der Wirkungsquerschnitt für die Einfangsreaktion $p(n, \gamma)d$ (Zahlenwert: 0,332 mb für $v_n = 2200$ m/sec; $\sigma_{einf} \sim 1/v_n$) ist klein gegen den Streuquerschnitt σ_{str}, so daß $\sigma_{tot} \approx \sigma_{str}$. Der Anstieg über 20,4 *b* hinaus zu kleinen Neutronenenergien rührt von der chemischen Bindung der Wasserstoffatome im Molekül her und hängt etwas von der als Target benutzten wasserstoffhaltigen Substanz ab

stoßenden Teilchen berücksichtigt. Am Schluß von §35 hatten wir gesehen, daß der Grundzustand des Deuterons ein Triplett-Zustand mit $S=1$ ist, daß es aber noch einen (ungebundenen) Singulett-Zustand mit $S=0$ geben muß (vgl. letzte Zeile von Tabelle 26.1). Wenn ein Neutron an einem Proton gestreut wird, wird es im statistischen Mittel dreimal so oft einen Triplett- wie einen Singulett-Zustand des Deuterons bilden. Man erwartet also

$$\sigma_0 = \tfrac{3}{4}(\sigma_0)_{\text{Triplett}} + \tfrac{1}{4}(\sigma_0)_{\text{Singulett}}\,.$$

Aus dem experimentellen Befund muß man schließen, daß $(\sigma_0)_{\text{Singulett}}$ viel größer ist als $(\sigma_0)_{\text{Triplett}}$. Das ist aber nur möglich, wenn die Kernkräfte spinabhängig sind, d.h. wenn die Potentialfunktion U außer vom Nukleonenabstand r auch von der Spineinstellung der Nukleonen zueinander abhängt. Dies wird in §37 weiter ausgeführt.

Während die Streuung von Neutronen an Protonen experimentell leicht untersucht werden kann, ist dies für die Streuung von Protonen an Neutronen nicht der Fall, da es kein Neutronentarget gibt. Man kann nur Protonen an Deuteronen streuen und versuchen, den Effekt der Protonen im Target abzuziehen. Dies ist jedoch mit Schwierigkeiten verbunden, da erstens die Protonen elektrisch geladen sind und sich zweitens die Neutronen und Protonen im Target bewegen (Relativbewegung im Deuteron).

Die Streuung von Protonen an Protonen ist dadurch kompliziert, daß man die Coulomb-Streuung und ihre Interferenz mit der Kernpotential-Streuung sowie den Effekt der Ununterscheidbarkeit der Protonen berücksichtigen muß. Die resultierende Streuformel ist sehr komplex und enthält den Einfluß des Kernpotentials nur als kleinen Beitrag. Daher wird ein Vergleich zwischen Theorie und Experiment vorzugsweise bei der (n, p)-Streuung vorgenommen. Im Rahmen der experimentellen Fehlergrenzen ist jedoch gesichert, daß die reine Kernpotentialstreuung nicht von der Ladung des Nukleons abhängt.

§ 37. Ansätze für die Wechselwirkung zweier Nukleonen

Es erscheint nötig, den Ansatz für die Wechselwirkung zweier Nukleonen einer genaueren Kritik zu unterziehen. Jedes Nukleon (Proton oder Neutron) wird gekennzeichnet durch seine Ladung ($+e$ für das Proton, 0 für das Neutron), seinen Spin (je $\frac{1}{2}\hbar$) und seine Masse (in guter Näherung ist $m_p = m_n$, s. Tabelle 6.1). Wenn man von dem geringen Massenunterschied absieht, kann man Proton und Neutron als zwei Zustände *eines* Teilchens, des „Nukleons", ansehen.

Ein allgemeiner Ansatz für die Wechselwirkung zweier Nukleonen muß berücksichtigen, daß die potentielle Energie von den Ortskoordinaten, den Spins, den Ladungen und den Impulsen der beiden Teilchen abhängen kann:

$$U = U_{(\vec{r}_1, \vec{r}_2, s_1, s_2, e_1, e_2, \vec{p}_1, \vec{p}_2)}\,. \tag{37.1}$$

a) Impulsabhängigkeit

Die kinetische Energie der Relativbewegung der beiden Nukleonen im gebundenen Zustand des Deuterons ist nach (2.11)

$$KE = \tfrac{1}{2}\mu v^2 \approx m_n v^2;$$

im Potentialtopf gilt nach Fig. 22.2 und § 35 mit $E = KE + PE$

$$KE = V_0 - |E| \approx 34\,\text{MeV}.$$

Damit folgt

$$\frac{m_n v^2}{m_n c^2} = \frac{v^2}{c^2} = \frac{34}{940} = 0{,}036.$$

Relativistische Geschwindigkeiten treten also nicht auf. Daher erwartet man, daß die Impulsabhängigkeit in erster Näherung vernachlässigt werden kann.

Bei größeren Kernen tritt eine solche Abhängigkeit aber z.B. in Form der Spin-Bahn-Kopplung auf (s. § 31).

b) Ladungsabhängigkeit

Als gute Näherung aus allen experimentellen Ergebnissen läßt sich der Schluß ziehen, daß die speziellen Kernkräfte *nicht* von den Ladungen abhängen. (Die zwischen zwei Protonen wirksame COULOMB-Kraft muß natürlich zusätzlich betrachtet werden.) Das heißt also, daß die Kraft zwischen einem Neutron und einem Proton genau so groß ist wie die Kraft zwischen zwei Neutronen. Dann hängt U nicht von den Ladungen ab, der HAMILTON-Operator ist gegen die Ladungsvertauschung invariant. Nach § 24 gibt es daher eine physikalische Größe, für die ein Erhaltungssatz gilt. Meistens wird sie als „Isospin" bezeichnet.

Um die Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte in den Formalismus einzubauen, führen wir als zusätzliche Koordinate der ψ-Funktion des Nukleons die Ladungsvariable $t = N - Z$ ein, die nur die beiden Werte $t = +1$ (Neutron) und $t = -1$ (Proton) annehmen kann. Neutron und Proton werden also als das gleiche Teilchen in zwei Zuständen aufgefaßt. Da das Wechselwirkungspotential und damit der HAMILTON-Operator (das Diproton sei hier von der Betrachtung ausgenommen) nicht von t abhängt, läßt sich die ψ-Funktion des Nukleons separieren:

$$\psi_{(x,y,z,s,t)} = \varphi_{(x,y,z,s)}\, \eta_{(t)}.$$

Die Isospin-Eigenfunktion $\eta_{(t)}$ wird in Analogie zu den Spineigenfunktionen folgendermaßen definiert:

Für das Neutron:

$$\eta_{(t)} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \nu_{(t)}=1 & \text{für} & t=1 \\ \nu_{(t)}=0 & \text{für} & t=-1 \end{Bmatrix} \quad \text{vgl. } \chi_+ \text{ für Spin}.$$

Für das Proton:

$$\eta_{(t)} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \pi_{(t)}=0 & \text{für} & t=1 \\ \pi_{(t)}=1 & \text{für} & t=-1 \end{Bmatrix} \quad \text{vgl. } \chi_- \text{ für Spin}.$$

Für ein Zweinukleonensystem setzt sich die gesamte η-Funktion in Analogie zu der Gesamtspinfunktion aus den Funktionen ν und π zusammen (vgl. Tabelle 26.1). Dabei wird der Vertauschungssymmetrie Rechnung getragen. Es ergeben sich die in Tabelle 37.1 aufgeführten Kombinationen.

Tabelle 37.1. *Isospin-Eigenfunktionen des Zweinukleonensystems*

Eigenfunktion	Beschriebenes Nukleonensystem	Vertauschungssymmetrie
$\nu^{(1)}\,\nu^{(2)}$	Dineutron	symmetrisch
$(1/\sqrt{2})\,(\nu^{(1)}\,\pi^{(2)}+\pi^{(1)}\,\nu^{(2)})$	Deuteron	symmetrisch
$\pi^{(1)}\,\pi^{(2)}$	Diproton	symmetrisch
$(1/\sqrt{2})\,(\nu^{(1)}\,\pi^{(2)}-\pi^{(1)}\,\nu^{(2)})$	Deuteron	antisymmetrisch

In genauer formaler Analogie zum Spin (die dimensionsbehaftete Konstante $\hbar$ entfällt hier) kann man jetzt einen „Isospinvektor“ $\vec{T}$ einführen mit den Komponenten T_1, T_2, T_3 bzw. den Kombinationen

$$T_+ = T_1 + i\,T_2\,,$$
$$T_- = T_1 - i\,T_2\,,$$
$$T_3 = T_3\,,$$

die auf die η-Funktionen des Einzelteilchens wie folgt wirken [vgl. (25.27) und (25.28)]:

$$T_+\,\nu_{(t)}=0; \qquad T_+\,\pi_{(t)}=\nu_{(t)} \quad (\text{Übergang Proton-Neutron}),$$
$$T_-\,\nu_{(t)}=\pi_{(t)}; \qquad T_-\,\pi_{(t)}=0 \quad (\text{Übergang Neutron-Proton}),$$
$$T_3\,\nu_{(t)}=\tfrac{1}{2}\nu_{(t)}; \qquad T_3\,\pi_{(t)}=-\tfrac{1}{2}\pi_{(t)} \quad \left(T_3=\tfrac{1}{2}(N-Z)\right).$$

Die Operatoren T_+ und T_- sind zur Beschreibung des β-Zerfalls geeignet, der Operator T_3 liefert eine Aussage über die Ladung des Systems. Aus der völligen formalen Analogie zum Spin kann man schließen, daß das Quadrat des Isospinvektors und seine dritte Komponente Erhaltungsgrößen sind.

Für *ein* Nukleon (z.B. Neutron) gilt [vgl. (25.8)]

$$T^2 = T_3^2 + \tfrac{1}{2}(T_+ T_- + T_- T_+) = \tfrac{3}{4} = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+1)$$

oder allgemein

$$T_{\mathrm{op}}^2 \to T(T+1),$$

so daß man dem Nukleon die Quantenzahl $T=\frac{1}{2}$ zuordnen muß. $T_3=\frac{1}{2}$ entspricht dem Neutron, $T_3=-\frac{1}{2}$ dem Proton.

Beim Zweiteilchenproblem bekommt man mit

$$\vec{T} = \vec{T}^{(1)} + \vec{T}^{(2)}$$

die den Spineigenwerten in Tabelle 26.1 entsprechenden Isospineigenwerte. Die Quantenzahl T hat dann die beiden möglichen Werte $T=1$ und $T=0$, die Quantenzahl T_3 hat die Werte $-1, 0, +1$ bzw. 0.

Die Begriffsbildung des Isospins läßt sich auf Systeme mit mehr als zwei Nukleonen erweitern. Allerdings gilt der Erhaltungssatz für T^2 nur bei leichten Kernen exakt, da die COULOMB-Wechselwirkung zwischen den Protonen die Ladungsvertauschungssymmetrie stört.

c) Spinabhängigkeit

Der allgemeinste Ansatz, den man für die Orts- und Spinabhängigkeit des Wechselwirkungspotentials (37.1) zwischen zwei Nukleonen aufstellen kann, lautet im Relativsystem bei Beibehaltung der Bedingung der Austauschsymmetrie

$$U = A_{(r)} + B_{(r)}(\vec{s}^{(1)} \cdot \vec{s}^{(2)}) + C_{(r)} S_{12} \tag{37.2}$$

mit

$$S_{12} = 3\,\frac{(\vec{s}^{(1)}\vec{r})(\vec{s}^{(2)}\vec{r})}{r^2} - (\vec{s}^{(1)}\vec{s}^{(2)}) \quad (\text{„Tensorpotential“}). \tag{37.3}$$

Das Tensorpotential ist gerade so definiert, daß es im Raummittel verschwindet:

$$3\,\frac{(\vec{s}^{(1)}\vec{r})(\vec{s}^{(2)}\vec{r})}{r^2} = \frac{3}{r^2}\,(s_x^{(1)}x + s_y^{(1)}y + s_z^{(1)}z)\,(s_x^{(2)}x + s_y^{(2)}y + s_z^{(2)}z).$$

Im Raummittel verschwinden die gemischten Glieder:

$$\overline{xy} = \overline{yz} = \overline{zx} = 0,$$

die quadratischen Glieder sind alle gleich:

$$\overline{x^2} = \overline{y^2} = \overline{z^2} = \tfrac{1}{3}r^2.$$

Daher ist

$$\overline{\frac{3}{r^2}(\vec{s}^{(1)}\vec{r})(\vec{s}^{(2)}\vec{r})} = (\vec{s}^{(1)}\vec{s}^{(2)})$$

und

$$\overline{S_{12}} = 0.$$

Es mag zunächst erscheinen, als sei der Ansatz (37.2) nicht der allgemeinste, da keine höheren Potenzen von $(\vec{s}^{(1)}\,\vec{s}^{(2)})$ oder $[\vec{s}^{(1)}\times\vec{s}^{(2)}]$ enthalten sind. Es läßt sich jedoch zeigen, daß sich diese mit Hilfe der Vertauschungsrelationen des Spins auf die erste Potenz zurückführen lassen. Ebenso sind Glieder wie $(\vec{s}\,\vec{r})^2$ im obigen Ansatz mit erfaßt, da

$$\begin{aligned}(\vec{s}\,\vec{r})^2 &= (s_x x + s_y y + s_z z)^2\\ &= s_x^2 x^2 + s_y^2 y^2 + s_z^2 z^2 + (s_x s_y + s_y s_x)\, x\, y + (s_y s_z + s_z s_y)\, y\, z + (s_z s_x + s_x s_z)\, z\, x\end{aligned}$$

und sich mit den in § 25 hergeleiteten Rechenregeln ergibt

$$s_x^2 = s_y^2 = s_z^2 = \frac{\hbar^2}{4},$$

$$s_x s_y + s_y s_x = s_y s_z + s_z s_y = s_z s_x + s_x s_z = 0\,.$$

Damit wird

$$(\vec{s}\,\vec{r})^2 = \frac{\hbar^2}{4} r^2.$$

Weiter läßt sich $[\vec{s}^{(1)}\times\vec{r}]\,[\vec{s}^{(2)}\times\vec{r}]$ auf eine Summe von Skalarprodukten zurückführen.

Für das Zweinukleonensystem gilt

$$\vec{S} = \vec{s}^{(1)} + \vec{s}^{(2)},$$

so daß wegen

$$S^2 = (s^{(1)})^2 + (s^{(2)})^2 + 2(\vec{s}^{(1)}\,\vec{s}^{(2)})$$

folgt

$$(\vec{s}^{(1)}\,\vec{s}^{(2)}) = \frac{1}{2}[S^2 - (s^{(1)})^2 - (s^{(2)})^2] = \frac{\hbar^2}{2}[S(S+1) - s_1(s_1+1) - s_2(s_2+1)]\,.$$

Mit $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$ erhält man

für $S=1$ (Triplettzustand): $(\vec{s}^{(1)}\,\vec{s}^{(2)}) = \frac{1}{4}\hbar^2$,

für $S=0$ (Singulettzustand): $(\vec{s}^{(1)}\,\vec{s}^{(2)}) = -\frac{3}{4}\hbar^2$.

Das Tensorpotential (37.3) verschwindet im Singulettzustand, da sich mit $\vec{s}^{(1)} = -\vec{s}^{(2)}$ ergibt

$$\begin{aligned}S_{12} &= 3\,\frac{(\vec{s}^{(1)}\,\vec{r})\,(-\vec{s}^{(1)}\,\vec{r})}{r^2} + (s^{(1)})^2\\ &= -\frac{3}{r^2}(\vec{s}^{(1)}\,\vec{r})^2 + (s^{(1)})^2 = -\frac{3}{4}\hbar^2 + \frac{3}{4}\hbar^2 = 0\,.\end{aligned}$$

Das Wechselwirkungspotential (37.2) läßt sich damit reduzieren auf

$$\left.\begin{aligned} U_S &= A_{(r)} - \tfrac{3}{4}\hbar^2 B_{(r)} && \text{für } S=0 \text{ (Singulettzustand)}\\ U_T &= A_{(r)} + \frac{\hbar^2}{4} B_{(r)} + C_{(r)} S_{12} && \text{für } S=1 \text{ (Triplettzustand)}\end{aligned}\right\} \qquad (37.4)$$

Eine explizite Spinabhängigkeit bleibt also nur im Triplettzustand bestehen.

Wir wollen nun die SCHRÖDINGER-Gleichung mit dem Potential (37.4) unter vereinfachenden Annahmen lösen, um deutlich zu machen, daß die Kernkräfte von der relativen Spineinstellung der Nukleonen abhängen. Das gelingt auch schon *ohne* das Tensorpotential, so daß wir $C_{(r)}=0$ setzen wollen. Für die Funktionen $A_{(r)}$ und $B_{(r)}$ nehmen wir gleiche Ortsabhängigkeit an, und zwar wählen wir der Einfachheit halber die Form des Kastenpotentials. Um Übereinstimmung mit der elementaren Theorie des §35 zu erhalten, bezeichnen wir die Tiefe des Potentialtopfes im Triplettzustand mit V_0, also

$$U_T = A + \frac{\hbar^2}{4} B = \begin{cases} -V_0 & \text{für} \quad r \leqq b \\ 0 & \text{für} \quad r > b. \end{cases}$$

Dann wird das Potential des Singulettzustandes

$$U_S = A - \tfrac{3}{4}\hbar^2 B = \begin{cases} -V_0 - \hbar^2 B & \text{für} \quad r \leqq b \\ 0 & \text{für} \quad r > b. \end{cases}$$

Nach (35.1) ergibt sich mit $b = 2 \cdot 10^{-13}$ cm eine Potentialtopftiefe im Triplettzustand von $V_0 = 36$ MeV. Für den Singulettzustand erhält man aus den Streudaten am Singulettzustand (Bindungsenergie etwa +40 keV) den Wert

$$-\frac{\hbar^2 B}{V_0} \approx 0{,}6\,,$$

daraus folgt eine Potentialtopftiefe im Singulettzustand von etwa 15 MeV.

Im Triplettzustand ist $S_{12} \neq 0$. Bei $C_{(r)} \neq 0$ ergeben sich Änderungen in der Rechnung, die das von Null verschiedene Quadrupolmoment des Deuterons verständlich machen und die auch eine Erklärung dafür geben, daß das magnetische Moment des Deuterons von der Summe der magnetischen Momente von Proton und Neutron abweicht (s. §38).

Als ein wichtiger Hinweis sei die Tatsache erwähnt, daß die Tensorkräfte *keine* Zentralkräfte sind, da sie außer vom Teilchenabstand und der relativen Spinorientierung auch vom Winkel zwischen dem Ortsvektor im Relativsystem und den Teilchenspins abhängen. Das hat zur Folge, daß die Bahndrehimpulsquantenzahl L keine „gute" Quantenzahl mehr ist, da nach §24 ein Erhaltungssatz für den Bahndrehimpuls nur dann gilt, wenn die potentielle Energie U *nur* von r abhängt.

d) Ortsabhängigkeit

Über die genaue Form der Ortsabhängigkeit des Wechselwirkungspotentials besteht nach wie vor keine Klarheit. Man weiß nur, daß die Kernkräfte eine kurze Reichweite haben (etwa gleich der Ausdehnung des Kerns).

Ehe wir die Form der Ortsabhängigkeit diskutieren, wollen wir einige allgemeine Betrachtungen über die Symmetrie der Eigenfunktionen anstellen.

Der Ortsanteil der Wellenfunktion zweier Teilchen hängt im Relativsystem nur vom Abstand $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ der Teilchen ab. Vertauschung der Teilchen bedeutet den Übergang

$$\Psi_{(\vec{r}_1-\vec{r}_2)} \to \Psi_{(\vec{r}_2-\vec{r}_1)} = \Psi_{(-(\vec{r}_1-\vec{r}_2))},$$

ist also identisch mit der Paritätsoperation. Diese führt auf den Eigenwert $+1$ für gerade Drehimpulsquantenzahlen L und auf den Eigenwert -1 für ungerade L. Also ist die Ortsfunktion bei geradem L symmetrisch gegen die Teilchenvertauschung und bei ungeradem L antisymmetrisch.

Tabelle 37.2. *Quantenzahlen und Symmetrieeigenschaften von erlaubten Zweiteilchenzuständen*

L	Parität	S	Term-symbol	Symmetrie des Orts-Spin-Anteils	T	T_3	Symmetrie des Ladungsanteils	System
0 s	+	0 a	$^1S_0$	a	1 s	1 0 -1	s	Dineutron Deuteron Diproton
0 s	+	1 s	$^3S_1$*	s	0 a	0	a	Deuteron
1 a	$-$	0 a	$^1P_1$	s	0 a	0	a	Deuteron
1 a	$-$	1 s	$^3P_{0,1,2}$	a	1 s	1 0 -1	s	Dineutron Deuteron Diproton
2 s	+	0 a	$^1D_2$	a	1 s	1 0 -1	s	Dineutron Deuteron Diproton
2 s	+	1 s	$^3D_{1,2,3}$	s	0 a	0	a	Deuteron

s = symmetrisch, a = antisymmetrisch gegen Teilchenvertauschung.

Da die Gesamtwellenfunktion Ψ im Relativsystem antisymmetrisch gegen die Vertauschung *aller* Koordinaten der Nukleonen sein muß (PAULI-Prinzip), gilt

$$\Psi_{(\vec{r}_1-\vec{r}_2, s_1, s_2, t_1, t_2)} = -\Psi_{(\vec{r}_2-\vec{r}_1, s_2, s_1, t_2, t_1)}.$$

In Tabelle 37.2 sind die für das Zweinukleonensystem möglichen Zustände mit den dazugehörigen Quantenzahlen und Symmetrieeigenschaften zusammengestellt.

* Der $^3S_1$-Zustand wird nur formal zu den Tripletts gerechnet: Zwar ist $S=1$, aber wegen $L=0$ kann nur $I=1$ sein.

Wegen der nichtverschwindenden Tensorkraft ist L keine „gute" Quantenzahl, daher können Terme mit verschiedenem L in einem Zustand des Dinukleons vermischt sein. Da aber der Gesamtdrehimpuls, die Parität und wegen der Symmetrie des Hamilton-Operators gegen die Spinvertauschung auch der Gesamtspin erhalten werden, sind nicht beliebige Mischungen möglich. Zum Beispiel ist für $S=0$ stets $I=L$; in diesem Fall wird auch L zur „guten" Quantenzahl: es gibt keine Beimischungen zu den Singulettzuständen. Für $S=1$ kann $I=L+1$, L, $L-1$ sein; aus Paritätsgründen können jedoch nur Terme mit gleichem I und um zwei Einheiten verschiedenem L mischen, z.B. ${}^3S_1$ und ${}^3D_1$ oder ${}^3P_2$ und ${}^3F_2$ usw.

Wie man aus Tabelle 37.2 sieht, kommt eine solche Zustandsmischung im S-Zustand nur beim Deuteron in Frage, nicht beim Dineutron oder Diproton. Die Beimischung des ${}^3D_1$-Zustandes zum ${}^3S_1$-Grundzustand des Deuterons macht das Auftreten anomaler Kernmomente verständlich; es reicht eine Beimischung von wenigen Prozenten, um die Deuteronenmomente quantitativ zu erklären (s. §38).

Man entnimmt der Tabelle weiterhin, daß für das Deuteron doppelt so viele Zustände zur Verfügung stehen wie für das Dineutron oder das Diproton. Da der ${}^3S$-Zustand energetisch niedriger liegt als der ${}^1S$-Zustand und nach §36 der ${}^1S$-Zustand des Deuterons nicht gebunden ist, erscheint es nicht verwunderlich, daß Dineutron und Diproton nicht stabil sind.

Auch bei den in §36 erwähnten Proton-Proton-Streuversuchen macht sich das Fehlen eines ${}^3S$-Zustandes bemerkbar. Aus solchen Experimenten lassen sich daher nur die Parameter der Singulett-Wechselwirkung gewinnen. Man findet befriedigende Übereinstimmung mit den Neutron-Proton-Streudaten, was die Hypothese der Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte für diesen Zustand stützt. Eine experimentelle Basis für die Erweiterung der Hypothese auf andere Zustände gibt es noch nicht.

Im Ansatz (37.2) für das Kernpotential sind die zwischen zwei Protonen wirkenden COULOMB-Kräfte und die stets vorhandenen Kräfte zwischen den magnetischen Momenten der Nukleonen nicht enthalten und müssen zusätzlich berücksichtigt werden. Die magnetische Dipolwechselwirkung ist klein und kann in guter Näherung vernachlässigt werden. Die Kernkräfte zwischen zwei Protonen sind innerhalb eines Kerns viel stärker als die COULOMB-Kräfte, sonst müßten die schwereren Kerne auseinanderfliegen oder wenigstens die Protonen an der Kernoberfläche konzentriert sein, was mit dem experimentellen Befund nicht in Einklang steht. Aber außerhalb des Kerns verschwinden die Kernkräfte mit wachsendem Abstand sehr schnell, so daß dort die COULOMB-Kräfte überwiegen.

Die Form der Ortsabhängigkeit des Kernpotentials ist noch weitgehend unbekannt. Daher finden sich in der Literatur neben dem einfachen Kastenpotential eine große Anzahl von Ansätzen wie z.B.

$$U=-V_0+k r^2 \qquad (V_0, k \text{ const}) \qquad \text{„Parabelpotential"}$$

$$U=-K \exp\left(-\frac{r^2}{b^2}\right) \qquad (K, b \text{ const}) \qquad \text{„GAUSS-Potential"}$$

$$U = -K\,\frac{\exp(-r/b)}{r/b} \quad (K, b \text{ const}) \qquad \text{„YUKAWA-Potential"}$$

$$U = -\frac{V_0}{1+e^{\frac{r-R}{a}}} \quad (V_0, R, a \text{ const}) \qquad \text{„WOOD-SAXON-Potential", vgl. FERMI-Verteilung (34.18)}$$

und viele andere. Beim Vergleich mit den Experimenten zeigt sich, daß die gemessenen Neutron-Proton-Streuquerschnitte mit jedem dieser Ansätze theoretisch gedeutet werden können, wenn man die Konstanten entsprechend wählt. Dies hatte die Entwicklung einer Theorie* zur Folge, die mit Hilfe der Definition einer effektiven Reichweite der Kernkräfte – abhängig von Potentialtiefe und -breite – auch ohne genaue Kenntnis der Form des Potentials in der Lage ist, die Meßdaten zu beschreiben.

Experimente der (n, p)-Streuung bei hohen Energien zeigen, daß darüberhinaus Austauschkräfte wirken, die zur Folge haben, daß während der Wechselwirkung Neutron und Proton ihren Platz vertauschen. Diese Kräfte lassen sich mit Hilfe des MAJORANA-Operators P^M beschreiben, der gemäß

$$P^M\,\Psi_{(r_1, s_1, t_1, r_2, s_2, t_2)} = \Psi_{(r_2, s_1, t_1, r_1, s_2, t_2)}$$

die Ortskoordinaten vertauscht. Ein Ansatz von SERBER:

$$U_{(r)} = \tfrac{1}{2}(1 + P^M)\,U \qquad \text{„SERBER-Potential"}$$

wird zwar den experimentellen Tatsachen näherungsweise gerecht, erscheint aber noch zu simpel.

s-Wellen-Streuung $(l=0)$ ist unabhängig vom Austauschcharakter des Potentials (gerade Parität!), so daß erst bei höheren Einfallsenergien ein Einfluß zu erwarten ist.

Austauschkräfte werden auch benötigt zur Erklärung der Tatsache, daß die Kerne trotz der Anziehung der Nukleonen nicht eine immer größere Dichte bekommen, außerdem dafür, daß die Kernbindungsenergie in guter Näherung proportional zu A und nicht zu A^2 ist, wie es bei normalen Kräften sein müßte (vgl. die dem Quadrat der Ladung proportionale COULOMB-Kraft). Jedoch ist der durch das SERBER-Potential beschriebene Anteil an Austauschkräften zu klein, um alle diese Effekte quantitativ zu erklären.

Weitere Einzelheiten des Potentialverlaufs sind noch offen, so z.B. die Frage, ob für sehr kleine Entfernungen vom „Nukleonenmittelpunkt" das Potential wieder abstoßend wirken sollte, ob also das Nukleon einen „harten Kern" (hard core) besitzt. Eine solche Annahme könnte den Verlauf des Streuquerschnitts bei sehr hohen Energien erklären.

---

* Diese Theorie wird bei BLATT-WEISSKOPF, Theoretical Nuclear Physics, John Wiley, 1952, eingehend behandelt.

§ 38. Magnetisches Dipolmoment und elektrisches Quadrupolmoment des Deuterons

Wenn der Grundzustand des Deuterons ein reiner $^3S_1$-Zustand wäre, würde sich das Kerndipolmoment des Deuterons als Summe der Kerndipolmomente von Proton und Neutron ergeben (Rechnung s. u.) und das Quadrupolmoment müßte wegen der Kugelsymmetrie dieses Zustandes [vgl. (35.2)] verschwinden. Liegt aber eine Mischung aus $^3S_1$- und $^3D_1$-Zustand vor, dann kann man aus der Größe der gemessenen Momente auf das Mischungsverhältnis schließen.

a) Magnetisches Dipolmoment des Deuterons

Der Operator des magnetischen Dipolmomentes des Deuterons setzt sich nach (28.1) und (28.2) aus den Spin- und Bahnanteilen von Proton und Neutron zusammen:

$$\vec{\mu}_d = -\frac{\mu_K}{\hbar}\left(g_{l\,p}\vec{L}_p + g_{s\,p}\vec{S}_p + g_{l\,n}\vec{L}_n + g_{s\,n}\vec{S}_n\right), \qquad (38.1)$$

wobei die g-Faktoren aus Tabelle 28.1 zu entnehmen sind. Es ist zu beachten, daß $\vec{L}_p = \frac{1}{2}\vec{L}$ ist, wenn $\vec{L}_p$ um eine Achse durch den Schwerpunkt des Deuterons, $\vec{L}$ aber um eine Achse durch das Neutron genommen wird (Übergang vom Schwerpunktssystem zum Relativsystem). Wird weiterhin der Gesamt-Spindrehimpuls des Deuterons mit

$$\vec{S} = \vec{S}_p + \vec{S}_n$$

und der Gesamtdrehimpuls des Deuterons mit

$$\vec{I} = \vec{L} + \vec{S}$$

bezeichnet, so ergibt eine Umschreibung von (38.1) die Operatordarstellung

$$\left.\begin{aligned} \vec{\mu}_d = -\frac{\mu_K}{\hbar}\,\frac{1}{4}\,&[(g_{s\,p}+g_{s\,n}-1)\vec{I} + (g_{s\,p}+g_{s\,n}+1)(\vec{S}-\vec{L}) + \\ &+2(g_{s\,p}-g_{s\,n})(\vec{S}_p-\vec{S}_n)]\,. \end{aligned}\right\} \qquad (38.2)$$

Normalerweise wird als Meßgröße des „magnetischen Momentes des Deuterons“ μ_d der Erwartungswert der z-Komponente des Operators $\vec{\mu}_d$ im Zustand $m_I = I$ genommen, also in dem Zustand, in dem der Gesamtdrehimpuls seine größte Komponente in z-Richtung hat (vgl. §28). Um μ_d zu berechnen, gehen wir in Analogie zu (28.3) vor und erhalten für die Komponente von $\vec{\mu}_d$ in $\vec{I}$-Richtung

$$(\vec{\mu}_d)_J = \left(\vec{\mu}_d\,\frac{\vec{I}}{|\vec{I}|}\right)\frac{\vec{I}}{|\vec{I}|} = \frac{(\vec{\mu}_d\vec{I})}{\hbar^2\,I(I+1)}\,\vec{I}\,.$$

Wenn nun $\vec{I}$ so gerichtet ist, daß seine Komponente in z-Richtung ihren Maximalwert $I_z = \hbar I$ annimmt, wird schließlich

$$\mu_d = \frac{(\vec{\mu}_d \vec{I})}{\hbar(I+1)}.$$

Mit (38.2) erhält man daraus

$$\mu_d = -\frac{\mu_K}{\hbar^2 I(+1)} \frac{1}{4} [(g_{sp}+g_{sn}-1)(\vec{I}\vec{I})+(g_{sp}+g_{sn}+1)(\vec{S}\vec{I}-\vec{L}\vec{I})+ \\ +2(g_{sp}-g_{sn})(\vec{S}_p-\vec{S}_n)\vec{I}].$$

Dabei sind für die Drehimpulsprodukte deren Erwartungswerte einzusetzen. Der Erwartungswert des letzten Produktes verschwindet sowohl im Singulett- als auch im Triplettsystem, da nach Tabelle 37.2 die Spinfunktion im Singulettsystem antisymmetrisch, im Triplettsystem symmetrisch, der Operator aber antisymmetrisch gegen die Spinvertauschung ist. Mit (26.4), (26.12) und (26.13) folgt dann

$$\mu_d = -\mu_K \frac{1}{4}\left[(g_{sp}+g_{sn}-1)\,I+(g_{sp}+g_{sn}+1)\frac{S(S+1)-L(L+1)}{I+1}\right].$$

Für den $^3S_1$-Zustand des Deuterons ergibt sich mit $L=0$, $S=I=1$

$$(\mu_d)_{^3S_1} = -\frac{\mu_K}{4}\left[g_{sp}+g_{sn}-1+(g_{sp}+g_{sn}+1)\frac{2-0}{2}\right] \\ = -\mu_K \tfrac{1}{2}(g_{sp}+g_{sn}) = 0{,}880\,\mu_K,$$

für den $^3D_1$-Zustand ergibt sich entsprechend mit $L=2$, $S=I=1$

$$(\mu_d)_{^3D_1} = -\frac{\mu_K}{4}\left[g_{sp}+g_{sn}-1+(g_{sp}+g_{sn}+1)\frac{2-6}{2}\right] = 0{,}310\,\mu_K.$$

Der Meßwert des magnetischen Momentes des Deuterons von $0{,}8574\,\mu_K$ muß sich aus den beiden Anteilen zusammensetzen lassen. Ist a die Amplitude der $^3S_1$-Welle und b die Amplitude der $^3D_1$-Welle im Grundzustand des Deuterons, so ist der Beitrag des $^3S_1$-Zustandes zum magnetischen Moment gleich $0{,}880\,\mu_K|a|^2$, der des $^3D_1$-Zustandes $0.310\,\mu_K|b|^2$ (Interferenzglieder treten nicht auf). Also gilt

$$0{,}8574 = 0{,}880\,|a|^2 + 0{,}310\,|b|^2.$$

Die Normierung der Gesamtwellenfunktion liefert als zweite Gleichung

$$|a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Auflösung ergibt

$$|b|^2 = 0{,}0397.$$

Wenn sich das Deuteron im Grundzustand also mit etwa 4% Wahrscheinlichkeit im $^3D_1$-Zustand aufhält, kann man die Größe des magnetischen Momentes erklären*.

b) Elektrisches Quadrupolmoment des Deuterons

Das Quadrupolmoment ist nach (30.12) definiert als

$$Q = 2\left[\int \psi^*_{I,m_I}\, r^2 P_{2\,(\cos\omega)}\, \psi_{I,m_I}\, d\tau\right]_{m_I=I} \tag{38.3}$$

mit

$$P_2 = \sqrt{\frac{4\pi}{5}}\, Y_{2,0}\,.$$

Dabei ist r der Abstand des Protons vom Schwerpunkt des Deuterons. Da man aber die Wellenfunktion des Deuterons einfacher im Relativsystem berechnen kann, möchte man mit dem Buchstaben r lieber den Abstand Proton—Neutron bezeichnen. Von dem geringen Massenunterschied abgesehen, kann man dies durch die Ersetzung von r in (38.3) durch $r/2$ erreichen. Dann ist also

$$Q = \sqrt{\frac{\pi}{5}}\left[\int \psi^*_{I,m_I}\, r^2\, Y_{2,0}\, \psi_{I,m_I}\, d\tau\right]_{m_I=I}. \tag{38.4}$$

r ist nun der Relativabstand zwischen Proton und Neutron.

Die Wellenfunktion des Deuteron-Grundzustandes läßt sich als Linearkombination aus $^3S_1$- und $^3D_1$-Wellen darstellen:

$$\psi_{I,m_I} = a\,\psi_{^3S_1} + b\,\psi_{^3D_1}.$$

Mit (26.5) und (35.2) sind die normierten Eigenfunktionen im Relativsystem

$$(\psi_{^3S_1})_{m_I=I} = R_{S\,(r)}\, Y_{0,0}\, \chi_+^{(n)}\, \chi_+^{(p)}$$

und

$$(\psi_{^3D_1})_{m_I=I} = \sum_{m_s=-1}^{+1} C_{1,2,1;\,m_s,1}\, \chi_{1,m_s}\, \psi_{2,1-m_s}\,.$$

Dabei ist nach (21.13) (zeitunabhängig) und Tabelle 26.1:

$$\psi_{2,1-m_s} = R_{D\,(r)}\, Y_{2,1-m_s}$$

und

$$\chi_{1,m_s} = \begin{cases} \chi_+^{(n)}\, \chi_+^{(p)} & \text{für} \quad m_s = +1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\chi_+^{(n)}\, \chi_-^{(p)} + \chi_-^{(n)}\, \chi_+^{(p)}\right) & \text{für} \quad m_s = 0 \\ \chi_-^{(n)}\, \chi_-^{(p)} & \text{für} \quad m_s = -1\,. \end{cases}$$

* Eine genauere Diskussion findet sich bei SACHS, Nuclear Theory, Addison Wesley, 1955.

Zusammengefaßt

$$(\psi_{^3D_1})_{m_I=I} = R_{D(r)}\Big[C_{1,2,1;-1,1}\, Y_{2,2}\,\chi_-^{(n)}\,\chi_-^{(p)} + $$
$$+ C_{1,2,1;0,1}\, Y_{2,1}\frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_+^{(n)}\,\chi_-^{(p)} + \chi_-^{(n)}\,\chi_+^{(p)}) +$$
$$+ C_{1,2,1;1,1}\, Y_{2,0}\,\chi_+^{(n)}\,\chi_+^{(p)}\Big].$$

Bei der Berechnung des Integrals (38.4) fallen viele Terme wegen der Orthonormalität der Spineigenfunktionen weg. Es bleiben nur Glieder stehen, die Quadrate solcher Funktionen enthalten; dann ergibt eine Integration über die Spinvariablen Eins.

Zur Auswertung der Winkelintegrale muß man sich zunächst darüber Gedanken machen, ob die Winkelargumente der Kugelfunktionen in den Wellenfunktionen dieselben sind wie die des Quadrupoloperators P_2. Der Winkel ω ist nach Fig. 30.1 der Polarwinkel des Aufpunktes gegen die Symmetrieachse des Kerns, gemessen vom *Schwerpunkt* des Kerns. Den Polarwinkel der Kugelfunktionen, die in den Wellenfunktionen im *Relativ*system enthalten sind, kann man aber ebenfalls auf eine Achse durch den Schwerpunkt beziehen, da der Schwerpunkt immer auf der Verbindungslinie Proton—Neutron liegt. Die Richtung der Achse (z-Richtung) ist zunächst willkürlich, sie kann als Richtung der Symmetrieachse gewählt werden. Dann stimmen die Winkelargumente der Kugelfunktionen überein. Mit

$$\int |Y_{0,0}|^2\, Y_{2,0}\, d\Omega = \frac{1}{4\pi}\int Y_{2,0}\, d\Omega = 0$$

bleibt von (38.4) im Fall des Deuterons nur übrig

$$Q_d = \sqrt{\frac{\pi}{5}}\Big[\int_0^\infty R_{S(r)} R_{D(r)} r^4 dr\, C_{1,2,1;1,1} \int (a^* b\, Y_{0,0}^* Y_{2,0} Y_{2,0} + b\, a^*\, Y_{2,0}^* Y_{2,0} Y_{0,0})\, d\Omega +$$
$$+ |b|^2 \int_0^\infty R_{D(r)}^2 r^4\, dr \int (C_{1,2,1;-1,1}^2 Y_{2,2}^* Y_{2,0} Y_{2,2} + C_{1,2,1;0,1}^2 Y_{2,1}^* Y_{2,0} Y_{2,1} +$$
$$+ C_{1,2,1;1,1}^2\, Y_{2,0}^*\, Y_{2,0}\, Y_{2,0})\, d\Omega\Big].$$

Es gilt allgemein [s. (34.13)]

$$\int Y_{l_3,m_3}^*\, Y_{l_2,m_2}\, Y_{l_1,m_1}\, d\Omega = \sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi(2l_3+1)}}\; C_{l_1,l_2,l_3;m_1,m_3}\, C_{l_1,l_2,l_3;0,0}\,.$$

Mit

$$C_{1,2,1;1,1}=\sqrt{\tfrac{1}{10}};\qquad C_{2,2,2;0,0}=-\sqrt{\tfrac{2}{7}},$$
$$C_{1,2,1;0,1}=-\sqrt{\tfrac{3}{10}};\qquad C_{2,2,2;1,1}=-\sqrt{\tfrac{1}{14}},$$
$$C_{1,2,1;-1,1}=\sqrt{\tfrac{3}{5}};\qquad C_{2,2,2;2,2}=\sqrt{\tfrac{2}{7}}$$

ergibt sich schließlich

$$Q_d=\frac{\sqrt{2}}{20}(a^*b+b^*a)\int_0^\infty R_{S(r)}R_{D(r)}r^4\,dr-\frac{1}{20}|b|^2\int_0^\infty R^2_{D(r)}r^4\,dr.$$

Durch Berechnung der Radialintegrale erhält man einen Wert für das Quadrupolmoment des Deuterons als Funktion der Amplituden a und b. Man kann z.B. als einfache Näherung für R_S den Radialteil von (35.2) benutzen und sich R_D auf ähnliche Weise verschaffen.

Für $b=0$ (reiner ${}^3S_1$-Zustand) wäre das Quadrupolmoment des Deuterons gleich Null. Dies ist mit dem Experiment im Widerspruch (das Quadrupolmoment des Deuterons ist zwar nur klein, aber definitiv von Null verschieden). Für $|b|\ll|a|$ (vgl. oben) wird der Hauptbeitrag zu Q_d vom ersten Glied, also dem Mischterm zwischen ${}^3S_1$- und ${}^3D_1$-Zustand, verursacht. Da im Radialintegral wegen des r^4-Terms große r ein viel größeres Gewicht erhalten als kleine r, wird der Wert stark vom Verlauf der Funktion $R_{D(r)}$ abhängen, die ihr Maximum bei größeren r hat als $R_{S(r)}$. Wegen der ungenauen Kenntnis der wahren Funktion $R_{D(r)}$, die von der Form des Nukleonenpotentials abhängt, kann man aus dem gemessenen Wert für Q_d nur schlecht auf das Verhältnis b/a schließen. Jedoch ist der aus dem magnetischen Moment des Deuterons gewonnene Wert von b/a nicht unverträglich mit vernünftigen Annahmen über die Radialfunktionen.

XIII. Wirkungsquerschnitte von Kernreaktionen

In diesem Kapitel wollen wir uns einen Überblick über die Theorie der Kernreaktionen verschaffen. Wir beschränken uns dabei auf solche Reaktionen, bei denen vorher und nachher je zwei Teilchen vorhanden sind. Außerdem sei angenommen, daß das beschossene Teilchen A vor der Reaktion einen Impuls habe, der klein ist gegen den Impuls des anfliegenden Teilchens a. Dann sind die in Kapitel IV hergeleiteten kinematischen Energie-Winkel-Beziehungen gültig.

In § 39 werden die bei Kernreaktionen geltenden Erhaltungssätze zusammengestellt. §40 beschäftigt sich mit dem Wirkungsquerschnitt für Kernreaktionen vom quantenmechanischen Standpunkt. Insbesondere

werden sogenannte „Compound"-Reaktionen betrachtet, bei denen durch den Zusammenprall der Teilchen *a* und *A* ein angeregter Zwischenzustand $(a+A)$ (auch „Compoundzustand" *C* genannt) entsteht, der wesentlich länger existiert als z.B. die Flugdauer des Teilchens *a* durch den Reaktionspartner *A*. Da die Lineardimensionen von Kernteilchen von der Größenordnung 10^{-12} cm sind und die Anfluggeschwindigkeit des Teilchens *a* nicht größer als die Lichtgeschwindigkeit sein kann, muß eine als Compoundzustand ansprechbare Nukleonenkonfiguration im Kern eine Lebensdauer von mehr als etwa 10^{-20} sec (d.h. Linienbreiten von weniger als etwa 0,1 MeV) haben. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, liegt es nahe anzunehmen, daß im Moment des Zerfalls des Zustandes in die Bruchstücke *b* und *B* der Kern *als ganzes* angeregt ist und – abgesehen von den zu erhaltenden Größen (s. §39) – keine „Erinnerung" mehr daran hat, wie er angeregt wurde. Eine mögliche, aber stark vereinfachende Vorstellung ist, daß die Energie des einfallenden Teilchens gleichmäßig unter die Nukleonen des Targetkerns verteilt wird und es lange dauert, bis eins davon wieder einmal genug Energie hat, um die Bindungsenergie zu überwinden.

Das Compoundkernmodell hat eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Tröpfchenmodell, insofern als alle Nukleonen als gleichberechtigt angenommen werden und eine statistische „Gleichverteilung" der Anregungsenergie über den Kern stattfinden soll. Im Gegensatz dazu können nach dem extremen Schalenmodell nur die Nukleonen in der „äußersten" Schale angeregt werden; das PAULI-Prinzip verbietet eine Anregung der Rumpfnukleonen, weil die durch Stöße mit geringer Energieübertragung erreichbaren Niveaus bereits besetzt sind. Beide Modelle können der Wirklichkeit nicht voll gerecht werden. Das Compoundkernmodell soll uns jedoch für die hier zu besprechenden elementaren Zusammenhänge als Wegweiser dienen.

Ob bei einer Reaktion ein Compoundkern gebildet wird oder nicht, hängt im wesentlichen von der Energie des einfallenden Teilchens ab. Es gibt folgende Grenzfälle:

1. Teilchen *a* fliegt ohne Reaktion durch den Kern *A* hindurch (Kern *A* „durchsichtig").

2. Jedes auf den Kern *A* treffende Teilchen *a* führt zur Bildung eines Compoundzustandes (Kern *A* „schwarz").

3. Teilchen *a* reagiert nur mit einem Teil des Kerns *A* („direkte Reaktion").

Für niedrige Energien des einfallenden Teilchens darf man den Fall 2 zugrundelegen. Die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes von der Energie des einfallenden Teilchens wird in §40 bis §42 besprochen. Dabei ist die Theorie der durch langsame Neutronen ausgelösten Reaktionen wegen ihrer großen Wichtigkeit in der Kerntechnik besonders ausführlich

dargestellt (§41 und §42). Es ergibt sich eine Möglichkeit, die in §18 eingeführte Resonanz-Entkommwahrscheinlichkeit zu berechnen.

Zunächst werden die Eigenschaften der Compoundzustände durch Hilfsgrößen charakterisiert, die als „Linienbreiten" bezeichnet werden. Diese Größen lassen sich mit dem Kernpotential in Zusammenhang bringen (s. §44). Eine Aussage über die Energieverteilung der Sekundärteilchen gewinnt man aus der Vorstellung der „Verdampfung" des Kerntröpfchens (s. §45).

Für höhere Energien des Einfallsteilchens hat sich eine Vorstellung über den Ablauf der Kernreaktionen bewährt, die zwischen die Grenzfälle 1 und 2 fällt. Sie findet ihren Ausdruck im sogenannten „optischen Modell", das in §43 behandelt wird.

Der Fall 3 der Direktreaktionen, der hauptsächlich bei hohen Einfallsenergien verwirklicht ist, wird hier nicht vollständig diskutiert, da die Untersuchungen solcher Prozesse noch stark im Fluß sind. Einige Beispiele werden in § 46 und § 47 angegeben.

Unabhängig vom Reaktionsmechanismus erhält man aus dem quantenmechanischen Wechselwirkungsproblem einen Zusammenhang zwischen dem Wirkungsquerschnitt einer Reaktion und dem Wirkungsquerschnitt der inversen Reaktion (s. §44).

§ 39. Erhaltungssätze

Bei jeder Kernreaktion gelten gewisse Erhaltungssätze. Der Übersichtlichkeit wegen werden diese im folgenden am Beispiel der Zweiteilchenreaktion

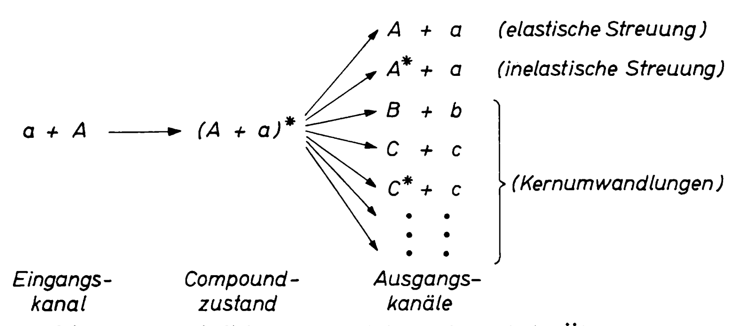


Fig. 39.1. Zweiteilchen-Kernreaktion, schematische Übersicht

zusammengestellt (s. Fig. 39.1); Drei- und Mehrteilchenzerfälle (z.B. auch der β-Zerfall) werden also hier nicht betrachtet.

Die Bezeichnungen „Eingangskanal" und „Ausgangskanal" sind der Hochfrequenztechnik entliehen; in diesem Bild entspricht der Compoundzustand einer Weiche in

einem Hohlleitersystem, die die Intensität der einlaufenden Welle auf die Ausgangshohlleiter (= „Kanäle") verteilt

Erhaltungssätze gelten für die folgenden physikalischen Größen (vgl. auch §24):

a) Baryonenzahl

Die Gesamtzahl der Nukleonen vor der Reaktion ist gleich der Gesamtzahl der Nukleonen nach der Reaktion:

$$\sum A = \text{const}.$$

Es können keine Nukleonen geschaffen oder vernichtet (z.B. in Energie umgesetzt) werden.

Allgemeiner: Die Differenz der Zahl der Baryonen und der Zahl der Antibaryonen bleibt konstant.

Bei der Kernenergiegewinnung muß man sich daher auf freiwerdende Bindungsenergie beschränken (Fusion leichter oder Spaltung schwerer Kerne).

b) Elektrische Ladung

Die Gesamtladung aller an einer Reaktion teilnehmenden Teilchen bleibt konstant. Solange keine Mesonen oder Leptonen beteiligt sind, gilt

$$\sum Z = \text{const}.$$

Bei einer solchen Reaktion wird also die Zahl der Protonen (und damit wegen $\sum A = \text{const}$ auch die Zahl der Neutronen) einzeln erhalten.

Beispiel:

$$_5B^{10} + {}_2He^4 \rightarrow ({}_7N^{14})^* \rightarrow {}_1H^1 + {}_6C^{13} + \text{Energietönung}.$$

In jedem der drei Stadien der Reaktion gibt es insgesamt 7 Neutronen und 7 Protonen.

c) Leptonenzahl

Auch die Zahl der Leptonen (Elektronen, Neutrinos, Müonen) bleibt erhalten; allgemeiner: Die Differenz zwischen Leptonenzahl und Antileptonenzahl bleibt bei jeder Kernreaktion konstant. Beispiele wurden in Kapitel V behandelt.

d) Energie und Impuls

Die Erhaltung dieser Größen* führt auf die in Kapitel IV ausführlich besprochenen Energie-Winkel-Beziehungen (bei nichtrelativistischen Teilchen

* Während Baryonenzahl, Ladung und Leptonenzahl *in jedem Augenblick* streng erhalten bleiben, ist dies für Energie und Impuls wegen der Unschärferelation nicht nachprüfbar und das heißt nicht notwendig erfüllt.

z. B. auf die Q-Gleichung). Die Energie-Winkel-Beziehungen sind, besonders im Laborsystem, oft umständliche Formelausdrücke; ihre Berücksichtigung bei der Auswertung jedes Experimentes ist jedoch unumgänglich.

e) Drehimpuls

Die Vektorsumme aus den Spins der Teilchen im Eingangskanal und ihrem relativen Bahndrehimpuls wird als „Kanalspin" des Eingangskanals bezeichnet. Dann lautet der Drehimpulserhaltungssatz für Kernreaktionen: Der Kanalspin des Eingangskanals ist gleich dem Spin des Compoundzustandes und auch gleich dem Kanalspin des Ausgangskanals. In Formeln:

$$\underbrace{(\vec{I}_A+\vec{i}_a)}_{\overrightarrow{s_{aA}}}+\overrightarrow{l_{aA}}=\vec{I}_C=\overrightarrow{l_{bB}}+\underbrace{(\vec{I}_B+\vec{i}_b)}_{\overrightarrow{s_{bB}}}. \tag{39.1}$$

Abgekürzte Schreibweise:

$$\overrightarrow{s_{aA}}(\overrightarrow{l_{aA}})\,\vec{I}_C(\overrightarrow{l_{bB}})\,\overrightarrow{s_{bB}}.$$

Aus dem Drehimpulserhaltungssatz ergeben sich Auswahlregeln, wie an einem Beispiel gezeigt werden soll: Wenn bei der Reaktion $B^{10}(\alpha,p)\,C^{13}$ der relative Bahndrehimpuls $\overrightarrow{l_{aA}}=0$ ist (dies ist für Energien $E_\alpha \lesssim 10$ MeV meist erfüllt), muß mit $I_{B^{10}}=3$, $i_\alpha=0$ der Compoundzustand $(N^{14})^*$ den Spin $I_C=3$ haben. Im Ausgangskanal ist $I_{C^{13}}=\frac{1}{2}$, $i_p=\frac{1}{2}$, so daß die Spin-Vektorsumme $\overrightarrow{s_{bB}}$ die Quantenzahl $s_{bB}=0$ oder 1 hat. Folglich muß die Quantenzahl des relativen Bahndrehimpulses $\overrightarrow{l_{bB}}$ einen der Werte 2, 3 oder 4 annehmen. Die Betrachtung der Parität wird die Werte noch weiter einschränken.

f) Parität

Die Paritätserhaltung bei der „starken" und elektromagnetischen Wechselwirkung (β-Zerfall jetzt ausgeschlossen) verlangt, daß die Parität des Eingangskanals gleich der Parität des Compoundzustandes und gleich der Parität des Ausgangskanals ist.

Im Beispiel $B^{10}(\alpha,p)C^{13}$ weiß man aus dem Schalenmodell und aus dem Vergleich des magnetischen Momentes mit der Vorhersage des SCHMIDT-SCHÜLER-Modells (s. §28), daß die Parität der Grundzustände von B^{10} und He^4 positiv, die des C^{13} negativ ist. Das Proton hat positive Parität. Da $l_{aA}=0$ ist (positive Parität, s. §24), hat der Eingangskanal insgesamt positive Parität. Der $(N^{14})^*$-Compoundzustand hat dann ebenfalls positive Parität, es muß sich also um ein 3^+-Niveau handeln. Damit der Ausgangskanal ebenfalls positive Parität haben kann, muß l_{bB} eine ungerade Zahl sein. Aus den möglichen Werten 2, 3 und 4 wird also aus Paritätsgründen die 3 ausgewählt. Damit sind sowohl Spin und Parität des Compoundzustandes als auch der relative Bahndrehimpuls der Teilchen im Ausgangskanal bestimmt.

Leider erhält man nicht immer eine so eindeutige Aussage, aber ähnliche Überlegungen führen immerhin zu einer Beschränkung der möglichen Werte für die Quantenzahlen. Aus der Zusammenschau der Meßergebnisse von mehreren Reaktionen am gleichen Compoundzustand lassen sich die Quantenzahlen von Spin, Parität und relativem Bahndrehimpuls oft eindeutig zuordnen.

Drehimpuls- und Paritätserhaltung bedingen eine Winkelkorrelation der Teilchen a und b der Kernreaktion. Sei θ der Winkel im Schwerpunktssystem zwischen der Emissionsrichtung des Teilchens b und der Einfallsrichtung des Teilchens a. Wenn die Reaktion über einen Compoundzustand definierter Parität abläuft, muß die Wellenfunktion des Endzustandes definierte Parität haben. Der auslaufende Teilchenstrom ist proportional zum Quadrat der Wellenfunktion, hat also gerade Parität und ändert sich bei der Transformation $\vec{r} \to -\vec{r}$ nicht. Diese Transformation bedeutet in Kugelkoordinaten nach §24 die Ersetzung $\theta \to \pi - \theta$ und $\varphi \to \varphi + \pi$. Das bewirkt

$$d\sigma_{(\pi-\theta,\,\varphi+\pi)} = d\sigma_{(\theta,\,\varphi)}\,.$$

Da $d\sigma$ für unpolarisierte Einfallsstrahlung und unpolarisiertes Target nicht von φ abhängen darf, muß

$$d\sigma_{(\pi-\theta)} = d\sigma_{(\theta)}$$

sein, also darf $d\sigma$ nur gerade Potenzen von $\cos\theta$ enthalten.

Abweichungen von dieser Regel würden bedeuten, daß entweder mehr als ein Compoundzustand an der Reaktion beteiligt ist oder daß die Reaktion gar nicht über einen Compoundzustand abläuft (wie z.B. die Stripping-Reaktion, s. § 46).

Daher ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Teilchen b in das Raumwinkelelement $d\Omega$ unter dem Winkel θ emittiert wird, gegeben durch

$$\left.\begin{aligned} w_{(\theta)}\,d\Omega = w_{(\theta=90^\circ)}\,[1 + A_{2\,(E)}\cos^2\theta + A_{4\,(E)}\cos^4\theta + \cdots +\\ + A_{2L\,(E)}\cos^{2L}\theta]\,d\Omega \end{aligned}\right\} \quad (39.2)$$

(ungerade Potenzen von $\cos\theta$ treten nicht auf!). Die Koeffizienten $A_{2(E)}$ bis $A_{2L(E)}$ hängen in komplizierter Weise von der Energie des Teilchens a, den Werten der Spin- und Bahndrehimpulsquantenzahlen und den Wechselwirkungskräften ab; eine nützliche Information kann aber oft schon aus der Zahl der benötigten Koeffizienten gezogen werden. Die Zahl L der nicht verschwindenden Potenzen von $\cos^2\theta$ ist nämlich gegeben durch die kleinste der Zahlen l_{aA}, I_C, l_{bB} (ist die kleinste dieser Zahlen halbzahlig, dann ist L um $\frac{1}{2}$ kleiner als diese Zahl)*. Wenn also $I_C = 0$ oder $\frac{1}{2}$ ist, ist die Winkelverteilung im Schwerpunktssystem isotrop, desgleichen bei $l_{aA} = 0$ und $l_{bB} = 0$.

* Daß die Potenzreihe bei einem endlichen Wert von L abbricht, kann hier nicht begründet werden. Ausführliche Herleitung s. Sachs, Nuclear Theory, Addison Wesley, 1955, Kapitel 10,7.

Beispiel: Reaktion $Li^7(p, \alpha)$ He^4. Das Energiediagramm des Kerns Be^8 ist in Fig. 39.2 dargestellt. Der Grundzustand des Be^8 zerfällt spontan in zwei α-Teilchen, aber der durch die Reaktion $Li+p$ herstellbare Be^8-Zustand bei 17,63 MeV Anregungsenergie mit Spin 1^+ kann nicht in zwei α-Teilchen zerfallen. Denn ein in zwei α-Teilchen zerfallender Zustand hat wegen $i_\alpha=0$ den Spin l_{bB} und die Parität $(-1)^{l_{bB}}$ im Ausgangskanal. Andererseits sind die beiden α-Teilchen identisch, so daß Vertauschung der Teilchenorte den Zustand nicht ändert. Da aber im Falle zweier identischer Teilchen der Austausch gleichwertig ist mit einer Spiegelung am Ursprung (s. § 37), muß ein in zwei α-Teilchen zer-

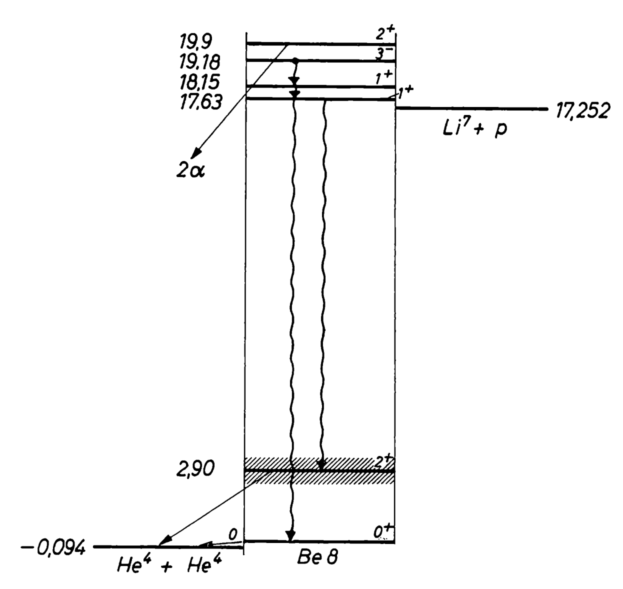


Fig. 39.2. Energiediagramm der Massenzahl 8; nur die im Zusammenhang mit dem im Text behandelten Beispiel interessanten Zustände sind eingezeichnet

fallender Zustand gerade Parität haben. Daher können nur Be^8-Zustände mit $I_C=0^+$, $2^+, 4^+ \ldots$ in zwei α-Teilchen zerfallen. Diese Überlegung verbietet auch den α-Zerfall des 19,18 MeV-Zustandes des Be^8.

Die Zuordnung 2^+ für den Spin des 19,9 MeV-Zustandes des Be^8 kann aufgrund der Winkelverteilung der emittierten α-Strahlung getroffen werden. Im Experiment wurde Li^7 mit Protonen im Energiebereich zwischen 0,5 MeV und 3,5 MeV beschossen, die Winkelverteilung der α-Teilchen läßt sich durch (39.2) mit zwei nicht verschwindenden Koeffizienten $A_{2(E)}$ und $A_{4(E)}$ beschreiben, $A_{6(E)}$ ist vernachlässigbar klein. Daraus schließt man: $l_{aA}\geqq 2$, $I_C\geqq 2$, $l_{bB}\geqq 2$. Außerdem muß l_{bB} gerade sein, da der Zustand in zwei α-Teilchen zerfallen kann. Da $s_{bB}=0$ (zwei α-Teilchen), ist $I_C=l_{bB}$, gerade Parität.

Im Eingangskanal ist $i_p=\frac{1}{2}^+$, $I_{Li^7}=\frac{3}{2}^-$, daher $s_{aA}=1^-$ oder 2^-. Wegen der Paritätserhaltung muß $l_{aA}=1, 3, 5, \ldots$ sein. Aber wegen $l_{aA}\geqq 2$ ist $l_{aA}=1$ ausgeschlossen. Das Fehlen des A_6-Terms bedeutet, daß eine der drei Größen l_{aA}, I_C, l_{bB} kleiner als 3 ist. l_{aA} kann nicht kleiner als 3 sein, da sonst gar kein Wert für l_{aA} mehr möglich wäre. Also ist $I_C=l_{bB}\leqq 3$, d.h. $I_C=l_{bB}=2$, positive Parität. Das ergibt die Zuordnung 2^+ für Spin und Parität des 19,9 MeV-Niveaus des Be^8.

Im Eingangskanal setzen sich $\overrightarrow{l_{aA}}$ und $\overrightarrow{s_{aA}}$ zu $\overrightarrow{I_C}$ zusammen, d.h.

$$I_C - s_{aA} \leqq l_{aA} \leqq I_C + s_{aA}\,.$$

Die einzige Möglichkeit für den Wert der Quantenzahl l_{aA} ist 3; für s_{aA} bleiben beide Möglichkeiten 1^- und 2^- offen.

g) Isospin

Bei Kernreaktionen zwischen leichten Kernen wird auch der Isospin (s. § 37) erhalten. Es gibt jedoch nur wenige Beispiele für Auswahlregeln, die aus diesem Erhaltungssatz folgen.

§ 40. Wirkungsquerschnitte für Streuung und Reaktionen

In diesem Paragraphen sollen die Wirkungsquerschnitte für Streuung und Reaktionen durch die sogenannten „Streuphasen“ ausgedrückt werden, die ihrerseits in den folgenden Paragraphen mit den Kerneigenschaften in Verbindung gebracht werden, wobei dann das Compoundkernmodell zugrundegelegt wird. Wir werden jetzt ähnlich vorgehen wie in § 36, nur müssen wir die Möglichkeit des Auftretens von Kernreaktionen mit einbeziehen.

Wir nehmen wieder an, daß sich der einfallende Teilchenstrom durch eine ebene Welle beschreiben läßt, die als Überlagerung von Kugelwellen mit verschiedenen Bahndrehimpulsquantenzahlen des einfallenden Teilchens gegenüber dem Targetkern dargestellt wird [vgl. (36.3)]:

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{1}{2ikr} \left(e^{ikr} - (-1)^l e^{-ikr}\right) P_{l\,(\cos\theta)}\,.$$

Dabei ist r der Abstand des einlaufenden Teilchens a vom Targetkern A, θ der Winkel zwischen der Einfallsrichtung und dem Vektor des Aufpunktes im Relativsystem, $k = \frac{1}{\lambda\!\!\!^{-}} = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2\mu E}$ das Reziproke der reduzierten Wellenlänge des einfallenden Teilchens im Relativsystem.

Durch Streuung bzw. Reaktionen werden die *aus*laufenden Kugelwellen verändert, so daß in Analogie zu (36.4) die ψ-Funktion des Gesamtsystems dargestellt werden kann als

$$\psi_{(r,\theta)} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{1}{2ikr} \left[\eta_l e^{ikr} - (-1)^l e^{-ikr}\right] P_{l\,(\cos\theta)}\,.$$

Dabei sind die η_l die im allgemeinen komplexen und von k (d.h. der Einfallsenergie) abhängigen „Streuphasen“.

Wird wieder der für $r \to \infty$ gültige, asymptotische Ansatz gemacht [vgl. (36.1)]

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 \quad \text{proportional} \quad e^{ikz} + f_{(\theta)} \frac{e^{ikr}}{r},$$

dann ergibt sich

$$f_{(\theta)} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2ik} (\eta_l - 1) P_{l\,(\cos\theta)}.$$

Zur Berechnung der Wirkungsquerschnitte wird zweckmäßig der Gesamtwirkungsquerschnitt σ_{tot} in eine Summe aus Wirkungsquerschnitt σ_{str} für elastische Streuung und Wirkungsquerschnitt σ_R für Kernreaktionen (inelastische Streuung eingeschlossen) zerlegt:

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{str}} + \sigma_R = \sigma_{\text{str}} + \sum_n \sigma_{R\,n}.$$

Dabei ist mit σ_{Rn} der Wirkungsquerschnitt für die Reaktion in den n-ten Ausgangskanal bezeichnet.

Nach der Definition des Wirkungsquerschnitts (4.3) kann man abgekürzt schreiben

$$\sigma = \frac{N}{j}, \tag{40.1}$$

wenn mit N die Zahl der Prozesse pro sec und Kern und mit j der einfallende Teilchenstrom bezeichnet wird (beachte: Zähler und Nenner sind proportional zur Zahl der einfallenden Teilchen, so daß diese Größe herausfällt). Der Strom freier Teilchen ist in der Quantenmechanik definiert durch *

$$\vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \operatorname{grad} \psi - \psi \operatorname{grad} \psi^*), \tag{40.2}$$

---

* Herleitung: Die klassische Kontinuitätsgleichung lautet

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \vec{j}$$

(ρ = Teilchendichte). Quantenmechanisch ist $\rho = |\psi|^2$. Mit der SCHRÖDINGER-Gleichung für freie Teilchen

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi|^2 = \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi = \frac{i\hbar}{2m} \operatorname{div}(\psi^* \operatorname{grad} \psi - \psi \operatorname{grad} \psi^*).$$

Diese Form legt es nahe, den Teilchenstrom durch

$$\vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \operatorname{grad} \psi - \psi \operatorname{grad} \psi^*)$$

zu definieren.

woraus man für den einfallenden Teilchenstrom unseres Problems berechnet

$$j = -\frac{i\hbar}{2m}\left(e^{-ikz}\, ik\, e^{ikz} - e^{ikz}(-ik)\, e^{-ikz}\right) = \frac{\hbar k}{m} = \frac{mv}{m} = v.$$

Diese Gleichung stimmt dimensionsmäßig nicht, da bei der einfallenden Welle e^{ikz} der Normierungsfaktor $V^{-\frac{1}{2}}$ (V= Volumen, das 1 Teilchen enthält) weggelassen wurde. Streng ist $j = v/V$. Der Volumenfaktor tritt jedoch auch in ψ und ψ_1 auf und fällt im Wirkungsquerschnitt heraus, so daß er nicht mitgeführt zu werden braucht. v ist die Relativgeschwindigkeit des einfallenden Teilchens gegen das Stoßzentrum.

Zur Berechnung der Wirkungsquerschnitte für Streuung und Reaktionen müssen N_{str} und N_R bestimmt werden. Dazu wird das Reaktionsgebiet in eine Kugelschale mit dem Radius r_0 eingeschlossen. Die Anzahl der gestreuten Teilchen pro Zeiteinheit berechnet sich dann als Integral über den Strom der auslaufenden Teilchen durch die Kugeloberfläche. Mit

$$(j_{\text{str}})_{r_0} = -\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi_1^* \operatorname{grad}\psi_1 - \psi_1 \operatorname{grad}\psi_1^*\right)$$

$$= -\frac{i\hbar}{2m}\left[f^*_{(\theta)}\frac{e^{-ikr_0}}{r_0} f_{(\theta)}\left(ik\frac{e^{ikr_0}}{r_0} - \frac{1}{r_0}\frac{e^{ikr_0}}{r_0}\right) - \right.$$

$$\left. - f_{(\theta)}\, e^{ikr_0} f^*_{(\theta)}\left(-ik\frac{e^{-ikr_0}}{r_0} - \frac{1}{r_0}\frac{e^{-ikr_0}}{r_0}\right)\right],$$

$$(j_{\text{str}})_{r_0} = \frac{\hbar k}{m r_0^2}\,|f_{(\theta)}|^2 = \frac{v}{r_0^2}\,|f_{(\theta)}|^2$$

folgt

$$N_{\text{str}} = \int\limits_{\substack{\text{Kugel-}\\\text{oberfläche}}} j_{\text{str}}\, r_0^2\, d\Omega = v\int |f_{(\theta)}|^2\, d\Omega.$$

Damit ergibt sich der differentielle Wirkungsquerschnitt zu

$$\boxed{\frac{d\sigma_{\text{str}}}{d\Omega} = |f_{(\theta)}|^2 = \left|\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{2k}(\eta_l - 1)\, P_{l\,(\cos\theta)}\right|^2.} \qquad (40.3)$$

Wegen

$$\int\limits_{\substack{\text{Kugel-}\\\text{oberfläche}}} P_{l\,(\cos\theta)}\, P_{l'\,(\cos\theta)}\, d\Omega = \frac{4\pi}{2l+1}\,\delta_{l,l'}$$

und damit

$$N_{\text{str}} = v\frac{\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,|1-\eta_l|^2$$

folgt der integrale Streuquerschnitt zu

$$\boxed{\sigma_{\text{str}} = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\,|1-\eta_l|^2 = \pi \lambda\!\!\!^{-2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\,|1-\eta_l|^2.} \tag{40.4}$$

Mit der Definition

$$\sigma_{l,\,\text{str}} = \pi \lambda\!\!\!^{-2} (2l+1)\,|1-\eta_l|^2 \tag{40.5}$$

läßt sich (40.4) auch schreiben

$$\sigma_{\text{str}} = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_{l,\,\text{str}}\,.$$

Wieder addieren sich beim integralen Wirkungsquerschnitt die Beiträge der Partialwellen für verschiedene l, während beim differentiellen Wirkungsquerschnitt Interferenzglieder zwischen den verschiedenen Partialwellen auftreten.

Die Anzahl N_R der Teilchen, die eine Kernreaktion auslösen, erhält man als Zahl der Teilchen, die in die Kugel eindringen aber nicht wieder herauskommen. Der Strom ist jetzt mit der gesamten ψ-Funktion zu berechnen:

$$N_R = \int\limits_{\substack{\text{Kugel-}\\\text{oberfläche}}} \frac{i\hbar}{2m} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial r} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial r}\right)_{r=r_0} r_0^2\, d\Omega$$

(das Minuszeichen wurde weggelassen, weil der Fluß nach innen weisen soll). Ausrechnung ergibt

$$N_R = v\,\frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\,(1-|\eta_l|^2)$$

und damit

$$\boxed{\sigma_R = \pi \lambda\!\!\!^{-2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\,(1-|\eta_l|^2).} \tag{40.6}$$

Mit der Definition

$$\sigma_{l,R} = \pi \lambda\!\!\!^{-2} (2l+1)\,(1-|\eta_l|^2) \tag{40.7}$$

kann man (40.6) auch darstellen als

$$\sigma_R = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_{l,R}\,.$$

Diskussion:

a) Da stets das Absolutquadrat $|\eta_l|^2 > 0$ sein muß, ist der maximal mögliche Reaktionsquerschnitt ($\eta_l = 0$):

$$(\sigma_{l,R})_{\max} = \pi \lambda\!\!\!^{-2} (2l+1)\,.$$

Dieser Wirkungsquerschnitt kann erheblich größer werden als die geometrische Fläche, die der Kern dem einlaufenden Teilchen bietet. Dies gilt insbesondere für große $\lambda\!\!\!^{-}$, also für kleine Einfallsenergien im Relativsystem.

b) Da $\sigma_{l,R}$ nicht negativ werden kann (sonst würden mehr Teilchen reagieren als eingelaufen sind), muß

$$|\eta_l|^2 \leqq 1$$

sein. Daraus folgt für das Maximum des Streuquerschnitts ($\eta_l = -1$)

$$(\sigma_{l,\,\mathrm{str}})_{\max} = 4\pi\,\lambda\!\!\!^{-}{}^2\,(2l+1)\,.$$

Der maximal mögliche Streuquerschnitt ist also viermal so groß wie der maximal mögliche Reaktionsquerschnitt. Je größer l, desto größer der maximal mögliche Streuquerschnitt.

c) Wenn der Streuquerschnitt seinen maximal möglichen Wert annimmt, also bei $\eta_l = -1$, ist $\sigma_{l,R} = 0$. Wenn $\sigma_{l,R}$ seinen Maximalwert erreicht, also $\eta_l = 0$ ist, hat aber der Streuquerschnitt den endlichen Wert $\pi\,\lambda\!\!\!^{-}{}^2(2l+1)$; Streu- und Reaktionsquerschnitt sind dann beide gleich groß.

Der Streuquerschnitt ist nur null für $\eta_l = +1$, dann gibt es aber auch keine Reaktionen. Es gibt keinen Fall, in dem eine Reaktion ohne Streuung auftritt.

d) Wir betrachten noch den Grenzfall hoher Einfallsenergien, d.h. $\lambda\!\!\!^{-} \ll R$ (R = Kernradius). Unter der Annahme, daß sich der Kern wie ein „schwarzer Körper" benimmt, also alle auf ihn fallenden Teilchen absorbiert, reagieren genau alle diejenigen einfallenden Teilchen, deren relativer Bahndrehimpuls in bezug auf den Kern kleiner ist als $\mu R v$, also

$$l \lesssim \frac{\mu R v}{\hbar} = \frac{p}{\hbar} R = \frac{R}{\lambda\!\!\!^{-}}\,.$$

Es ist dann $\eta_l = 0$ für $l < \frac{R}{\lambda\!\!\!^{-}}$, $\eta_l = 1$ für $l \geqq \frac{R}{\lambda\!\!\!^{-}}$. Damit folgt

$$\left.\begin{aligned} \sigma_R &= \sum_{l=0}^{R/\lambda\!\!\!^{-}} (2l+1)\,\pi\,\lambda\!\!\!^{-}{}^2 = \pi R^2, \\ \sigma_{\mathrm{str}} &= \sum_{l=0}^{R/\lambda\!\!\!^{-}} (2l+1)\,\pi\,\lambda\!\!\!^{-}{}^2 = \pi R^2, \\ \text{also}\qquad \sigma_{\mathrm{tot}} &= \sigma_R + \sigma_{\mathrm{str}} = 2\pi R^2. \end{aligned}\right\} \qquad (40.8)$$

Dies liefert eine Methode zur Bestimmung des Kernradius aus der Schwächung des (hochenergetischen) Primärstrahls. Allerdings ist die Beobachtung schwierig, weil die Streuwinkel zum Teil recht klein sind (für

große l ist Vorwärtsstreuung bevorzugt) und die endliche Detektorgröße also die Messung verfälschen kann. Außerdem ist keineswegs sicher, daß die Annahme des „schwarzen" Kerns berechtigt ist (vgl. §43).

Das zunächst um den Faktor 2 falsch aussehende Ergebnis (40.8) ist in geeignet gelagerten Fällen experimentell bestätigt worden. Als physikalische Deutung wird die Beugung der einfallenden Wellen in die „Schattenzone" hinter dem Streuzentrum angeführt *.

Bisher ist es gelungen, die Wirkungsquerschnitte durch die Streuphasen η_l auszudrücken. Es ist die Aufgabe des nächsten Paragraphen, diese — jedenfalls für den bei niedrigen Einfallsenergien besonders interessanten Fall $l=0$ — über das Compoundkernmodell auf die Kerneigenschaften zurückzuführen. Dazu stellen wir noch einmal die Ergebnisse für den Fall $l=0$ zusammen:

$$\psi_{0\,(r,\theta)}=\frac{1}{2ikr}\left(\eta_0 e^{ikr}-e^{-ikr}\right), \tag{40.9}$$

(ψ_0 ist unabhängig von θ; e^{ikr} beschreibt eine auslaufende, e^{-ikr} eine einlaufende Kugelwelle),

$$\sigma_{0,\,\mathrm{str}}=\pi\,\bar{\lambda}^2\,|1-\eta_0|^2, \tag{40.10}$$

$$\sigma_{0,\,R}=\pi\,\bar{\lambda}^2\left(1-|\eta_0|^2\right). \tag{40.11}$$

§ 41. Spezialfall $l=0$ für Neutronen im Compoundkernmodell

Die am einfachsten zu behandelnden Reaktionen sind solche, die von Neutronen ausgelöst werden, weil dann die COULOMB-Wechselwirkung wegfällt. Wenn die Neutronen zusätzlich eine geringe kinetische Energie im Relativsystem haben, können sie nur mit einem Bahndrehimpuls $l=0$ in bezug auf den Targetkern reagieren. Dies kann man mit einem halbklassischen Argument folgendermaßen begründen: Bei einem Stoßparameter q hat das Neutron nach §4 den Bahndrehimpuls

$$|\vec{l}|=\mu v q=\hbar\sqrt{l(l+1)}$$

relativ zum Targetkern. Damit das Neutron überhaupt in den Bereich der Kernkräfte kommt, muß $q\leqq R$ sein (der Wirkungsradius der Kernkräfte ist hier gleich dem Kernradius R gesetzt). Mit

$$(KE)_{\mathrm{Relativsystem}}=\tfrac{1}{2}\mu v^2,$$

$$\mu\approx\frac{A}{A+1}\,m_n,$$

* Diskussion s. BLATT-WEISSKOPF, Theoretical Nuclear Physics, John Wiley, 1952.

sowie (13.2) folgt

$$(KE)_{\text{Relativsystem}} = \frac{1}{2\mu}(\mu v)^2 \leqq \frac{1}{2\mu c^2}\frac{(\hbar c)^2}{R^2}\, l(l+1)$$

$$\approx 14\,\text{MeV}\,\frac{A+1}{A}\,\frac{l(l+1)}{A^{\frac{2}{3}}} \approx l(l+1)\times\begin{cases} 2\ \text{MeV für } A=20 \\ 0{,}4\,\text{MeV für } A=100. \end{cases}$$

Schon für Reaktionen mit $l=1$ muß die Neutronenenergie mindestens von der Größenordnung MeV sein. Für geringere Einfallsenergien kommen nur s-Wellen in Betracht; dann verschwindet auch der Zentrifugalterm in der SCHRÖDINGER-Gleichung.

Als einfache Modellvorstellung für die Rechnungen wollen wir annehmen, daß der beschossene Kern ein kugelförmiges Gebilde mit scharfem Rand bei $r=R$ sei und daß die Wellenfunktion des Neutrons im Inneren des gebildeten Compoundkerns nur vom Abstand r vom Kernmittelpunkt abhängt. Obwohl dieses Bild viel zu grob ist, beschreibt es doch die wesentlichen Abhängigkeiten richtig. Die Spins der an der Reaktion beteiligten Teilchen seien zunächst außer acht gelassen.

Die Funktion (40.9) im Außenraum

$$\psi_a = \frac{1}{2ikr}\left(\eta_0 e^{ikr} - e^{-ikr}\right) = \frac{u_a}{r} \quad \text{für} \quad r \geqq R$$

muß an der Stelle $r=R$ an die ψ-Funktion im Innenraum

$$\psi_i = \frac{u_i}{r} \quad \text{für} \quad r<R$$

angeschlossen werden, d.h.

$$u_i = u_a \quad \text{und} \quad \frac{du_i}{dr} = \frac{du_a}{dr} \quad \text{für} \quad r=R.$$

Nun wird eine dimensionslose Größe f definiert durch

$$f = \lim_{r\to R}\left(\frac{R}{u}\frac{du}{dr}\right). \tag{41.1}$$

f muß bei Berechnung mit u_i denselben Wert ergeben wie bei Berechnung mit u_a. Zunächst findet man durch Einsetzen von u_a einen Zusammenhang zwischen f und η_0:

$$f = ikR\,\frac{\eta_0 e^{ikR} + e^{-ikR}}{\eta_0 e^{ikR} - e^{-ikR}}, \tag{41.2}$$

aufgelöst nach η_0:

$$\eta_0 = \frac{f+ikR}{f-ikR}\,e^{-2ikR}. \tag{41.3}$$

Das Auffinden der Streuphase η_0 ist damit zurückgeführt auf die Bestimmung von f aus den Eigenschaften der ψ-Funktion im Kerninnern. Ehe wir darauf eingehen, wollen wir die Wirkungsquerschnitte durch f darstellen. f ist im allgemeinen komplex; sei

$$f = k R(g + i h). \tag{41.4}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
|1-\eta_0|^2 &= \left| \frac{f(1-e^{-2ikR}) - i k R(1+e^{-2ikR})}{f - i k R} \right|^2 \\
&= \left| e^{-ikR} \frac{2 i f \sin k R - 2 i k R \cos k R}{f - i k R} \right|^2 \\
&= 4 \left| \frac{(g+ih)\sin k R - \cos k R}{g + i(h-1)} \right|^2 \\
&= 4 \left[\sin^2 k R + 2 \sin k R \frac{(h-1)\sin k R + g \cos k R}{g^2 + (h-1)^2} + \frac{1}{g^2+(h-1)^2} \right],
\end{aligned}$$

ferner

$$1 - |\eta_0|^2 = 1 - \frac{g^2 + (h+1)^2}{g^2 + (h-1)^2} = \frac{-4h}{g^2+(h-1)^2}.$$

Nach (40.10) und (40.11) berechnen sich damit die Wirkungsquerschnitte zu

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{0,\,\mathrm{str}} = 4\pi \lambda\!\!\!^{-2} \Bigg[\underbrace{\sin^2 k R}_{\text{„Potential-streuung"}} + \underbrace{2 \sin k R \frac{(h-1)\sin k R - g \cos k R}{g^2 + (h-1)^2}}_{\text{Interferenzglied}} + \\
+ \underbrace{\frac{1}{g^2+(h-1)^2}}_{\text{„Resonanzstreuung"}} \Bigg]
\end{aligned}\right\} \tag{41.5}$$

$$\sigma_{0,R} = 4\pi \lambda\!\!\!^{-2} \frac{-h}{g^2 + (h-1)^2}. \tag{41.6}$$

Man erkennt sofort, daß $h \leqq 0$ sein muß, sonst wäre der Reaktionsquerschnitt negativ. $h=0$ (reelles f) bedeutet, daß überhaupt keine Reaktionen stattfinden; falls Reaktionen auftreten, muß f komplex sein.

Wenn die Wellenfunktion bei $r=R$ verschwindet, also wenn $u_{(R)}=0$ ist, wird $f=\infty$; dann liefert nur der erste Term in $\sigma_{0,\,\mathrm{str}}$ einen Beitrag. Dieser Fall entspricht der Streuung an einer harten Kugel, für die das Potential in der SCHRÖDINGER-Gleichung für $r \leqq R$ unendlich ist (steile Wand bei $r=R$, die einlaufende Welle kann nicht eindringen).

Für kleine kR und kleine f/kR kann man die beiden ersten Terme in $\sigma_{0,\,\mathrm{str}}$ gegen den letzten vernachlässigen. Der letzte Term hat Resonanzcharakter mit einem steilen Maximum bei minimalem $|f|$ (die Resonanzstelle ist bei $f=0$). Auch der Reaktionsquerschnitt hat an der gleichen Stelle ein Resonanzmaximum. Beide Wirkungsquerschnitte bleiben in der Resonanz endlich.

Mit $f=0$ folgt aus (41.1), daß an der Resonanzstelle die ψ-Funktion für $r=R$ gerade eine waagerechte Tangente hat. Dann muß die Amplitude der Wellenfunktion im Kerninnern genau so groß sein wie im Außenraum, die Welle dringt in voller Stärke in den Kern ein. Die Bildung eines Compoundzustandes ist dann besonders wahrscheinlich.

Um die auftretenden Möglichkeiten im einzelnen diskutieren zu können, muß man die Größe f aus dem Verhalten der ψ-Funktion innerhalb des Compoundkerns zu gewinnen versuchen. Wenn man annimmt, daß die Wellenfunktion nur von r abhängt, kann man an den anschaulichen Ansatz einer Summe ein- und auslaufender Kugelwellen denken:

$$\psi_i = A\frac{e^{iKr}}{r} + B\frac{e^{-iKr}}{r} \qquad (A \text{ und } B \text{ komplex}). \tag{41.7}$$

Die Größe K hängt mit dem Kernpotential zusammen; für ein einfaches Kastenpotential ist etwa $K=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2\mu(V_0+E)}$.

Wir betrachten folgende Fälle:

1. Verhalten des Streuquerschnitts bei kleinen Einfallsenergien:

Falls die Größen $|g|$ und $|h|$ hinreichend groß sind, also falls f stark von Null verschieden ist, befindet man sich außerhalb der Resonanzen. Dann kann man die beiden letzten Terme in (41.5) vernachlässigen und erhält mit $k=1/\lambda\!\!\!^{-}$

$$\sigma_{0,\,\mathrm{str}} \to 4\pi R^2 \quad \text{für} \quad kR \ll 1. \tag{41.8}$$

$kR \ll 1$ bedeutet $E \ll 14\,\frac{A+1}{A^{\frac{5}{3}}}$ MeV. Außerhalb der Resonanzen und für kleine Einfallsenergien ist der Streuquerschnitt energieunabhängig und gleich dem vierfachen des geometrischen Querschnitts des Targetkerns (eigentlich: des Compoundkerns).

2. Verhalten des Reaktionsquerschnitts bei kleinen Einfallsenergien:

Wenn keine Resonanzen auftreten, darf man annehmen, daß sich die Größe

$$f = iKR\,\frac{Ae^{iKR} - Be^{-iKR}}{Ae^{iKR} + Be^{-iKR}}$$

nicht sehr mit $k=\frac{1}{\lambda\!\!\!{}^-}=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2\mu E}$ ändert. Dann sind g und h nach (41.4) proportional zu $\lambda\!\!\!{}^-$. Aus (41.6) ergibt sich für $kRh\gg 1$

$$\sigma_{0,R}\sim\lambda\!\!\!{}^-\sim\frac{1}{\sqrt{E}}\sim\frac{1}{v}, \qquad (41.9)$$

der Wirkungsquerschnitt sollte also proportional zu $1/v$ sein. Experimentell kann dies bei manchen Kernen über viele eV verfolgt werden; dies rechtfertigt die Annahme, daß f außerhalb der Resonanzen energieunabhängig

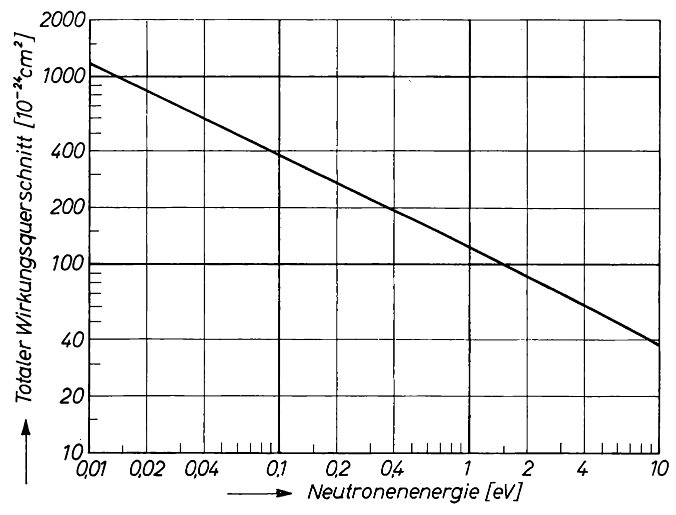


Fig. 41.1. Totaler Wirkungsquerschnitt von Bor für langsame Neutronen. Der Verlauf ist im ganzen Energiebereich proportional zu $1/v$. Werte aus: HUGHES und SCHWARTZ, Neutron Cross Sections, Report BNL 325, 1958

ist. Das Gesetz (41.9) wurde bereits in §18 anschaulich begründet. Ein Beispiel für reines $1/v$-Verhalten des Reaktionsquerschnitts gibt die Reaktion $B^{10}(n,\alpha)\,Li^7$ (s. Fig. 41.1); das Bor wird gern als Neutronenfänger verwendet.

3. Kontinuumstheorie.

Wenn man annimmt, daß jedes auf den Kern fallende Neutron dort absorbiert wird (völlig „schwarzer" Kern), wird (41.7) keine auslaufende Welle enthalten, also $A=0$ sein. Physikalisch ist dies nur dann eine einigermaßen sinnvolle Annahme, wenn die Einfallsenergie so hoch ist, daß die Reaktion nicht wieder in den Eingangskanal zurückführt, da so viele Ausgangskanäle zur Verfügung stehen.

Nach (41.1) wird mit (41.7) und $A=0$

$$f=-iKR, \quad \text{d.h.} \quad g=0, \quad h=-\frac{K}{k}.$$

Mit (41.5) und (41.6) ergeben sich folgende Ausdrücke für die Wirkungsquerschnitte:

$$\frac{1}{4\pi \lambda\!\!\!^{-2}}\sigma_{0,\,\text{str}}=\sin^2 kR-2\sin kR\frac{\left(\frac{K}{k}+1\right)\sin kR}{\left(\frac{K}{k}+1\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{K}{k}+1\right)^2}$$

$$=\frac{K-k}{K+k}\sin^2 kR+\frac{k^2}{(K+k)^2},$$

$$\frac{1}{4\pi \lambda\!\!\!^{-2}}\sigma_{0,R}=\frac{kK}{(K+k)^2}.$$

Diese Vorhersagen stimmen mit den experimentellen Befunden nur schlecht überein, so daß die Voraussetzungen der Kontinuumstheorie offenbar den Gegebenheiten nicht gerecht werden. Eine bessere Beschreibung der Phänomene bei hohen Einfallsenergien wird durch das „optische Modell" gegeben (s. §43), bei dem angenommen wird, daß der Kern nicht völlig „schwarz" ist.

4. Resonanzstreuung.

Ein auffallendes Teilchen werde nicht absorbiert, sondern nur gestreut. Das könnte z.B. bei so niedrigen Energien zutreffen, daß kein anderer Ausgangskanal als der Eingangskanal vorhanden ist (bei Teilchenreaktionen wenn überhaupt, dann nur näherungsweise erfüllt, da der Teilcheneinfang konkurriert). Dann ist in (41.7) $|A|=|B|$, allerdings brauchen ein- und auslaufende Welle nicht in Phase zu sein. Man setzt an

$$A=-Be^{2i\zeta};$$

ζ hängt dabei noch von der Einfallsenergie ab und ist zunächst unbekannt. Damit wird aus (41.7)

$$\psi_i=-\frac{B}{r}e^{i\zeta}(e^{iKr+i\zeta}-e^{-iKr-i\zeta})=C\frac{\sin(Kr+\zeta)}{r}.$$

Mit (41.1) ergibt sich ein reeller Wert für f:

$$f=KR\,\text{cotg}(KR+\zeta); \quad \text{d.h.} \quad g=\frac{K}{k}\text{cotg}(KR+\zeta), \quad h=0.$$

Die Wirkungsquerschnitte folgen nach (41.5) und (41.6) zu

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{4\pi\lambda\!\!\!^{-2}}\,\sigma_{0,\,\mathrm{str}}&=\sin^2 kR-2\sin kR\,\frac{\sin kR-\dfrac{K}{k}\operatorname{cotg}(KR+\zeta)}{\dfrac{K^2}{k^2}\operatorname{cotg}^2(KR+\zeta)+1}+\\&\qquad+\frac{1}{\dfrac{K^2}{k^2}\operatorname{cotg}^2(KR+\zeta)+1},\\\sigma_{0,\,R}&=0\,.\end{aligned}\right\}\qquad(41.10)$$

Diskussion:

a) Der Reaktionsquerschnitt verschwindet, wie ja mit $|A|=|B|$ bereits angesetzt wurde.

b) Der Streuquerschnitt für kleine Einfallsenergien ($k\to 0$) läßt sich approximieren durch

$$\sigma_{0,\,\mathrm{str}}\to 4\pi R^2\left(1-\frac{\operatorname{tg}(KR+\zeta)}{KR}\right)^2 \qquad (41.11)$$

[vgl. (36.10), dort war $\zeta=0$]. (41.11) ist eine bessere Näherung als (41.8).

c) Wenn der Nenner in (41.10) klein wird, treten Resonanzen auf. Dies ist zu erwarten für $f=0$, d.h.

$$\operatorname{cotg}(KR+\zeta)=0;\quad KR+\zeta=\frac{\pi}{2}(2n+1),\qquad n=0,1,2\ldots.$$

Wenn die Energieabhängigkeit von ζ bekannt wäre, was leider für wirkliche Kerne nicht der Fall ist, könnte man aus dieser Gleichung die Energieniveaus berechnen. Rückwärts kann man aus den gemessenen Energiestufen auf die Größe ζ schließen.

Mit $f=0$ folgt aus (41.10)

$$\sigma_{0,\,\mathrm{str}}=4\pi\lambda\!\!\!^{-2}(\sin^2 kR-2\sin^2 kR+1)=4\pi\lambda\!\!\!^{-2}(1-\sin^2 kR)\,.$$

Für $k\to 0$ strebt $\sigma_{0,\,\mathrm{str}}$ gegen $4\pi(\lambda\!\!\!^{-2}-R^2)\approx 4\pi\lambda\!\!\!^{-2}$. In der Resonanz erreicht dann $\sigma_{0,\,\mathrm{str}}$ seinen nach §40 maximal möglichen Wert.

d) Weit weg von den Resonanzen ist f und daher $\operatorname{cotg}(KR+\zeta)$ groß. Dann wird

$$\sigma_{0,\,\mathrm{str}}\to 4\pi\lambda\!\!\!^{-2}\sin^2 kR\,,$$

der Wirkungsquerschnitt hat die Form, die man bei Streuung an einer harten Kugel berechnen würde. Für kleine Einfallsenergien erhält man mit $\sin^2 kR\approx(kR)^2$ wieder den Ausdruck (41.8).

e) Verhalten in der Nähe der Resonanzen: Man kann f um die Resonanzstelle, die bei der Energie $E=E_R$ liegen möge, entwickeln:

$$f=f_{E=E_R}+\left(\frac{\partial f}{\partial E}\right)_{E=E_R}(E-E_R)+\cdots.$$

Nach Voraussetzung ist $f_{E=E_R}=0$. Es ist zweckmäßig, statt $\left(\frac{\partial f}{\partial E}\right)_{E=E_R}$ eine Größe Γ einzuführen durch die Definition

$$\left(\frac{\partial f}{\partial E}\right)_{E=E_R}=-\frac{2kR}{\Gamma}. \tag{41.12}$$

Dann ergibt sich angenähert (die höheren Entwicklungsglieder werden vernachlässigt):

$$f=-\frac{2kR}{\Gamma}(E-E_R); \quad \text{also} \quad g=-\frac{2}{\Gamma}(E-E_R), \quad h=0.$$

Damit wird der Term der Resonanzstreuung in (41.5) zu

$$(\sigma_{0,\,\mathrm{str}})_{\mathrm{Res}}=4\pi\,\lambda\!\!\!^{-2}\frac{\Gamma^2/4}{(E-E_R)^2+\frac{\Gamma^2}{4}}. \tag{41.13}$$

Der Wirkungsquerschnitt hat die Form einer Resonanzlinie mit der Halbwertsbreite Γ, wie man durch Einsetzen von $E-E_R=\Gamma/2$ sieht. Die Linienform $1/(1+x^2)$ (LORENTZ-Form; $x=2[E-E_R]/\Gamma$) ist für das Resonanzspektrum einer gedämpften Schwingung charakteristisch und wird z.B. auch bei den Spektrallinien der Atome beobachtet. Wie dort, so kann man auch hier einen Zusammenhang mit der Lebensdauer erwarten [s.u. (41.23)].

Statt durch die Unbekannte f wird der Wirkungsquerschnitt jetzt durch die meßbare Größe Γ ausgedrückt.

Der Interferenzterm in (41.5) erhält mit $x=\frac{2}{\Gamma}(E-E_R)$ die Form

$$(\sigma_{0,\,\mathrm{str}})_{\mathrm{Interferenz}}=4\pi\,\lambda\!\!\!^{-2}\cdot(-2)\sin^2 kR\,\frac{1-x\,\mathrm{cotg}\,kR}{x^2+1}. \tag{41.14}$$

Er liefert einen negativen Beitrag für $E<E_R+\frac{\Gamma}{2}\cdot\mathrm{tg}\,kR$ („links" vom Maximum) und einen positiven Beitrag für $E>E_R+\frac{\Gamma}{2}\mathrm{tg}\,kR$ („rechts" außerhalb des Maximums). Resonanzterm und Interferenzterm überlagern sich, der Streuquerschnitt hängt dann in der in Fig. 41.2 dargestellten Weise von der Einfallsenergie ab.

5. Resonanzstreuung mit Reaktionen.

Während $A=0$ in (41.7) zur Kontinuumstheorie führte und $|A|=|B|$ reine Streuung ergab, untersuchen wir jetzt den Fall

$$0<|A|<|B|.$$

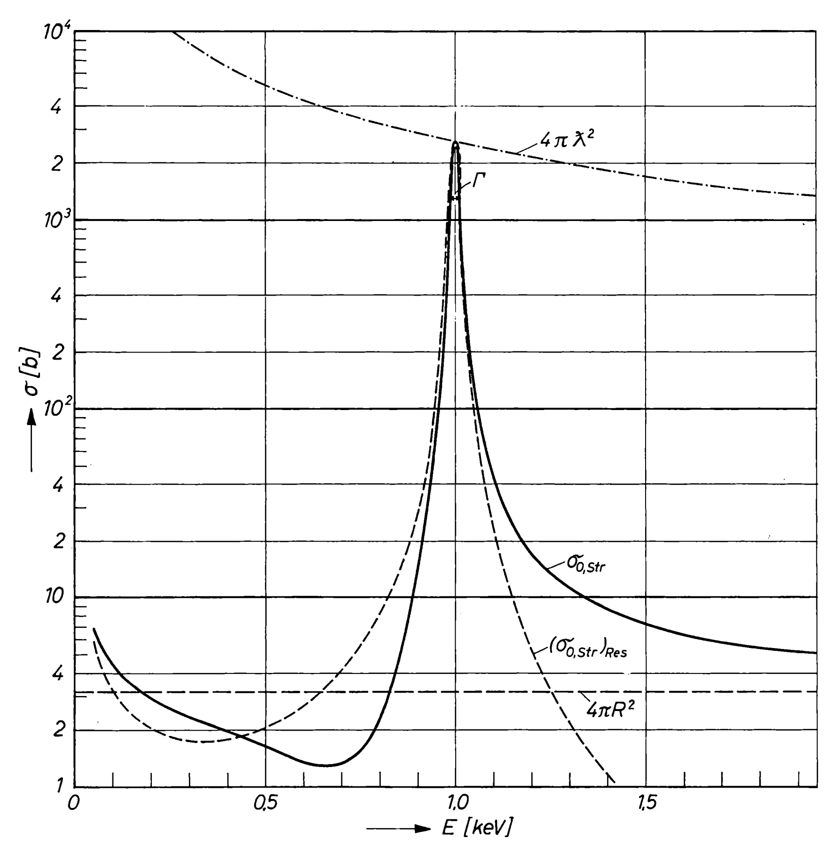


Fig. 41.2. Wirkungsquerschnitt für Resonanzstreuung. Gestrichelte Kurve ohne, ausgezogene Kurve mit Interferenzterm. Die gezeichnete einzelne Resonanz hat die Parameter $E_R = 1$ keV, $\Gamma = 0{,}02$ keV, Kernradius $R = 5 \cdot 10^{-13}$ cm. Der Übersichtlichkeit halber ist die Ordinate logarithmisch unterteilt

Die Intensität der auslaufenden Welle sei also schwächer als die der einlaufenden Welle. Man erwartet, daß dann ein Teil der eingelaufenen Intensität durch Reaktionen in andere Kanäle abgezweigt wird. Der Ansatz

$$A=-B\,e^{2i\zeta}\,e^{-2q}, \qquad q>0$$

führt auf die Wellenfunktion im Innenraum

$$\psi_i = -\frac{B}{r}(e^{2i\zeta}e^{-2q}e^{iKr} - e^{-iKr})$$
$$= -\frac{B}{r}e^{i\zeta}e^{-q}2i\sin(Kr+\zeta+iq).$$

Durch Einsetzen in (41.1) erhält man

$$f = KR\,\mathrm{cotg}(KR+\zeta+iq).$$

f hängt nunmehr von den beiden Variablen ζ und q ab, die ihrerseits Funktionen der Einfallsenergie sind.

Wir diskutieren den Fall $q \ll 1$ (geringe Reaktionswahrscheinlichkeit). Dann ist angenähert

$$f \approx KR\frac{\mathrm{cotg}(KR+\zeta)-iq}{1+iq\,\mathrm{cotg}(KR+\zeta)}$$
$$= KR\frac{(1-q)^2\,\mathrm{cotg}(KR+\zeta)-iq[1+\mathrm{cotg}^2(KR+\zeta)]}{1+q^2\,\mathrm{cotg}^2(KR+\zeta)}.$$

In nullter Näherung (d.h. für $q=0$) ergibt sich wieder der f-Wert für reine Streuung (Fall 4 oben) mit Resonanzen im Wirkungsquerschnitt an den Stellen

$$\mathrm{cotg}(KR+\zeta)=0.$$

In erster Näherung ($q \ll 1$) entwickelt man die Größe f nahe der Resonanzstelle:

$$f = f_{E=E_R} + \left(\frac{\partial f}{\partial E}\right)_{E_R,\,q=0}(E-E_R) + \left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)_{E_R,\,q=0} q,$$

wobei wieder $f_{E=E_R}=0$ ist. Der letzte Term ist angenähert gleich $(-iKR\,q)$. Wir definieren zwei reelle Größen Γ_{str} und Γ_R durch

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial f}{\partial E}\right)_{E_R,\,q=0} &= -\frac{2kR}{\Gamma_{\mathrm{str}}}\\ q &= \frac{k}{K}\frac{\Gamma_R}{\Gamma_{\mathrm{str}}},\end{aligned}\right\} \tag{41.15}$$

damit wird

$$f = -\frac{2kR}{\Gamma_{\mathrm{str}}}(E-E_R) - ikR\frac{\Gamma_R}{\Gamma_{\mathrm{str}}}, \tag{41.16}$$

also

$$g = -\frac{2}{\Gamma_{\mathrm{str}}}(E-E_R); \qquad h = -\frac{\Gamma_R}{\Gamma_{\mathrm{str}}}.$$

Aus (41.5) und (41.6) folgt mit $\Gamma_{tot} = \Gamma_{str} + \Gamma_R$

$$(\sigma_{0,\,str})_{Res} = 4\pi \lambda\!\!\!^{-2} \left(\frac{\Gamma_{str}}{\Gamma_{tot}}\right)^2 \frac{1}{\left[\frac{2}{\Gamma_{tot}}(E-E_R)\right]^2 + 1}, \tag{41.17}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{0,R} &= 4\pi \lambda\!\!\!^{-2} \frac{\Gamma_R \Gamma_{str}}{\Gamma_{tot}^2} \frac{1}{\left[\frac{2}{\Gamma_{tot}}(E-E_R)\right]^2 + 1} \\ &= \frac{\Gamma_R}{\Gamma_{str}} (\sigma_{0,\,str})_{Res}. \end{aligned}\right\} \tag{41.18}$$

Die Breite der Resonanzlinie sowohl bei $(\sigma_{0,\,str})_{Res}$ als bei $\sigma_{0,R}$ ist jetzt die „totale Linienbreite" Γ_{tot}. Die Höhe der Maxima der Wirkungsquerschnitte an der Stelle $E = E_R$ ist

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_{0,\,str})_{Res,\,max} &= 4\pi \lambda\!\!\!^{-2} \left(\frac{\Gamma_{str}}{\Gamma_{tot}}\right)^2 \\ (\sigma_{0,R})_{max} &= 4\pi \lambda\!\!\!^{-2} \frac{\Gamma_R \Gamma_{str}}{\Gamma_{tot}^2}. \end{aligned}\right\} \tag{41.19}$$

Diskussion:

a) Die Resonanzenergien E_R entsprechen angeregten Zuständen des Compoundkerns; die Größen Γ beziehen sich auf diese Zustände. Wie die Γ aus einem Kernmodell berechnet werden können, wird in §44 dargelegt.

Als Resonanzniveaus kommen bei einer bestimmten Reaktion nur solche angeregten Zustände des Compoundkerns in Frage, die auf Grund der Erhaltungssätze (Drehimpuls, Parität usw.) erreicht werden können.

b) Die Größe der Wirkungsquerschnitte im Resonanzmaximum nimmt mit zunehmender Einfallsenergie ab ($\lambda\!\!\!^{-2} \sim 1/E$).

c) Der nach §40 mögliche maximale *Streu*querschnitt $4\pi \lambda\!\!\!^{-2}$ wird im Zentrum der Resonanz dann annähernd erreicht, wenn $\Gamma_R \ll \Gamma_{str}$, also $\Gamma_{str} \approx \Gamma_{tot}$ ist.

d) Wenn andererseits Streu- und Reaktionsbreite gleich sind, also $\Gamma_{str} = \Gamma_R = \frac{1}{2}\Gamma_{tot}$, dann ergibt sich $(\sigma_{0,R})_{max} = \pi \lambda\!\!\!^{-2}$. Das ist der in §40 aus allgemeinen Überlegungen abgeleitete Maximalwert des Reaktionsquerschnitts für $l=0$. Für Resonanzen mit $l \geqq 1$ sind die erreichbaren Maxima um den Faktor $(2l+1)$ höher (Begründung s. §40); das läßt sich zuweilen zur Bestimmung des l-Wertes der Reaktion ausnutzen.

e) Die Formeln (41.17) bis (41.19) müssen noch korrigiert werden, weil bei der Ableitung die Spins von Targetkern und einfallendem Teilchen fortgelassen wurden. Hat — unpolarisierten Einfallsstrahl und unpolarisiertes Target vorausgesetzt — das einfallende Teilchen den Spin I_a und der

Targetkern den Spin I_A, so ist die Gesamtzahl der möglichen Einstellungen der beiden Spins zueinander gleich $(2I_a+1)(2I_A+1)$. Die Spins setzen sich bei $l=0$ zu einem resultierenden Spin I_C des Compoundzustandes zusammen, der einen der Werte

$$I_a+I_A, \quad I_a+I_A-1, \dots, |I_a-I_A|$$

annehmen muß. Jede dieser Einstellungen ist $(2I_C+1)$-fach in der Quantenzahl m entartet. Somit führt der Bruchteil

$$g=\frac{2I_C+1}{(2I_a+1)(2I_A+1)} \tag{41.20}$$

der Zusammenstöße auf den Compoundzustand mit dem Spin I_C. g ist der in (41.17), (41.18) und (41.19) fehlende Spinfaktor.

f) Die korrigierten Formeln (41.17) bis (41.19) gelten nur für $l=0$ und in Resonanznähe; dort können die „Potentialstreuung" an der harten Kugel und der Interferenzterm vernachlässigt werden. Hat eine Reaktion mehrere Resonanzstellen, dann überlagern sich die zugehörigen Wirkungsquerschnitte additiv dem resonanzlosen Wirkungsquerschnitt (das ist bei Streuung dem Wirkungsquerschnitt für Potentialstreuung, bei Reaktionen dem $1/v$-Term). Interferenzen zwischen verschiedenen Resonanzen können nur auftreten, wenn diese den gleichen Spin und die gleiche Parität haben.

Wenn die Linienbreiten von derselben Größenordnung oder größer sind als der Energieabstand D zwischen den Resonanzen, laufen diese ineinander und „verschmieren" zu einem Kontinuum. Dies ist bei hohen Anregungsenergien der Fall. Die Gleichungen (41.17) und (41.18) verlieren dann ihre Gültigkeit; sie gelten nur für $\Gamma \ll D$.

g) Aus (41.17), (41.18) und (41.20) folgt für den totalen Wirkungsquerschnitt in der Nähe einer Resonanz

$$\sigma_{0,\,\mathrm{tot}}=\sigma_{0,\,\mathrm{str}}+\sigma_{0,\,R}=4\pi\lambda\!\!\!^{-2}\,\frac{\Gamma_{\mathrm{str}}}{\Gamma_{\mathrm{tot}}}\,\frac{1}{\left[\frac{2}{\Gamma_{\mathrm{tot}}}(E-E_R)\right]^2+1}\,g\,. \tag{41.21}$$

Damit wird

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{0,\,\mathrm{str}}&=\frac{\Gamma_{\mathrm{str}}}{\Gamma_{\mathrm{tot}}}\,\sigma_{0,\,\mathrm{tot}}\,,\\ \sigma_{0,\,R}&=\frac{\Gamma_R}{\Gamma_{\mathrm{tot}}}\,\sigma_{0,\,\mathrm{tot}}\,.\end{aligned}\right\} \tag{41.22}$$

σ_{tot} kann aufgefaßt werden als der Wirkungsquerschnitt für die *Bildung* des Compoundzustandes. Dann ist $\Gamma_{\mathrm{str}}/\Gamma_{\mathrm{tot}}$ die Wahrscheinlichkeit, daß der gebildete Zustand durch Streuung wieder „zerfällt", d.h. daß der Ausgangskanal gleich dem Eingangskanal ist, und $\Gamma_R/\Gamma_{\mathrm{tot}}$ die Wahrscheinlichkeit,

daß die Reaktion in einen vom Eingangskanal verschiedenen Ausgangskanal führt.

6. Linienbreite und Lebensdauer.

Die obigen Betrachtungen ergeben die Möglichkeit, die Wirkungsquerschnitte durch die Linienbreiten (statt durch die Streuphasen) auszudrücken. Diese hängen mit der Lebensdauer des angeregten Zustandes zusammen, wie im folgenden gezeigt werden soll.

Der Zustand werde zur Zeit $t=0$ gebildet, etwa durch Resonanzeinfang eines Neutrons. Wir betrachten ihn nach einer festen Zeit t. Seine Wellenfunktion wird innerhalb des Kerns bei $l=0$ näherungsweise durch (22.7) beschrieben werden können, also

$$\psi_i = A\,\frac{\sin K r}{r},$$

außerhalb des Kerns durch eine nur auslaufende Kugelwelle

$$\psi_a = C\,\frac{e^{ikr}}{r}.$$

Dabei hängen die Normierungskonstanten A bzw. C von der Zeit ab. Aus (41.1) folgt

$$f = KR\,\mathrm{cotg}\,KR = i\,k\,R.$$

Da k reell ist, muß K komplex sein. Sei nun W_R die Energie, für die die Bedingung $KR\,\mathrm{cotg}\,KR = ikR$ erfüllt ist, und sei angenommen, daß W_R nahe der Resonanzenergie E_R liegt. Dann folgt durch Entwicklung von f um die Stelle E_R:

$$f_{(W_R)} = f_{(E_R)} + \left(\frac{\partial f}{\partial E}\right)_{E_R} (W_R - E_R) = i\,k\,R.$$

Wieder ist $f_{(E_R)} = 0$; mit (41.12) ergibt sich

$$W_R = E_R - \frac{i\Gamma}{2}.$$

Der Zustand hat also eine „komplexe Energie“. Da seine Wellenfunktion den Zeitfaktor [vgl. (21.1)]

$$\psi \sim e^{-\frac{i}{\hbar} W_R t} = e^{-\frac{i}{\hbar} E_R t}\, e^{-\frac{\Gamma}{2\hbar} t}$$

enthält, hängt die Wahrscheinlichkeit, den Zustand vorzufinden von der Zeit ab wie

$$\psi\,\psi^* \sim e^{-\frac{\Gamma}{\hbar} t}.$$

Also „zerfällt" der Zustand mit der Zeit, seine Lebensdauer ist (im Mittel) $\tau=\hbar/\Gamma$. Somit sind Γ und τ durch die Beziehung

$$\boxed{\Gamma\tau=\hbar} \tag{41.23}$$

miteinander verknüpft [vgl. die HEISENBERGsche Unschärferelation in der Form $\Delta E\,\Delta t \geqq \hbar$; in (41.23) gilt das Gleichheitszeichen]. Zahlenwerte:

$$\Gamma=1\,\text{eV} \quad \rightarrow T=\tau\ln 2=4{,}6\cdot 10^{-16}\,\text{sec},$$

$$\Gamma=1\,\text{MeV} \rightarrow T=\tau\ln 2=4{,}6\cdot 10^{-22}\,\text{sec}.$$

Das zeitliche Verhalten der Wellenfunktion eines zerfallenden Zustandes wird in §48 genauer betrachtet.

Ein Compoundkern hat bei kleinen Anregungsenergien im allgemeinen Linienbreiten in der Größenordnung eV, während der Niveauabstand bis zu Anregungsenergien von einigen MeV noch von der Größenordnnung keV ist („diskrete" Niveaus). Bei höheren Anregungsenergien werden die Niveaus breiter und die Niveauabstände kleiner. Schließlich überlappen sich die Niveaus und bilden ein Kontinuum. Da für die Begriffsbildung des „Compoundzustandes" gefordert wurde, daß ein solcher Zustand mindestens 10^{-20} sec lang existiert, kann man nur Niveaus mit Linienbreiten bis zu einigen keV als Compoundniveaus ansprechen.

Nach einigen Anwendungsbeispielen in §42 und der Behandlung des „optischen Modells" in §43 werden wir in §44 die Linienbreiten mit den Kerneigenschaften in Verbindung bringen.

§ 42. BREIT-WIGNER-Formeln

a) Herleitung und Diskussion der Formeln

Die Gleichungen (41.17) bis (41.20) sind sicherlich gültig, wenn die einfallenden Teilchen langsame Neutronen sind ($E \lesssim 0{,}1$ MeV; $l=0$) und wenn die Niveauabstände des Compoundzustandes bei Anregungsenergien von etwa 8 MeV (beim Neutroneneinfang freiwerdende Energie) groß sind gegen die Linienbreiten. Als Ausgangskanäle stehen meist nur der Eingangskanal [Streuung des Neutrons, (n, n')-Prozeß] und der Neutroneneinfang [(n, γ)-Prozeß] zur Verfügung; dies gilt insbesondere für schwere Kerne, bei denen die Emission geladener Teilchen durch den COULOMB-Wall (s. §44) behindert wird. Beim (n, γ)-Prozeß zerfällt der – mindestens um die Bindungsenergie des letzten Neutrons im Compoundkern $(A+1)$ angeregte – Compoundzustand durch die Emission eines γ-Quants (oder mehrerer γ-Quanten in Kaskade) in seinen Grundzustand.

Das einfallende Neutron hat den Spin $I_a = \frac{1}{2}$ und die Parität $+$, daher können nur solche Compoundzustände erreicht werden, die den Spin $I_C = I_A \pm \frac{1}{2}$ und die gleiche Parität wie der Targetkern haben. (41.20) wird zu

$$g = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{1}{2I_A+1}\right) \quad \text{für} \quad I_C = I_A \pm \frac{1}{2}.$$

Insgesamt ergeben sich für die Wirkungsquerschnitte die folgenden, als BREIT-WIGNER-Formeln bekannten Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \sigma_{(n,n')} &= \pi \lambda\!\!\!^{-2} \frac{\Gamma_n^2}{(E-E_R)^2 + \frac{1}{4}\Gamma_{\text{tot}}^2} \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{1}{2I_A+1}\right) \\ \sigma_{(n,\gamma)} &= \pi \lambda\!\!\!^{-2} \frac{\Gamma_n \Gamma_\gamma}{(E-E_R)^2 + \frac{1}{4}\Gamma_{\text{tot}}^2} \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{1}{2I_A+1}\right) \\ \sigma_{\text{tot}} &= \pi \lambda\!\!\!^{-2} \frac{\Gamma_n \Gamma_{\text{tot}}}{(E-E_R)^2 + \frac{1}{4}\Gamma_{\text{tot}}^2} \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{1}{2I_A+1}\right). \end{aligned} \tag{42.1}$$

$\lambda\!\!\!^{-}$ und E sind Wellenlänge und kinetische Energie des einfallenden Neutrons im Relativsystem.

Während die Werte für die Einfangsbreite Γ_γ näherungsweise energieunabhängig sind, findet man für die Streubreite Γ_n Proportionalität zu $\sqrt{E}$ (Begründung s. § 44). Die Linienbreiten sind von Niveau zu Niveau im allgemeinen sehr verschieden. Während die Streuquerschnitte für leichte Kerne 10···1000mal größer sind als die Einfangsquerschnitte, überwiegt der Einfang bei schweren Kernen mehr und mehr.

Gemessen wird im allgemeinen der Wirkungsquerschnitt als Funktion der Neutronenenergie; aus den meist scharfen Resonanzen kann man auf die Eigenschaften der angeregten Zustände des Compoundzustandes wie Anregungsenergie, Spin, Parität und Linienbreite schließen.

Resonanzniveaus können der Messung entgehen, wenn der Neutronenstrahl nicht ganz monoenergetisch ist (die Energiebreite muß kleiner sein als Γ) oder wenn die Targetkerne starke thermische Bewegung ausführen [in der Herleitung von (42.1) sind die Targetkerne als ruhend angenommen]. Beide Effekte führen auf eine Verbreiterung der experimentellen Linien gegenüber der BREIT-WIGNER-Form. Dabei läßt sich die DOPPLER-Verbreiterung, die von der Bewegung der Targetkerne herrührt, oft nur schlecht herauskorrigieren.

Die DOPPLER-Verbreiterung kann man qualitativ wie folgt verstehen: Während bisher die Relativgeschwindigkeit vorm Stoß $\vec{v}$ gleich der Einfallsgeschwindigkeit des Neutrons war, ist sie bei Bewegung des Targetkerns mit der Geschwindigkeit $\vec{u}$ gleich $\vec{v} - \vec{u}$. Im allgemeinen wird $|\vec{u}| \ll |\vec{v}|$ sein, dann ist die kinetische Energie im Relativsystem angenähert gleich

$$E = \frac{1}{2}\mu(\vec{v}-\vec{u})^2 \approx \frac{1}{2}\mu v^2\left(1 - 2\frac{(\vec{u}\,\vec{v})}{v^2}\right),$$

und ist — je nach dem Winkel zwischen $\vec{u}$ und $\vec{v}$ — entweder größer oder kleiner als $\frac{1}{2}\mu v^2$.

Die Geschwindigkeit $\vec{u}$ kommt durch die thermische Bewegung zustande. Bei Gasen hat sie im Mittel etwa die Größe $\sqrt{\frac{3kT}{M}}$ (aus der kinetischen Gastheorie). Für gegebene Einfallsenergie der Neutronen schwankt die Reaktionsenergie dann im Mittel um den Betrag

$$|\Delta E| = \frac{2E_0}{v}\sqrt{\frac{3kT}{M}}$$

um den Wert E_0, den man für $\vec{u}=0$ erhalten würde. Bei festen Targets ist die Verteilung von $\vec{u}$ und damit die Größe von ΔE wesentlich ungenauer bekannt, hängt aber ebenfalls von der Temperatur ab.

Die experimentelle Linie wird also gemäß der Targettemperatur verbreitert, so daß der Messung nur eine breitere und (wegen der Erhaltung von $\int \sigma\, dE$) niedrigere Linie zugänglich ist, aus der man die Breite Γ nicht mehr direkt entnehmen kann. Das gilt besonders für $|\Delta E| > \Gamma$ (hohe Temperaturen).

Eine Bestimmung der Linienbreiten mit guter Genauigkeit gelingt nur durch komplizierte Verfahren, die die Einflüsse von DOPPLER-Effekt und Energieunschärfe des Strahls zu eliminieren gestatten (s. Spezialliteratur). Aber das Verhältnis Γ_γ/Γ_n ist der Messung direkt zugänglich. Denn die Fläche unter der Resonanz, also $\int \sigma\, dE$, verändert sich durch die Verbreiterung nicht; sie liefert ein temperaturunabhängiges Resultat. In (42.1) kann man bei schmalen Linien die Größe $\lambda\!\!\!^{-2}$ als langsam veränderlich vor das Integral ziehen und erhält

$$\int_{\text{Resonanz}} \sigma_{(n,n')}\, dE = \frac{\pi^2 \lambda\!\!\!^{-2}}{2}\, g\, (\sigma_{(n,n')})_{\max} = \frac{\pi^2 \lambda\!\!\!^{-2}}{2}\, g \left(\frac{1}{1+\frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma_n}}\right)^2,$$

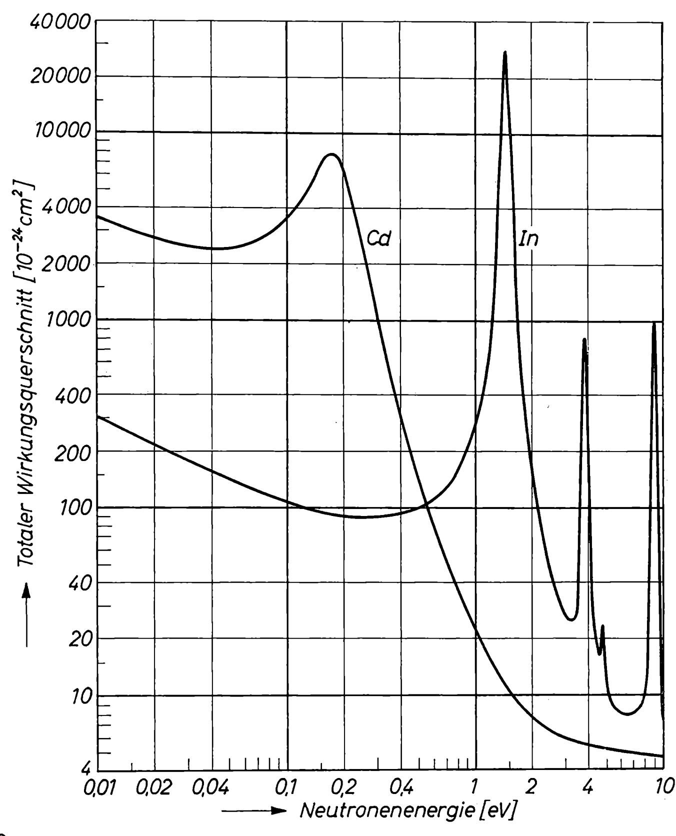
$$\int_{\text{Resonanz}} \sigma_{(n,\gamma)}\, dE = \frac{\pi^2 \lambda\!\!\!^{-2}}{2}\, g\, (\sigma_{(n,\gamma)})_{\max}$$

$$= \frac{\pi^2 \lambda\!\!\!^{-2}}{2}\, g\, \frac{1}{\frac{\Gamma_n}{\Gamma_\gamma}+2+\frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma_n}} = \frac{\pi^2 \lambda\!\!\!^{-2}}{2}\, g\, \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma_n}\left(\frac{1}{1+\frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma_n}}\right)^2.$$

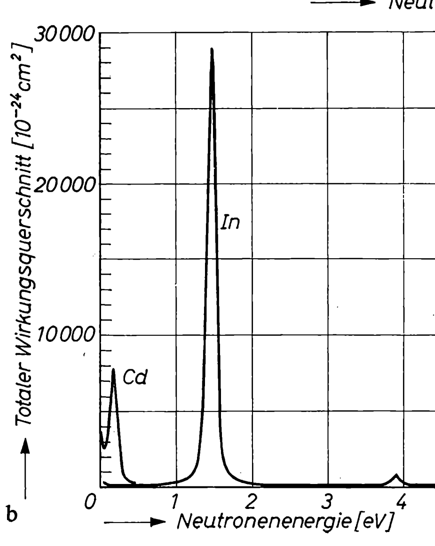
Aus der Fläche unter der Resonanzkurve kann man also bei bekanntem g auf das Verhältnis Γ_γ/Γ_n schließen; allerdings muß man (im Falle des integrierten Einfangsquerschnitts) zusätzlich wissen, ob $\Gamma_n > \Gamma_\gamma$ oder $\Gamma_\gamma > \Gamma_n$ ist.

Das experimentelle Material über die mit Neutronen von $E \lesssim 200$ keV untersuchten Resonanzen läßt sich ganz grob folgendermaßen gliedern (sehr leichte Kerne sind wegen ihres unregelmäßigen Verhaltens nicht aufgeführt):

	Leichte Kerne ($25 < A < 80$)	Schwere Kerne ($A > 80$)
Γ_γ	0,3 bis 10 eV	0,03 bis 0,3 eV
Γ_n	100 bis 20000 eV	0,001 bis 100 eV.



a



b

Fig. 42.1 a und b. Totaler Wirkungsquerschnitt von Cd und In für langsame Neutronen (linearer und logarithmischer Maßstab). Nach HUGHES und SCHWARTZ, Neutron Cross Sections, Report BNL 325, 1958.

Parameter der wichtigsten Resonanzen:

Cd^{113}: $E_R = 0{,}178$ eV, $\Gamma_\gamma = 0{,}113$ eV, $\Gamma_n = 0{,}00065$ eV

In^{115}: $E_R = 1{,}457$ eV, $\Gamma_\gamma = 0{,}072$ eV, $\Gamma_n = 0{,}0030$ eV

b) Beispiele

1. Neutroneneinfangsresonanz am In^{115} (s. Fig. 42.1).

Das Element Indium hat zwei stabile Isotope In^{113} und In^{115}, deren natürliches Isotopenhäufigkeitsverhältnis $In^{113}:In^{115}=4{,}2:95{,}8$ ist. Das In^{115} hat eine starke Neutroneneinfangswahrscheinlichkeit bei kleinen Neutronenenergien; fast der gesamte Wirkungsquerschnitt im thermischen Gebiet ist auf dieses Isotop zurückzuführen. Das Isotop In^{116} hat nämlich zufällig ein angeregtes Niveau mit für den Neutroneneinfang passenden Quantenzahlen bei einer Energie, die nur 1,457 eV oberhalb der Neutronenablöseenergie liegt. Das Isotop In^{113} erzeugt dagegen nur die verhältnismäßig kleine Resonanzspitze bei ca. 5 eV Neutronenenergie (s. Fig. 42.1). Das Energieschema für $A=116$, soweit es hier interessiert, ist in Fig. 42.2 dargestellt.

Beim Neutroneneinfang im In^{115} entsteht ein angeregter In^{116}-Kern, der durch Neutronenreemission (Resonanzstreuung) oder durch γ-Emission zerfällt. Beim γ-Zerfall, der über Zwischenzustände des In^{116} erfolgt, wird schließlich entweder der Grundzustand oder der erste angeregte Zustand des In^{116} erreicht. Der Grundzustand zerfällt mit einer Halbwertszeit von 13 sec in den Grundzustand des Sn^{116} (β^--Zerfall); der langlebige angeregte Zustand zerfällt wegen der großen Drehimpulsdifferenz zum Grundzustand (s. § 49) nicht durch γ-Emission, sondern durch β^--Emission mit einer Halbwertszeit von 54 min in angeregte Zustände des Sn^{116}.

Bei einer Neutronenenergie (im Relativsystem) von $E=1{,}457$ eV wurde eine Resonanz der Breite $\Gamma_{tot}=\Gamma_n+\Gamma_\gamma=0{,}075$ eV gefunden (in Fig. 42.1 erscheint sie breiter wegen des DOPPLER-Effektes); das experimentelle Verhältnis Γ_n/Γ_γ ist 1/24. Der Spin des Grundzustandes des In^{115} ist 9/2, also ist der Spin des Compoundzustandes entweder 4 oder 5. Die genaue Ausmessung der Resonanzparameter ergibt

$$(\sigma_{tot})_{E=E_R}=4\pi\frac{\hbar^2}{2\mu E}\frac{\Gamma_n}{\Gamma_{tot}}g=39400\,\mathrm{b},$$

daraus $g=11/2$, also $I_C=5$.

Der Beitrag dieser Resonanz zum Einfangsquerschnitt bei thermischen Energien ist beträchtlich: Bei $E=0{,}0253$ eV ist

$$\begin{aligned}(\sigma_{(n,\gamma)})_{\text{therm.}}&=(\sigma_{tot})_{\text{therm.}}\frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma_{tot}}\\&\approx(\sigma_{tot})_{E=E_R}\frac{E_R}{E_{th}}\frac{\Gamma_{n(E_{th})}}{\Gamma_{n(E_R)}}\frac{1}{\left[\frac{2}{\Gamma_{tot}}(E-E_R)\right]^2+1}.\end{aligned}$$

Da $\Gamma_{n(E_{\text{th}})}/\Gamma_{n(E_R)}$ näherungsweise gleich $\sqrt{E_{\text{th}}/E_R}$ ist [s. (44.9)], folgt

$$(\sigma_{(n,\gamma)})_{\text{therm.}} = 39400\,\text{b}\sqrt{\frac{1{,}457}{0{,}0253}}\;\frac{1}{\left(\frac{2{,}864}{0{,}075}\right)^2+1} = 192\,\text{b}\,.$$

Im natürlichen Isotopengemisch des Indium erwartet man davon 95,8%, also 184 b.

Aus der Messung der Targetaktivierung ergibt sich der Wirkungsquerschnitt für den Einfang von thermischen Neutronen am Indium zu

$\sigma_1 = (155 \pm 10)$ b für die Erzeugung der 54-min-Aktivität und
$\sigma_2 = (52 \pm 6)$ b für die Erzeugung der 13-sec-Aktivität,

insgesamt werden also etwa 207 b gemessen.

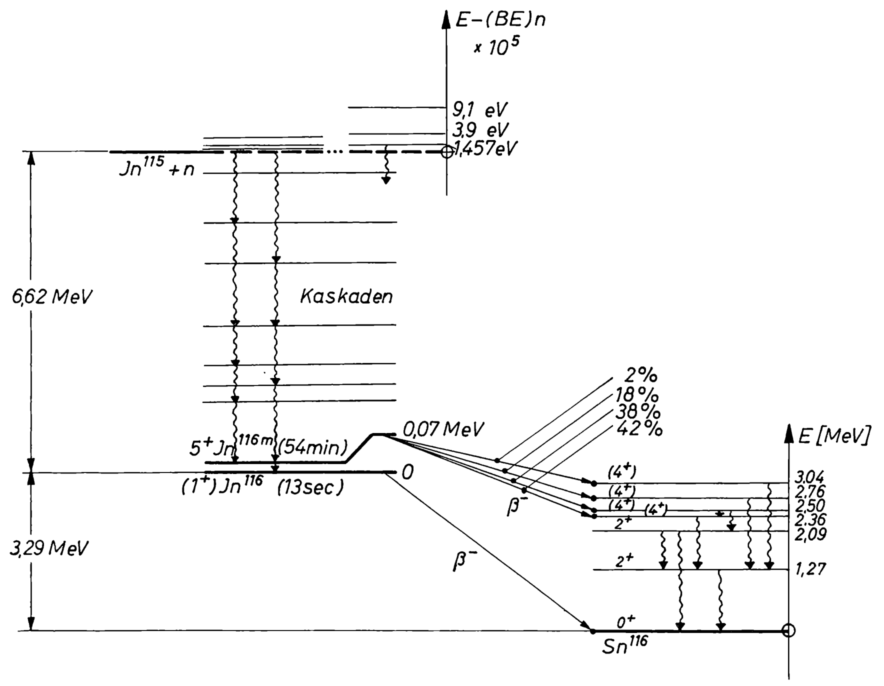


Fig. 42.2. Teil des Energiediagramms der Massenzahl 116

Der Vergleich zeigt, daß fast der gesamte Einfangsquerschnitt für thermische Neutronen auf die Resonanz bei 1,457 eV zurückgeführt werden kann. Der stets vorhandene $1/v$-Term im Einfangsquerschnitt spielt beim In^{115} nur eine kleine Rolle; sein Beitrag ist nur wenige b.

2. Neutroneneinfangsresonanz am Cd^{113} (s. Fig. 42.1).

Das Isotop Cd^{113} hat eine Resonanz nur wenig oberhalb thermischer Energien und ist daher gut geeignet als Absorber thermischer Neutronen. Da das Cd^{114} stabil ist, entstehen keine Radioaktivitäten, wohl aber natürlich die Einfang-γ-Strahlung.

Bei einem Wirkungsquerschnitt von etwa 3000 b für das natürliche Isotopengemisch des Cadmium ist die freie Weglänge thermischer Neutronen in dieser Substanz nur

$$\frac{1}{\Sigma_{\mathrm{abs}}/\rho}=\frac{\mathfrak{A}\, m_u}{\sigma}=0{,}062\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^2}\,.$$

Da die Dichte ρ des Cd 8,65 g/cm^3 ist, genügt ein Blech der Dicke 1 mm zur Absorption von 99,9% der Neutronen. Cadmium findet aus diesem Grunde Verwendung als Material für Regelstäbe von Reaktoren.

Da In^{115} seine Resonanz im Gebiet epithermischer Neutronenenergien hat (s. Fig. 42.1), kann man durch geeignete Kombination von Cd- und In-Folien und die Messung der In-Aktivität Pauschalaussagen über das Verhältnis von epithermischem zu thermischem Neutronenfluß am Bestrahlungsort gewinnen („Cd-Verhältnis").

3. Resonanz-Entkommwahrscheinlichkeit.

Die Neutronenresonanzen des Urans (s. Fig. 42.3) sind von Bedeutung im Zusammenhang mit der in § 18 definierten Resonanz-Entkommwahrscheinlichkeit p und damit für die Konstruktion von Uranreaktoren. Das Problem dabei ist, die geometrische Verteilung von Brennstoff und Moderator so zu wählen, daß bei gutem Wärmetransport aus dem Uran die Resonanz-Entkommwahrscheinlichkeit maximal wird.

Wir betrachten zunächst den homogenen Reaktor und zeigen dann qualitativ, daß eine heterogene Anordnung die Resonanz-Entkommwahrscheinlichkeit erhöhen kann.

Die Absorption sei schwach und beschränke sich auf einige schmale Resonanzen. Erreicht ein Neutron während der Bremsung die Energie

$$E_R-\Gamma_{\mathrm{tot}}\leqq\varepsilon\leqq E_R+\Gamma_{\mathrm{tot}}\,,$$

also den Bereich einer Resonanz, und stößt dann mit einem Kern des betreffenden Isotops, so kann es eingefangen werden.

Nach (17.4) ist die Zahl der Stöße eines Neutrons im Energiebereich $d\varepsilon$ gleich $\frac{d\varepsilon}{\xi\varepsilon}$. Bei jedem Stoß ist die Absorptionswahrscheinlichkeit gleich $\Sigma_{\mathrm{abs}}/(\Sigma_{\mathrm{str}}+\Sigma_{\mathrm{abs}})$. Also ist der Bruchteil dq/q der Neutronen, die im Energiebereich $d\varepsilon$ absorbiert werden,

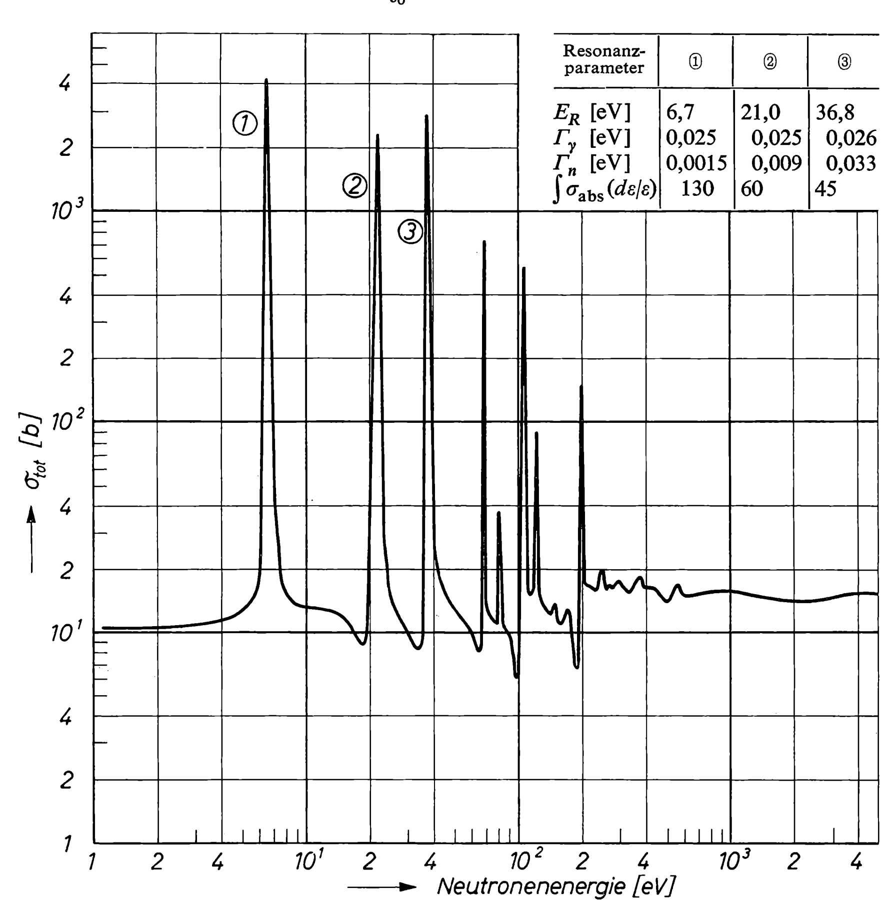
$$\frac{dq}{q}=\frac{\Sigma_{\mathrm{abs}}}{\Sigma_{\mathrm{str}}+\Sigma_{\mathrm{abs}}}\,\frac{d\varepsilon}{\xi\varepsilon}\,. \tag{42.2}$$

Die Definition der Resonanz-Entkommwahrscheinlichkeit ist nach §18

$$p = \frac{q_{\text{th}}}{Q},$$

wobei q_{th} die Zahl der pro cm^3 und sec thermisch werdenden Neutronen und Q die Erzeugungsrate von Neutronen der Energie ε_0 pro cm^3 und sec bedeutet. Durch Integration von (42.2) findet man

$$\ln \frac{q_{\text{th}}}{Q} = \int\limits_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_{\text{th}}} \frac{\Sigma_{\text{abs}}}{\Sigma_{\text{abs}} + \Sigma_{\text{str}}} \, \frac{d\varepsilon}{\xi \varepsilon},$$



Resonanz-parameter	①	②	③
E_R [eV]	6,7	21,0	36,8
Γ_γ [eV]	0,025	0,025	0,026
Γ_n [eV]	0,0015	0,009	0,033
$\int \sigma_{\text{abs}} (d\varepsilon/\varepsilon)$	130	60	45

Fig. 42.3. Resonanzen im totalen Wirkungsquerschnitt des U^{238}. Nach HUGHES und SCHWARTZ, Neutron Cross Sections, Report BNL 325, 1958

also

$$p = \exp\left[-\int\limits_{\varepsilon_{th}}^{\varepsilon_0} \frac{\Sigma_{abs\,(\varepsilon)}}{\Sigma_{abs\,(\varepsilon)} + \Sigma_{str\,(\varepsilon)}} \frac{d\varepsilon}{\xi\varepsilon}\right]. \tag{42.3}$$

ε_0 ist dabei so zu wählen, daß die Absorption für $\varepsilon > \varepsilon_0$ vernachlässigbar klein ist, daß ferner für $\varepsilon < \varepsilon_0$ praktisch keine primären Spaltneutronen mehr auftreten und daß schließlich inelastische Streuprozesse für $\varepsilon < \varepsilon_0$ außer acht gelassen werden können. Für Uran wählt man meist $\varepsilon_0 \approx 40$ keV.

Das Integral zerfällt in eine Summe über die einzelnen BREIT-WIGNER-Resonanzen, da $\Sigma_{abs\,(\varepsilon)}$ zwischen den Resonanzen vernachlässigbar klein ist; dazu kommt ein kontinuierlicher Beitrag für kleine ε (dort ist $\sigma \sim 1/v$).

Man kann (42.3) vereinfachen, wenn man annimmt, daß die Bremsung nur an den Moderatorkernen stattfindet (die Streuung an den schweren Brennstoffkernen bewirkt praktisch keine Bremsung), die Absorption dagegen nur im Brennstoff (Uran). Ist N_M die Zahl der Moderatorkerne pro cm^3, N_U die Zahl der Urankerne pro cm^3, dann ergibt sich

$$\Sigma_{str} \approx N_M (\sigma_{str})_M; \qquad \Sigma_{abs} \approx N_U (\sigma_{abs})_U; \qquad \xi \approx \xi_M$$

und damit

$$p = \exp\left[-\frac{N_U}{\xi N_M (\sigma_{str})_M} \int\limits_{\varepsilon_{th}}^{\varepsilon_0} \frac{(\sigma_{abs})_U}{1 + \frac{N_U}{N_M} \frac{(\sigma_{abs})_U}{(\sigma_{str})_M}} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}\right]. \tag{42.4}$$

Das Integral in (42.4) hat den Namen „effektives Resonanzintegral" und wird mit I_{eff} bezeichnet, also

$$p = \exp\left(-\frac{N_U}{N_M} \frac{I_{eff}}{\xi (\sigma_{str})_M}\right).$$

I_{eff} läßt sich für $N_U \ll N_M$ annähern durch

$$I_{eff} \approx \int\limits_{\varepsilon_{th}}^{\varepsilon_0} (\sigma_{abs})_U \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}. \tag{42.5}$$

Damit die Resonanz-Entkommwahrscheinlichkeit groß werden kann, möchte man ein möglichst kleines effektives Resonanzintegral haben.

Das Integral wird über $\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = d(\ln \varepsilon)$ erstreckt; zweckmäßig trägt man den Wirkungsquerschnitt über den Logarithmus der Energie auf (s. Fig. 42.3) und bestimmt die Fläche unter der Kurve. Für U^{238} folgt durch numerische

Auswertung von (42.5)

$$\int_{\varepsilon_{th}}^{\varepsilon_0} (\sigma_{abs})_{U^{238}} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \approx 280\,\mathrm{b}\,.$$

Aufschlüsselung:	Unter 0,4 eV ($1/v$-Einfang):	1,4 b
	Aufgelöste Resonanzen bis 300 eV:	270 b
	300 eV...30 keV:	7 b
	Oberhalb 30 keV:	1 b.

Das effektive Resonanzintegral ist etwas kleiner, je nach der Wahl des Verhältnisses N_U/N_M.

Für den in § 18 und § 19 diskutierten Fall der homogenen Mischung $U-D_2O$ bei $N_U/N_M = 1/334$ (optimale Mischung) ergibt sich mit $\xi = 0{,}725$, unter Benutzung der Näherung (42.5), die Resonanz-Entkommwahrscheinlichkeit zu

$$p \approx \exp\left(-\frac{280\,\mathrm{b}}{334 \cdot 0{,}725 \cdot 7\,\mathrm{b}}\right) = 0{,}85\,.$$

Der exakte Wert ist 0,910.

Wenn die Absorptionslinien des Urans durch DOPPLER-Effekt breiter und flacher werden, bleibt zwar $\int \sigma_{abs} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$ praktisch ungeändert, aber das gesamte Resonanzintegral wächst auf Grund des Einflusses des Nenners, so daß die Resonanz-Entkommwahrscheinlichkeit kleiner wird. p hat also einen negativen Temperaturkoeffizienten; je größer die Temperatur, desto breiter die Resonanzlinien und desto größer die Absorption. Diesen Effekt kann man zur Regelung des Reaktors benutzen: Ein zu heißer Reaktor drosselt sich automatisch.

Durch eine heterogene Anordnung des Urans im Reaktor kann die Resonanz-Entkommwahrscheinlichkeit wesentlich heraufgesetzt werden. Die zugrundeliegende Überlegung ist folgende: Die mittlere freie Weglänge von (schnellen) Neutronen im Uran, die genau die Resonanzenergie haben, ist so klein, daß solche Neutronen bereits in einer sehr dünnen äußeren Schicht eines Uranstabes eingefangen werden. Neutronen, die mit einer von der Resonanzenergie abweichenden Energie auf den Stab treffen, verlieren im Uran so wenig Energie, daß sie praktisch ohne Absorption den Stab wieder verlassen, um im Moderator weiter gebremst zu werden. An der parasitären Absorption ist daher nur ein Bruchteil der Uranatome beteiligt, während die gesamte Uranmenge bei Neutronen- und Wärmeerzeugung, die ja erst durch thermische Neutronen ausgelöst werden, mitwirkt.

Eine heterogene Anordung wirkt sich wie folgt aus:

1. Aufgrund der oben beschriebenen Flußdepression der Neutronen mit Resonanzenergie im Innern des Stabes wächst p bis zu 70% (!).

2. Einige Neutronen halten sich während der Abbremsung *nur* im Moderator auf, verpassen also die Resonanzen im Uran. Dadurch wächst p (um etwa 4%).

3. Die Zahl der im Uran eingefangenen thermischen Neutronen sinkt relativ zur homogenen Anordung, f wird also kleiner (etwa um 6%). Das ist ein Nachteil der heterogenen Anordung.

4. Die durch Spaltung entstehenden schnellen Neutronen erleiden ihre ersten Stöße bevorzugt im Uran. Bei Streuprozessen behalten sie ihre Energie. Bei Reaktionsprozessen können sie weitere Spaltungen (auch von U^{238}-Kernen!) auslösen. Damit wächst der Schnellspaltfaktor (Größenordnung 3%).

Durch heterogene Anordungen ist es möglich, auch bei einer Mischung von Natururan mit Graphit ein $k_\infty > 1$ zu erhalten (vgl. Tabellen 18.2 und 18.3). Zum Beispiel ergeben sich bei $N_C/N_U = 100$ in geeigneter Anordung des Urans in Stäben folgende Überschlagswerte:

$$
\begin{array}{lll}
f & = 0{,}90 & \text{(statt 0,96)} \\
p & = 0{,}88 & \text{(statt 0,50)} \\
\varepsilon & = 1{,}03 & \text{(statt 1,00)} \\
\eta & = 1{,}34 & \text{(unverändert)} \\
\hline
k_\infty & = 1{,}1 & \text{(statt 0,64)}.
\end{array}
$$

Industrielle Reaktoren werden daher meist als heterogene Reaktoren konstruiert. Sie arbeiten wirtschaftlicher, da die Isotopentrennungskosten des Urans und die Anreicherungskosten des schweren Wassers gespart werden und außerdem das Problem der Handhabung der entstehenden Spaltprodukte einfacher zu lösen ist als bei der homogenen Mischung.

§ 43. Gemittelter Wirkungsquerschnitt, Optisches Modell

Für Neutronenreaktionen lassen sich drei Bereiche der Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts unterscheiden:

1. Für kleine Einfallsenergien gilt das $1/v$-Gesetz.

2. Daran schließt sich das Resonanzgebiet an. Solange die Linienbreiten Γ kleiner sind als der mittlere Niveauabstand D, zeigen die Streu- und Reaktionsquerschnitte individuelle Resonanzen, variieren also stark mit der Einfallsenergie.

3. Bei höheren Energien werden die Resonanzen breit und liegen so dicht, daß sie sich gegenseitig überlappen. Bei Mittelung über die Resonanzen sollte man wieder eine langsam veränderliche Energieabhängigkeit der Wirkungsquerschnitte erhalten. Da die Kontinuumstheorie (s. § 41) der experimentellen Nachprüfung nicht befriedigend standhält, scheint die Annahme eines völlig absorbierenden Kerns den Tatsachen nicht gerecht zu werden. Man muß eine gewisse Transparenz des Kerns zulassen, also verlangen, daß das einfallende Teilchen im Kern eine endliche freie Weglänge hat.

Ein Ansatz, der dieses leistet, ist ein komplexes Kernpotential („optisches" Potential). Dabei entspricht der Realteil der Potentialstreuung [Streuung an einer harten Kugel, vgl. (41.5)] und der Imaginärteil den Prozessen Resonanzstreuung und Kernreaktionen. Auf ähnliche Weise beschreibt man in der Optik die Wechselwirkung von Licht mit Materie, daher der Name „optisches Potential".

a) Gemittelter Wirkungsquerschnitt

Es ist sinnvoll, für die kommenden Betrachtungen zunächst den totalen Wirkungsquerschnitt zu zerlegen in den Wirkungsquerschnitt für Potentialstreuung und den Wirkungsquerschnitt für Compoundkernbildung. Dazu gehen wir von (40.5) und (40.7) aus und mitteln über ein Energieintervall I, das klein gegen E sein soll, so daß langsam veränderliche Funktionen wie $\lambda\!\!\!^{-2}$ durch die Mittelung ihren Wert an der Stelle E nicht ändern. Die mittlere Streuphase ist dann gegeben durch

$$\overline{\eta_l} = \frac{1}{I} \int\limits_{E-\frac{I}{2}}^{E+\frac{I}{2}} \eta_{l\,(E')}\, dE';$$

damit folgen die Wirkungsquerschnitte zu

$$\overline{\sigma_{l,\,\mathrm{str}}} = \pi\, \lambda\!\!\!^{-2} (2l+1)\, \overline{|1-\eta_l|^2}\,, \tag{43.1}$$

$$\overline{\sigma_{l,\,R}} = \pi\, \lambda\!\!\!^{-2} (2l+1)(1-\overline{|\eta_l|^2})\,. \tag{43.2}$$

Der Ausdruck für $\overline{\sigma_{l,\,\mathrm{str}}}$ kann umgeformt werden:

$$\begin{aligned}\overline{\sigma_{l,\,\mathrm{str}}} &= \pi\, \lambda\!\!\!^{-2} (2l+1)\overline{(1-\eta_l-\eta_l^* + |\eta_l|^2)} \\ &= \pi\, \lambda\!\!\!^{-2} (2l+1)(1-\overline{\eta_l}-\overline{\eta_l^*} + \overline{|\eta_l|^2})\,.\end{aligned}$$

Wegen

$$|1-\overline{\eta_l}|^2 = 1-\overline{\eta_l}-\overline{\eta_l^*} + |\overline{\eta_l}|^2$$

ergibt sich

$$\overline{\sigma_{l,\,\mathrm{str}}} = \pi\, \lambda\!\!\!^{-2} (2l+1)(|1-\overline{\eta_l}|^2 - |\overline{\eta_l}|^2 + \overline{|\eta_l|^2})\,. \tag{43.3}$$

Dieser Ausdruck wird nun aufgeteilt in den Potentialstreu-Anteil

$$\overline{(\sigma_{l,\,\mathrm{str}})_{\mathrm{Pot}}} = \pi\, \lambda^2 (2l+1)\, |1-\overline{\eta_l}|^2 \tag{43.4}$$

und den Resonanzstreu-Anteil

$$\overline{(\sigma_{l,\,\mathrm{str}})_{\mathrm{Res}}} = \pi\, \lambda^2 (2l+1)(\overline{|\eta_l|^2} - |\overline{\eta_l}|^2)\,. \tag{43.5}$$

Der Resonanzstreu-Anteil wird zum Reaktionsquerschnitt addiert, so daß ein Wirkungsquerschnitt $\overline{\sigma_{l,C}}$ für die Compoundkernbildung entsteht:

$$\overline{\sigma_{l,C}} = \overline{\sigma_{l,R}} + \overline{(\sigma_{l,\,\mathrm{str}})_{\mathrm{Res}}} = \pi\, \lambda^2 (2l+1)(1-|\overline{\eta_l}|^2)\,. \tag{43.6}$$

Damit haben $\overline{(\sigma_{l,\mathrm{str}})_{\mathrm{Pot}}}$ und $\overline{\sigma_{l,C}}$ wieder die Form (40.5) bzw. (40.7) von Streu- und Reaktionsquerschnitten eines Problems, dessen Phase die langsam veränderliche Größe $\overline{\eta_l}$ ist.

Der gemittelte totale Wirkungsquerschnitt ergibt sich zu

$$\left.\begin{aligned} \overline{\sigma_{l,\,\mathrm{tot}}} &= \overline{\sigma_{l,\,\mathrm{str}}} + \overline{\sigma_{l,R}} = \pi\, \lambda^2 (2l+1)(2-\overline{\eta_l}-\overline{\eta_l^*}) \\ &= 2\pi\, \lambda^2 (2l+1)[1-\mathrm{Re}(\overline{\eta_l})]\,. \end{aligned}\right\} \tag{43.7}$$

Beispiel: Mittelung über eine BREIT-WIGNER-Resonanz.

Der Compoundkern habe Resonanzenergien bei E_R, die Niveaus mögen sich nicht überlappen. Für eine herausgegriffene Resonanz bestimmt man η_0 aus (41.3) und (41.16) zu

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \frac{-2kR\dfrac{E-E_R}{\Gamma_{\mathrm{str}}} + i\,kR\left(1-\dfrac{\Gamma_R}{\Gamma_{\mathrm{str}}}\right)}{-2kR\dfrac{E-E_R}{\Gamma_{\mathrm{str}}} - i\,kR\left(1+\dfrac{\Gamma_R}{\Gamma_{\mathrm{str}}}\right)}\, e^{-2ikR} \\ &= \left(1-\frac{i\,\Gamma_{\mathrm{str}}}{E-E_R+\dfrac{i}{2}\Gamma_{\mathrm{tot}}}\right) e^{-2ikR}. \end{aligned}$$

Weit weg von den Resonanzen ist $\eta_0 = e^{-2ikR}$, dieser Anteil entspricht der Potentialstreuung. Nahe der Resonanz folgen die BREIT-WIGNER-Formeln aus dem zweiten Glied.

Bei der Mittelung über die Energie wird zweckmäßigerweise das Mittelungsintervall gleich dem Niveauabstand D gewählt*. Wenn man k als langsam veränderlich mit der Energie betrachtet, wird

$$\overline{\eta_0} = \frac{1}{D}\int\limits_{E_R-\frac{D}{2}}^{E_R+\frac{D}{2}} \eta_{0\,(E')}\, dE' = \frac{1}{D}\, e^{-2ikR}\left[D - i\,\Gamma_{\mathrm{str}} \ln \frac{D+i\,\Gamma_{\mathrm{tot}}}{-D+i\,\Gamma_{\mathrm{tot}}}\right].$$

* Eine empirische Näherung für die Funktion $D_{(E)}$ wird in § 45 angegeben.

Für $\Gamma_{tot} \ll D$ ist mit $\ln(-1) = -i\pi$

$$\overline{\eta_0} = \left(1 - \frac{\pi \Gamma_{str}}{D}\right) e^{-2ikR}.$$

Für den Wirkungsquerschnitt der Compoundkernbildung ergibt sich durch Einsetzen in (43.6)

$$\boxed{\overline{\sigma_{0,C}} \approx 2\pi^2 \lambda\!\!\!^{-2} \frac{\Gamma_{str}}{D}.} \tag{43.8}$$

Wie zu erwarten war, hängt $\overline{\sigma_{0,C}}$ nur von Γ_{str} und D ab, nicht aber von der Zahl der zur Verfügung stehenden Ausgangskanäle. Die Bildung des Compoundzustandes ist unabhängig von seinen Zerfallsmöglichkeiten.

Die Größe Γ_{str}/D wird als „Stärkefunktion" („strength function") bezeichnet. Sie hängt von der Anregungsenergie und von der Quantenzahl l ab. Vgl. Fußnote bei Gleichung (43.12).

Den gemittelten Reaktionsquerschnitt sowie den gemittelten Resonanzstreuquerschnitt für $l=0$ erhält man mit (41.22) zu

$$\left.\begin{aligned} \overline{\sigma_{0,R}} &= \overline{\sigma_{0,C}} \frac{\Gamma_R}{\Gamma_{tot}}, \\ \overline{(\sigma_{0,str})_{Res}} &= \overline{\sigma_{0,C}} \frac{\Gamma_{str}}{\Gamma_{tot}}. \end{aligned}\right\} \tag{43.9}$$

b) Optisches Potential

Nun wenden wir uns der Berechnung der Wirkungsquerschnitte aus einem komplexen Potential zu. Der Einfachheit halber betrachten wir den Fall, daß Real- und Imaginärteil die gleiche Radialabhängigkeit haben, etwa

$$\left.\begin{aligned} V &= -V_0(1+i\xi) \quad \text{für} \quad r \leqq R, \\ V &= 0 \qquad\qquad\quad \text{für} \quad r > R. \end{aligned}\right\} \tag{43.10}$$

Für $V_0 = \text{const.}$ ist dies ein Kastenpotential; in dieser groben Näherung werden Spin- und Geschwindigkeitsabhängigkeiten im Potential vernachlässigt. Wie sich zeigen wird, liefert (43.10) schon eine befriedigende Einsicht in die Zusammenhänge. Verbesserte Ansätze werden später diskutiert. Für $\xi=0$ ist das Potential reell und beschreibt nur die Streuung (vgl. § 36). Im Falle $\xi \neq 0$ besteht die Möglichkeit der Absorption des einfallenden Teilchens und damit der Bildung eines Compoundkerns. Im allgemeinen wird ξ energieabhängig sein.

Die Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung im Außenraum liefert für $l=0$ nach (40.9) im Mittel über ein Energieintervall $I \ll E$ (wegen der langsamen

Veränderlichkeit von k mit E braucht über k nicht gemittelt zu werden)

$$\psi_{(r)}=\frac{1}{2ikr}(\overline{\eta_0}\, e^{ikr}-e^{-ikr}); \qquad k=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2\mu E} \quad \text{für} \quad r>R,$$

und im Innenraum beim Kastenpotential nach (22.7)

$$\psi_{(r)}=A\,\frac{\sin Kr}{r}; \qquad K=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2\mu[E+V_0(1+i\xi)]} \quad \text{für} \quad r\leqq R.$$

Für kleine Einfallsenergien ist $E\ll V_0$. Beschränkt man sich auf $\xi\ll 1$, dann kann man die Wurzel entwickeln und erhält

$$K\approx K_0\left(1+\frac{i}{2}\xi\right) \quad \text{mit} \quad K_0=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2\mu V_0}$$

und damit

$$|r\psi|^2=A^2\left[\sin^2 K_0 r+\sinh^2\left(\frac{\xi K_0 r}{2}\right)\right] \quad \text{für} \quad r\leqq R.$$

Eine charakteristische Strecke für das Anwachsen der Aufenthaltswahrscheinlichkeit zum Kernrand hin bzw. für das Absinken der Intensität der von außen kommenden Welle innerhalb des Kerns ist $2/\xi K_0$. Aus dem Vergleich von Theorie und Experiment (s. unten) kennt man die Größenordnung von ξ und V_0 ($\xi\approx 0{,}06$; $V_0\approx 50$ MeV). Damit ergibt sich die Eindringtiefe zu etwa

$$\frac{2}{\xi K_0}=\frac{2\hbar}{\xi\sqrt{2\mu V_0}}\approx 2\cdot 10^{-12}\,\text{cm},$$

diese ist also von derselben Größenordnung wie der Kerndurchmesser. Das einfallende Teilchen hat somit eine endliche Wahrscheinlichkeit, den Kern ohne Reaktion zu durchdringen. Da man aus dem Experiment weiß, daß der Kern für größere Einfallsenergien immer „schwärzer" wird, muß man annehmen, daß der Imaginärteil des Potentials mit der Einfallsenergie wächst.

Um den Wirkungsquerschnitt $\overline{\sigma_{0,C}}$ für Compoundkernbildung zu berechnen, der dem (nicht über die Energie gemittelten) Reaktionsquerschnitt des in § 41 behandelten Problems entspricht, benutzt man (41.1) und (41.6) und erhält

$$f=KR\operatorname{cotg} KR=K_0 R\left(1+\frac{i}{2}\xi\right)\operatorname{cotg} K_0 R\left(1+\frac{i}{2}\xi\right).$$

Daraus folgt mit (41.4):

$$g=\frac{K_0}{2k}\,\frac{\sin 2K_0 R+\frac{\xi}{2}\sinh(\xi K_0 R)}{\sin^2 K_0 R+\sinh^2\left(\frac{\xi}{2}K_0 R\right)}=\frac{K_0}{k}\operatorname{cotg}(K_0 R)\,(1+\alpha\xi+\cdots),$$

$$h=\frac{K_0}{2k}\frac{\frac{\xi}{2}\sin 2K_0 R-\sinh(\xi K_0 R)}{\sin^2 K_0 R+\sinh^2\left(\frac{\xi}{2}K_0 R\right)}=\frac{\xi K_0}{4k}\frac{\sin 2K_0 R-2K_0 R}{\sin^2 K_0 R}(1+\beta\xi+\cdots).$$

Der Wirkungsquerschnitt berechnet sich daraus nach (41.6) zu

$$\left.\begin{aligned}\overline{\sigma_{0,c}}&=4\pi\lambda\!\!\!^{-2}\frac{-h}{g^2+(h-1)^2}\\&=4\pi\lambda\!\!\!^{-2}\frac{\xi K_0}{4k}\frac{(2K_0R-\sin 2K_0R)(1+\beta\xi+\cdots)}{\left(\frac{K_0}{k}\right)^2\cos^2 K_0R+(1+\gamma\xi+\cdots)\sin^2 K_0R}\,.\end{aligned}\right\}\quad(43.11)$$

Mit $\xi\ll 1$ und $K_0\gg k$ folgt näherungsweise

$$\boxed{\overline{\sigma_{0,c}}\approx\frac{\pi\xi\lambda\!\!\!^{-}}{K_0}\frac{2K_0R-\sin 2K_0R}{\cos^2 K_0R}\,.}\quad(43.12)$$

Für kleine ξ ist $\overline{\sigma_{0,c}}$ proportional zu ξ, also ist ξ ein Maß für die Reaktionswahrscheinlichkeit. Der Ausdruck (43.12), multipliziert mit Γ_R/Γ_{tot}, tritt an die Stelle des Reaktionsquerschnitts der Kontinuumstheorie (s. §41) und wird dem Experiment wesentlich besser gerecht als dieser.

Vergleich von (43.12) und (43.8) liefert einen Modellwert für die Stärkefunktion für $l=0$:

$$\frac{\Gamma_{str}}{D}=\frac{\xi}{2\pi\lambda\!\!\!^{-}K_0}\frac{2K_0R-\sin 2K_0R}{\cos^2 K_0R}\,.$$

In dieser Näherung sollte Γ_{str}/D etwa proportional zur Wurzel aus der Energie E (d.h. der Anregungsenergie des Compoundkerns minus der Bindungsenergie des einfallenden Teilchens) wachsen.

Die Anpassung der Konstanten ξ und K_0 an die experimentell gemessenen Wirkungsquerschnitte wird erleichtert durch die Tatsache, daß (43.12) eine Abhängigkeit vom Kernradius und damit von der Nukleonenzahl A aufweist. Es ergeben sich Maxima im Wirkungsquerschnitt, wenn der Nenner von (43.11) Minima hat, also bei

$$K_0R=\frac{2n+1}{2}\pi\qquad(n=0,1,2\ldots)\,.$$

Mit $R=R_0A^{\frac{1}{3}}$ sollten besonders große Wirkungsquerschnitte bei Kernen mit

$$A=\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\frac{\hbar}{R_0\sqrt{2\mu V_0}}\right]^3$$

auftreten. Solche „Riesenresonanzen" werden experimentell bei Kernen mit $A \approx 15$, 55, 150 gefunden (s. Fig. 43.1); mit $R_0 = 1{,}2 \cdot 10^{-13}$ cm folgt daraus eine Potentialtopftiefe von $V_0 = 52$ MeV. Mit diesem Wert und

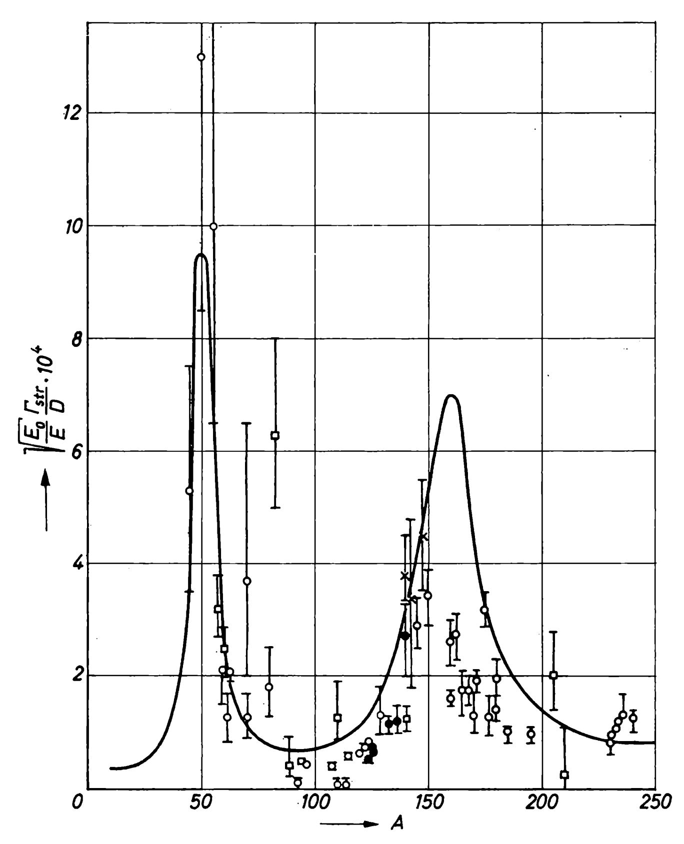


Fig. 43.1. Riesenresonanzen im gemittelten Wirkungsquerschnitt für Compoundkernbildung bei $l=0$ (aufgetragen ist die dazu proportionale reduzierte Stärkefunktion in Abhängigkeit von der Nukleonenzahl A; $E_0 = 1$ eV). Der ausgezogenen Kurve liegt das Kernpotential

$$V = -\frac{V_0(1+\zeta)}{1+\exp\left(\frac{r-C}{\gamma}\right)}$$

zugrunde [vgl. (34.18)] mit $V_0 = 52$ MeV, $\zeta = 0.06$, $C = (1{,}15\,A^{\frac{1}{3}} + 0{,}4) \cdot 10^{-13}$ cm, $\gamma = 0{,}57 \cdot 10^{-13}$ cm. Nach H. Feshbach, Ann. Rev. Nucl. Sci. **8**, 49 (1958)

$0{,}03 \lesssim \xi \lesssim 0{,}1$ können die experimentellen Wirkungsquerschnitte für alle Kerne befriedigend beschrieben werden. Die Irregularitäten bei $A \approx 150$ (die Riesenresonanz spaltet dort in zwei Komponenten auf) sind darauf

zurückzuführen, daß viele Kerne in diesem Bereich statisch verformt sind (s. Fig. 30.3).

Noch bessere Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment erzielt man durch Ersetzen des einfachen Kastenpotentials (43.10) durch einen realistischeren Ausdruck. Dabei hat sich gezeigt, daß es zweckmäßig ist, den Imaginärteil des Potentials räumlich auf die Umgebung des Kernrandes zu konzentrieren. Das bedeutet physikalisch, daß die Absorptionsmöglichkeit dort größer ist als im Kerninnern, wo nach dem Schalenmodell die fester gebundenen Nukleonen sitzen*.

Ein Ansatz, der auch die Spin-Bahn-Wechselwirkung (32.1) enthält und einen scharfen Kernrand vermeidet (vgl. § 34), ist

$$U_{(r)} = V_{(r)} - i\,W_0 \exp\left(-\frac{(r-R)^2}{b^2}\right) - \frac{\lambda}{c^2 M^2}\,\frac{1}{r}\,\frac{dV}{dr}\,(\vec{s}\,\vec{l}) \tag{43.13}$$

mit [vgl. (34.18)]

$$V_{(r)} = -\frac{V_0}{1+\exp\left(\frac{r-R}{a}\right)}$$

und

$$R = R_0\,A^{\frac{1}{3}}.$$

(Für geladene Teilchen kommt ein COULOMB-Term zum Potential hinzu.) Die Konstanten V_0, W_0, λ, a, b, R_0 können so angepaßt werden, daß eine

Tabelle 43.1. *Konstanten des optischen Potentials für Neutronenreaktionen* [nach GLASSGOLD, Rev. Mod. Phys. **30**, 419 (1958)]

E [MeV]	V_0 [MeV]	W_0 [MeV]	λ	a [10^{-13} cm]	b [10^{-13} cm]	R_0 [10^{-13} cm]
4,1	50	7	35	0,65	0,98	1,25
7	45,5	9,5	35	0,65	0,98	1,25
14	44	11	35	0,65	0,98	1,25

befriedigende Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment erzielt wird**. Die Energieabhängigkeit der Zahlenwerte ist in Tabelle 43.1 zusammengestellt.

Mit dem optischen Modell ist es gelungen, den Wirkungsquerschnitt für Compoundkernbildung in dem Energiebereich, in dem keine einzelnen Resonanzen mehr auftreten, aus einem Potential herzuleiten, dessen Form

* Diese können wegen des PAULI-Prinzips keine Stöße mit geringer Energieübertragung erleiden, da die erreichbaren Zustände bereits mit anderen Nukleonen besetzt sind.

** S. FERNBACH, Rev. Mod. Phys. **30**, 414 (1958); A. E. GLASSGOLD, Rev. Mod. Phys. **30**, 419 (1958).

für alle Kerne verbindlich ist. Dabei treten nur wenige Parameter auf, die aus dem Experiment angepaßt werden müssen.

Außer für die Berechnung der Wirkungsquerschnitte von Neutronenreaktionen bei Einfallsenergien von einigen MeV hat sich der Ansatz eines optischen Potentials auch für die Beschreibung von Reaktionen mit Protonen und schwereren Teilchen und in höheren Energiebereichen bewährt *. Die auftretenden Terme sind – abgesehen vom Imaginärteil – dieselben, die bereits zur Erklärung anderer Kerneigenschaften herangezogen wurden (vgl. Kapitel XI und XII).

§ 44. Abschätzung des Wirkungsquerschnitts aus dem Wechselwirkungsansatz. Das Reziprozitätstheorem

a) Wirkungsquerschnitt und Linienbreite

Um den Reaktionsquerschnitt für die Kernreaktion $A(a, b) B$ aus dem Wechselwirkungsproblem zu berechnen, gehen wir von Gleichung (40.1) aus und berücksichtigen, daß im Zähler das Produkt aus Zahl der einfallenden Teilchen und Reaktionswahrscheinlichkeit $w_{\text{Anf}\to\text{End}}$, im Nenner das Produkt aus Zahl der einfallenden Teilchen im Normierungsvolumen und Relativgeschwindigkeit v_{aA} steht. Die Zahl der einfallenden Teilchen kürzt sich heraus und es bleibt

$$\sigma = \frac{w_{\text{Anf}\to\text{End}}}{v_{aA}/V_a}. \tag{44.1}$$

Das Normierungsvolumen V_a kann gleich Eins gesetzt werden; dies ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, da es auch in $w_{\text{Anf}\to\text{End}}$ enthalten ist (s. unten) und sich heraushebt.

Nach der 2. Goldenen Regel (s. Anhang) läßt sich in der Näherung, daß die Wechselwirkung klein ist, die Übergangswahrscheinlichkeit vom Anfangszustand $(a+A)$ in den Endzustand $(B+b)$ darstellen als

$$w_{\text{Anf}\to\text{End}} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \int \psi^*_{\text{End}} H_{\text{Anf}\to\text{End}} \psi_{\text{Anf}} \, d\tau \right|^2 \frac{dn}{dE}, \tag{44.2}$$

wobei $H_{\text{Anf}\to\text{End}}$ der HAMILTON-Operator für die Wechselwirkung (meist zeitlich konstante Störung) ist. dn/dE bedeutet die Anzahl der Endzustände im Intervall der Gesamtenergie zwischen E und $E+dE$; bei Zustandsentartung ist jedes Subniveau einzeln zu zählen.

Wenn die Teilchen b und B nach der Reaktion als freie Teilchen existieren, ist die Anzahl der Zustände des Gesamtsystems im Orts- und Impulsraum

* Siehe P. B. JONES, The Optical Model in Nuclear and Particle Physics, Interscience Publishers, John Wiley and Sons, New York—London, 1963.

gleich der Anzahl der möglichen Zustände *eines* der Teilchen, z.B. des Teilchens b, da die Kinematik des anderen Teilchens durch Energie- und Impulssatz festliegt. Dann gilt nach (34.24) bei Integration über den gesamten Raumwinkel im Schwerpunktssystem

$$dn = \frac{4\pi p_b^2 V_b}{(2\pi\hbar)^3}\, d p_b .$$

Das Normierungsvolumen im Ortsraum V_b kann mit der gleichen Begründung wie V_a gleich Eins gesetzt werden.

Die verschiedenen Möglichkeiten der Spineinstellung liefern zusätzlich einen statistischen Faktor $(2I_b+1)(2I_B+1)$.

Beschreibt man die ψ-Funktionen und das Matrixelement des Überganges im Schwerpunktssystem, so ist es geboten, auch Energie und Impuls im Schwerpunktssystem zu betrachten. Die Erhaltungssätze liefern

$$E = E_b + E_B = \sqrt{p_b^2 c + M_b^2 c^4} + \sqrt{p_B^2 c^2 + M_B^2 c^4}$$

und

$$\vec{p}_b = -\vec{p}_B .$$

Damit wird

$$\frac{dE}{dp_b} = \frac{p_b c^2}{E_b} + \frac{c^2}{2E_B}\,\frac{d(p_B^2)}{dp_b} = c^2\, p_b \left(\frac{1}{E_b} + \frac{1}{E_B}\right) = v_b + v_B .$$

Da die Teilchen im Schwerpunktssystem diametral auseinander fliegen, ist $v_b + v_B$ gleich dem Betrag der Relativgeschwindigkeit v_{bB}. Damit folgen die Relationen

$$\frac{dn}{dE} = \frac{4\pi p_b^2}{(2\pi\hbar)^3}\,\frac{1}{v_{bB}}\,(2I_b+1)\,(2I_B+1)$$

und

$$\left.\begin{aligned} & w_{\mathrm{Anf}\to\mathrm{End}} = \\ & = \frac{2\pi}{\hbar}\,\left|\int \psi_{\mathrm{End}}^* H_{\mathrm{Anf}\to\mathrm{End}}\,\psi_{\mathrm{Anf}}\,d\tau\right|^2 \frac{4\pi p_b^2}{(2\pi\hbar)^3}\,\frac{1}{v_{bB}}\,(2I_b+1)\,(2I_B+1), \end{aligned}\right\} \quad (44.3)$$

$$\left.\begin{aligned} & \sigma_{\mathrm{Anf}\to\mathrm{End}} = \\ & = \frac{2\pi}{\hbar}\,\left|\int \psi_{\mathrm{End}}^* H_{\mathrm{Anf}\to\mathrm{End}}\,\psi_{\mathrm{Anf}}\,d\tau\right|^2 \frac{4\pi p_b^2}{(2\pi\hbar)^3}\,\frac{1}{v_{aA}\, v_{bB}}\,(2I_b+1)\,(2I_B+1). \end{aligned}\right\} \quad (44.4)$$

Damit die Normierungsvolumina V_a und V_b sich wirklich herausheben, müssen die Wellenfunktionen der Teilchen a und b, die in ψ_{Anf} bzw. ψ_{End} enthalten sind, in diesen Volumina auf Eins normiert werden.

Als Anwendung wollen wir aus (44.3) einen Ausdruck für die in den Breit-Wigner-Formeln vorkommende Linienbreite Γ_n herleiten. Dazu

betrachten wir die Zerfallsreaktion des Compoundzustandes

$$C \rightarrow B + n$$

und beachten, daß die Relativgeschwindigkeit zwischen Restkern B und Neutron gegeben ist durch

$$v_{bB} = \frac{M_B + m_n}{M_B} v_n ,$$

wenn v_n die Geschwindigkeit des Neutrons im Schwerpunktssystem ist. Da die Übergangswahrscheinlichkeit das Reziproke zur Lebensdauer ist (vgl. § 12), ergibt sich mit (41.23)

$$\Gamma_n = \frac{\hbar}{\tau} = \hbar\, w_{C \rightarrow B+n} , \tag{44.5}$$

daraus folgt mit $p_n = m_n v_n$ und $I_b = \frac{1}{2}$

$$\Gamma_n = \frac{2(2I_B + 1)}{\pi \hbar^3} \frac{m_n^2 M_B}{M_B + m_n} v_n \left| \int \psi_{B+n}^* H_{C \rightarrow B+n} \psi_C \, d\tau \right|^2 . \tag{44.6}$$

Γ_n wächst bei kleinen Neutronenenergien proportional zu $v_n \sim \sqrt{E_n}$ (da die Anregung des Compoundkerns im wesentlichen durch die Neutronenbindungsenergie verursacht wird, hängt das Matrixelement kaum von der Neutronenenergie ab). Dies wurde bereits in § 42 verwendet (s. In^{115}-Resonanz).

Ähnlich kann man die Linienbreite Γ_γ für Neutroneneinfang berechnen, allerdings muß man hierbei die Kopplung zwischen Kern und elektromagnetischem Feld berücksichtigen. Die Übergangswahrscheinlichkeit der Reaktion

$$C \rightarrow B + \gamma$$

wird in § 49 abgeleitet [s. etwa (49.24) bzw. (49.25)]; damit ist

$$\Gamma_\gamma = \hbar\, w_{C \rightarrow B+\gamma} .$$

Die Abhängigkeit der Einfangsbreite von der Anregungsenergie des Compoundkerns wird in § 49 abgeschätzt; eine Abhängigkeit von der Energie des einfallenden Neutrons ist nicht vorhanden, solange die Einfallsenergie klein ist gegen die Neutronenbindungsenergie.

Die Berechnung der Matrixelemente bereitet im allgemeinen Schwierigkeiten, weil man die ψ-Funktionen nicht kennt. Man benutzt daher die aus Messungen bestimmten Linienbreiten, um rückwärts Ansätze für die Kernwellenfunktionen zu kontrollieren.

b) Abschätzung der Wirkungsquerschnitte bei kleinen Einfallsenergien

Im folgenden wollen wir die in (44.3) und (44.4) auftretenden Matrixelemente der Form

$$\int \psi_{\text{End}}^{*} H_{\text{Anf}\to\text{End}} \psi_{\text{Anf}} \, d\tau$$

unter stark vereinfachenden Annahmen diskutieren. Sicher ist der Integrand des Matrixelementes nur in dem Bereich von Null verschieden, in dem sich ψ_{End} und ψ_{Anf} räumlich überlappen. Dies wird bei Kernkraft-Wechselwirkung im wesentlichen innerhalb des Kerns der Fall sein. Schließt man die elektromagnetische Wechselwirkung (d.h. γ-Zerfall, Kernphotoeffekt und Elektronenreaktionen) und die „schwache" Wechselwirkung (β-Zerfall) aus und nimmt man für die Wechselwirkungsenergie den einfachen Potentialtopf

$$U = -V_0 \quad \text{für} \quad r \leqq R$$
$$U = 0 \quad \text{für} \quad r > R$$

an, so ergibt sich für das Quadrat des Matrixelements

$$\left| \int \psi_{\text{End}}^{*} H_{\text{Anf}\to\text{End}} \psi_{\text{Anf}} \, d\tau \right|^2 \approx V_0^2 \left(\frac{4\pi}{3} R^3 \right)^2 \left| \overline{\psi_{\text{End}}^{*} \psi_{\text{Anf}}} \right|^2. \tag{44.7}$$

Dabei ist

$$\overline{\psi_{\text{End}}^{*} \psi_{\text{Anf}}} = \frac{\int \psi_{\text{End}}^{*} \psi_{\text{Anf}} \, d\tau}{\frac{4\pi}{3} R^3}$$

ein räumlicher Mittelwert über das Innere des Kerns. Die charakteristischen Erscheinungen, z.B. die Resonanzstruktur des Wirkungsquerschnitts, sind in diesem Wellenfunktionsprodukt enthalten.

Wir wollen uns hier hauptsächlich für die Ladungsabhängigkeit interessieren. Sind bei der Reaktion $A(a, b)B$ die Teilchen a und/oder b positiv elektrisch geladen, dann wird ihre Wellenfunktion über eine Strecke Δ außerhalb des Kernrandes um den Durchdringungsfaktor der Schwelle des COULOMB-Potentials (s. § 22d, Beispiel 2)

$$T = e^{-\kappa \Delta}$$

reduziert (nicht $e^{-2k\Delta}$, da die *Amplitude* der Wellenfunktion betrachtet wird). Zur näherungsweisen Berechnung des Durchdringungsfaktors ersetzen wir die wahre Potentialschwelle (s. Fig. 44.1) durch eine rechteckige Schwelle, deren Höhe sich durch Mittelung der Größe

$$\kappa = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2\mu(U_{(r)} - E)}$$

über die Strecke Δ ergibt:

$$\bar{\kappa}\Delta = \int_R^{R+\Delta} \kappa\, dr = \int_R^{R+\Delta} \frac{1}{\hbar} \sqrt{2\mu\left(\frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0 r} - E\right)}\, dr\,.$$

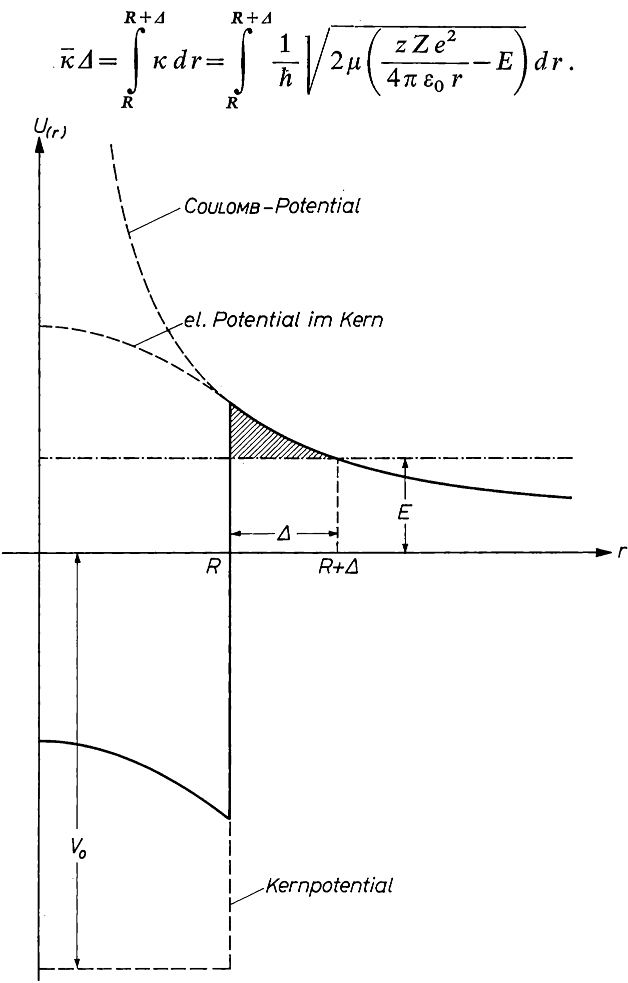


Fig. 44.1. Die Überlagerung von Kernpotential und elektrostatischem Potential gibt Anlaß zur COULOMB-Schwelle (schraffiert eingezeichnet)

Dabei wird Δ bestimmt aus

$$\frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0(R+\Delta)} = E\,.$$

Zur Integration substituiert man zweckmäßig

$$\rho = \frac{4\pi\varepsilon_0 E}{zZe^2}\, r = \frac{r}{R+\Delta}\,.$$

Dann ist
$$\bar{\kappa}\Delta = \frac{\sqrt{2\mu E}}{\hbar}\,\frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0 E}\int\limits_{\frac{R}{R+\Delta}}^{1}\sqrt{\frac{1}{\rho}-1}\,d\rho$$
$$= \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar}\sqrt{\frac{2\mu}{E}}\left[\sqrt{\rho(1-\rho)}-\arccos\sqrt{\rho}\right]_{\frac{R}{R+\Delta}}^{1}.$$

Die obere Grenze ergibt Null, die untere führt auf
$$\bar{\kappa}\Delta = \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar}\sqrt{\frac{2\mu}{E}}\left[-\sqrt{\frac{R}{R+\Delta}\left(1-\frac{R}{R+\Delta}\right)}+\arccos\sqrt{\frac{R}{R+\Delta}}\right]. \quad (44.8)$$

Wegen des langsamen Abfalls des Coulomb-Potentials nach außen kann man bei kleinen Teilchenenergien E näherungsweise ansetzen $\Delta \gg R$, dann ist
$$\arccos\sqrt{\frac{R}{R+\Delta}} \approx \frac{\pi}{2}; \qquad \sqrt{\frac{R}{R+\Delta}\left(1-\frac{R}{R+\Delta}\right)} \ll \frac{\pi}{2},$$
also
$$\bar{\kappa}\Delta \approx \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar}\,\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2\mu}{E}} = zZ\alpha\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2\mu c^2}{E}}$$

[α = Feinstrukturkonstante, s. (5.9)].

Im nichtrelativistischen Fall ist $E=\frac{1}{2}\mu v^2$ (v = Relativgeschwindigkeit); damit findet man schließlich näherungsweise für den Reduktionsfaktor der ψ-Funktion eines energiearmen, geladenen Teilchens beim Durchdringen des Coulomb-Walles den Ausdruck
$$\boxed{T \approx \exp\left(-zZ\alpha\frac{\pi}{2}\,\frac{c}{v}\right)} \qquad (\text{„Gamow-Faktor“}). \quad (44.9)$$

T hängt in dieser Näherung nur von der Relativgeschwindigkeit der Teilchen ab. Für Protonen einer kinetischen Energie von 1 MeV ist der Exponent etwa $(-\frac{3}{4}Z)$, damit wird die Wellenfunktion schon bei $Z=10$ um einen Faktor 10^{-3} reduziert. Der Coulomb-Wall hat also einen starken Einfluß auf die Größe des Wirkungsquerschnitts (44.4).

Das Quadrat des Matrixelementes (44.7) enthält den Faktor $T_a^2\,T_b^2$, im übrigen ist es von den Ladungen unabhängig. Die T-Faktoren sind klein bei kleinen Relativgeschwindigkeiten der ein- bzw. auseinanderlaufenden Teilchen; bei großen Relativenergien (etwa ab $\bar{\kappa}\Delta \approx 1$) nähern sie sich dem Wert Eins. Man nennt die zugehörige Energie zuweilen die „Schwellenenergie“ des Coulomb-Walles oder kurz „Coulomb-Schwelle“, obwohl es sich nicht um eine echte Schwelle im Sinne von § 9 handelt. In grober Näherung ist $E_{\text{Coulombschwelle}} \approx zZ^{\frac{2}{3}}$ [MeV].

Bei kleiner Einfallsenergie des Teilchens a macht sich T_a stark bemerkbar. T_b wird wichtig, wenn die Anregungsenergie des Compoundkerns nur wenig über der Schwelle für Emission des (geladenen) Teilchens b liegt. Dies ist der Grund, warum bei schweren Compoundkernen mit nicht zu hohen Anregungsenergien Neutronenemission wahrscheinlicher ist als Protonenemission.

Setzt man (44.7) in (44.4) ein und ersetzt $|\overline{\psi^*_{\text{End}}\, \psi_{\text{Anf}}}|$ durch $T_a^2\, T_b^2\, C^2$, so erhält man

$$\boxed{\sigma_{\text{Anf}\to\text{End}} \approx \frac{1}{\pi \hbar^4}\, C^2\, V_0^2 \left(\frac{4\pi}{3} R^3\right)^2 T_a^2\, T_b^2\, \frac{p_b^2}{v_{aA}\, v_{bB}} (2I_b+1)(2I_B+1)\,.} \tag{44.10}$$

C^2 enthält die Resonanzen (dann sind die Wellenfunktionen im Kerninnern besonders groß).

Weit weg von den Resonanzen läßt sich aus (44.10) die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts der verschiedenen Kernreaktionstypen von der Einfallsenergie verstehen. Dies wird besonders einfach für niedrige Einfallsenergien des Teilchens a und niedrige Austrittsenergien des Teilchens b (wenig oberhalb der Schwelle der Reaktion).

Wir betrachten folgende Fälle:

1. Elastische Streuung von Neutronen (s. Fig. 44.2).

Es gilt

$$v_{aA} = v_{bB} = \frac{M_B + m_n}{M_B}\, v_b\,,$$

$$\frac{p_b^2}{v_{aA}\, v_{bB}} = \frac{m_n^2\, M_B^2}{(M_B + m_n)^2} = \mu^2\,,$$

$$T_a = T_b = 1\,.$$

Daher hängt σ für kleine Einfallsenergien nicht von v_a ab [s. auch (41.8)].

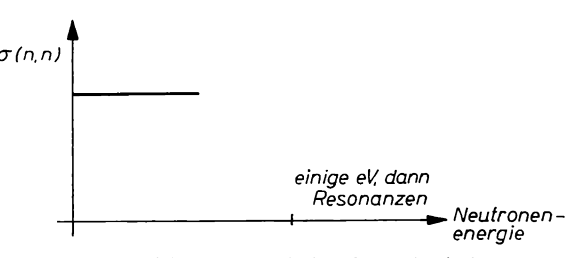


Fig. 44.2. Wirkungsquerschnitt für elastische Neutronenstreuung bei kleinen Einfallsenergien

2. Inelastische Streuung von Neutronen (s. Fig. 44.3).

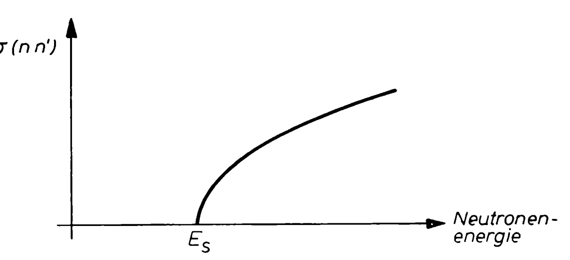


Fig. 44.3. Wirkungsquerschnitt für inelastische Neutronenstreuung dicht oberhalb der Schwelle. E_S = Schwellenenergie

Der Targetkern wird in einem angeregten Zustand zurückgelassen. Der Prozeß ist endoenergetisch, besitzt also eine Schwellenenergie (s. Kapitel IV).

Gleich oberhalb der Schwelle ist $v_{aA}=\text{const}$; $p_b^2/v_{aA}v_{bB}$ wird proportional zu v_b, d.h. etwa zur Wurzel aus dem Energieüberschuß. $T_a=T_b=1$.

Eine ähnliche Abhängigkeit ergibt sich auch für andere Anregungsmechanismen des Compoundzustandes, solange ein Neutron emittiert wird (z.B. endoenergetische (p, n)-Reaktion; als Abszisse wird dann die Einfallsenergie der Protonen aufgetragen. Die v_{aA}-Abhängigkeit von T_a muß zusätzlich berücksichtigt werden, s. unten).

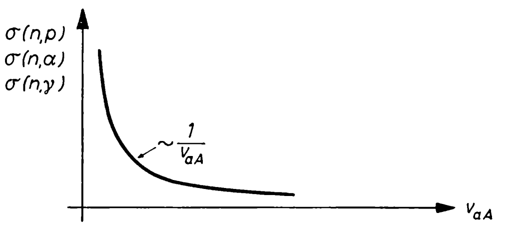


Fig. 44.4. Wirkungsquerschnitt für durch Neutronen ausgelöste exoenergetische Kernreaktionen, unterhalb des Resonanzgebietes

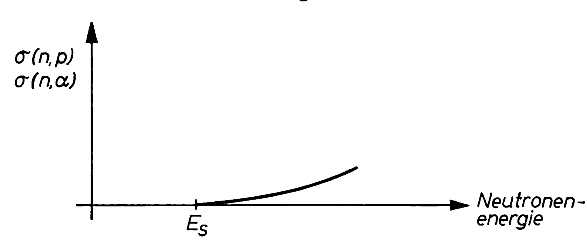


Fig. 44.5. Wirkungsquerschnitt für endoenergetische Reaktionen vom Typ (n, p) oder (n, α) dicht oberhalb der Schwelle

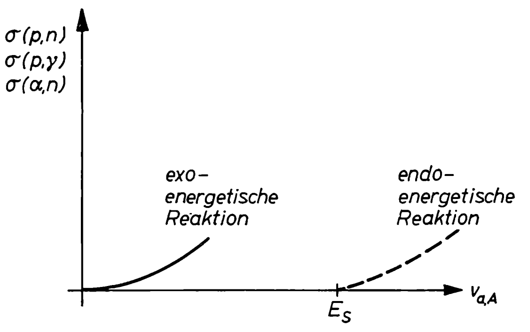


Fig. 44.6. Wirkungsquerschnitt einer durch ein geladenes Teilchen ausgelösten Reaktion. E_S = Schwellenenergie

3. Exoenergetische Reaktionen, ausgelöst von Neutronen [z.B. Neutroneneinfang, (n,p), (n, α); s. Fig. 44.4].

Die Relativgeschwindigkeit v_{bB} der Reaktionsprodukte wird im wesentlichen von der freiwerdenden Bindungsenergie bestimmt und ist fast unabhängig von v_{aA}. Mit $T_a=1, T_b\approx$ const ergibt sich $\sigma\sim\frac{1}{v_{aA}}$. Dies ist das $1/v$-Gesetz des Reaktionsquerschnitts [vgl. (41.9)]; es gilt auch, wenn keine Resonanzen auftreten.

4. Endoenergetische Reaktionen, ausgelöst von Neutronen; das emittierte Teilchen sei geladen [z.B. (n, p), (n, α); s. Fig. 44.5].

Der Fall ist ähnlich dem Fall 2, nur dominiert jetzt T_b; der Wirkungsquerschnitt wächst oberhalb der Schwelle nur langsam an.

5. Reaktionen, bei denen das einfallende Teilchen geladen ist [z.B. (p, n), (p, γ), (α, n) usw.; s. Fig. 44.6].

Dieser Fall ist ähnlich den Fällen 2 und 3, nur überwiegt jetzt der Einfluß von T_a. Der Wirkungsquerschnitt für exoenergetische Reaktionen ist proportional zu T_a/v_{aA}, für endoenergetische Reaktionen proportional zu $v_b T_a$.

Die in den Figuren 44.2 bis 44.6 skizzierten Abhängigkeiten der Wirkungsquerschnitte gelten nur *unterhalb* des Resonanzgebietes, das sich dann bei höheren Einfallsenergien anschließt. In den Fällen 4 und 5 können die niedrigsten Resonanzen durch die Wirkung von T_a bzw. T_b unterdrückt sein.

c) Resonanzgebiet (schematische Übersicht)

Das *Resonanzgebiet* ist zum Studium der Kerneigenschaften im allgemeinen viel interessanter, weil hier die Energien, Spins, Paritäten und Linienbreiten der angeregten Niveaus bestimmt werden können. Die Energieabhängigkeit der Wirkungsquerschnitte kann als Überlagerung von BREIT-WIGNER-Resonanzen dargestellt werden (s. §42). Einen Überblick über die Meßmethoden und die jeweils dem Experiment zugänglichen Niveaus gibt Tabelle 44.1.

Neben den aufgeführten Reaktionstypen kann man die Schwächung des Primärstrahls durch eine Materieschicht messen [vgl. (4.9)]; man erhält dann eine Aussage über den totalen Wirkungsquerschnitt σ_{tot} (Summe aller Prozesse).

Als Beispiel betrachten wir eine Anzahl von Reaktionen, die auf den Compoundkern N^{14} führen. Die energetischen Verhältnisse sind in Fig. 44.7 dargestellt.

1. $B^{10}+\alpha\rightarrow(N^{14})^*$.

Wegen
$$Q=c^2(M_{B^{10}}+M_\alpha-M_{N^{14}})=11{,}613 \text{ MeV}$$
ist der Compoundkern mindestens um diesen Betrag angeregt (dazu addiert sich die kinetische Energie des α-Teilchens im Relativsystem). Die Reaktion ist also exoenergetisch. Der Wirkungsquerschnitt für die Bildung des Compoundkerns ist für kleine α-Energien klein wegen des COULOMB-Walles (vgl. Fig. 44.4). Resonanzen werden ab etwa 1 MeV α-Energie im Laborsystem meßbar. Da der Spin des Grundzustandes des B^{10} gleich 3^+ ist, können bei kleinen α-Energien nur 3^+-Zustände im N^{14} angeregt werden.

2. $C^{13}+p\rightarrow(N^{14})^*$.

Wegen $Q=7{,}549$ MeV sind die Verhältnisse ähnlich wie bei $B^{10}+\alpha$; nach Fig. 44.4 ist der Wirkungsquerschnitt bei kleinen Protonenenergien klein. Resonanzen werden ab etwa 0,5 MeV Einfallsenergie gefunden. Da der Grundzustand des C^{13} den Spin $\frac{1}{2}$ und negative Parität hat, werden bei kleinen Einfallsenergien bevorzugt 0^- und 1^--Zustände des N^{14} angeregt.

3. $C^{12}+d\rightarrow(N^{14})^*$.

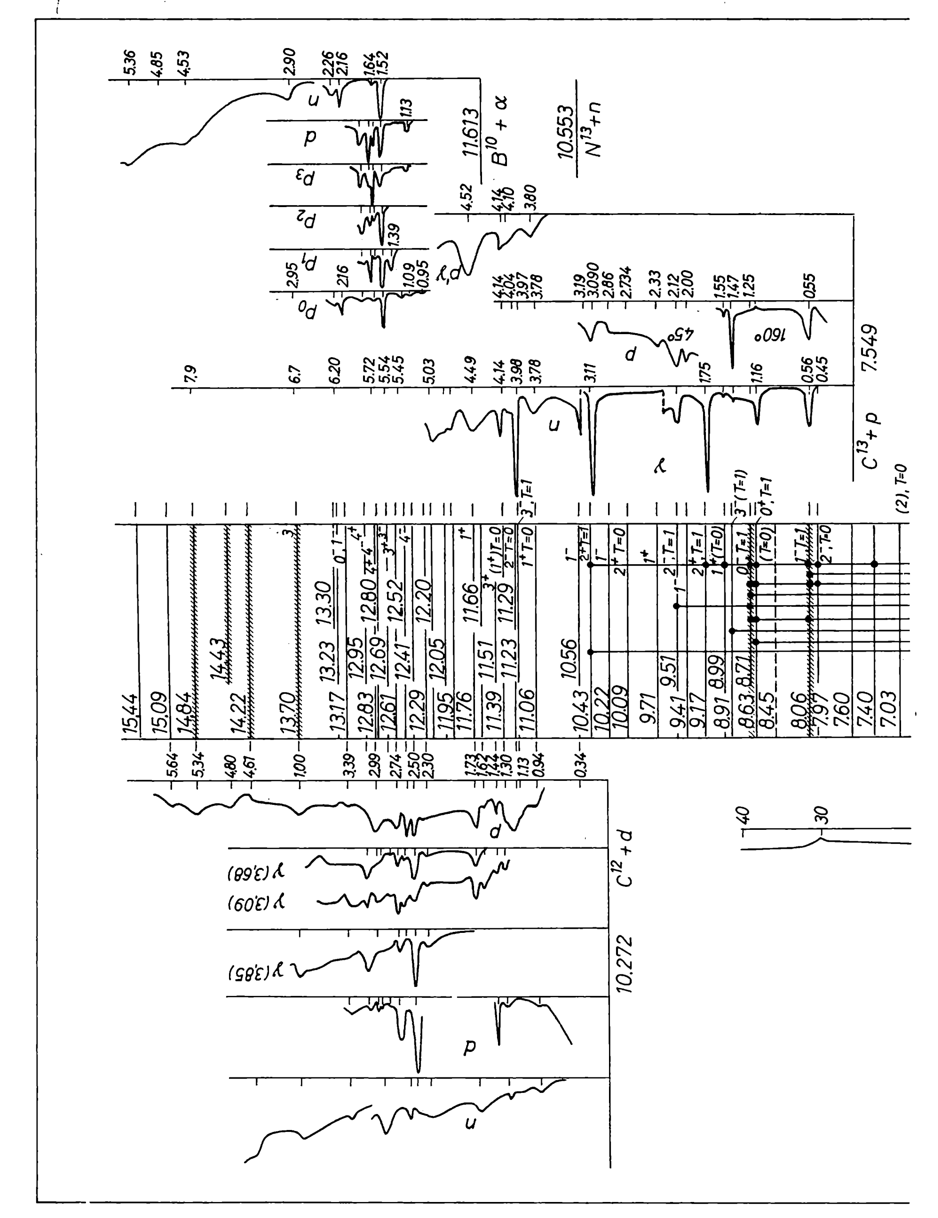
Wegen $Q=10{,}272$ MeV gilt wieder Fig. 44.4, Resonanzen werden oberhalb etwa 0,9 MeV Deuteronenenergie aufgelöst. C^{12} hat im Grundzustand den Spin 0^+, das Deuteron 1^+, daher kommen für kleine Deuteronenenergien nur 1^+-Zustände des N^{14} als Resonanzniveaus in Frage.

4. $N^{14}(p, p')(N^{14})^*$.

Man mißt z.B. die γ-Quantenausbeute des anschließenden Zerfalls. Mit dieser Methode lassen sich solche niedrig angeregten Zustände des N^{14}-Kerns untersuchen, deren

Spin sich (bei $l_{aA}=0$) höchstens um eine Einheit vom Spin 1^+ des N^{14}-Grundzustandes unterscheidet und deren Parität positiv ist.

5. Der auf irgend eine Weise hergestellte Compoundzustand $(N^{14})^*$ wird anschließend wieder zerfallen. Geschieht dies durch Protonenemission, so ermöglicht das Spektrum der



unter einem festen Winkel emittierten Protonen bei festgehaltener Energie des einfallenden Teilchens Aussagen über angeregte Zustände im Kern C^{13}.

Mißt man statt der Protonen etwa die γ-Strahlung, die vom Zerfall des ersten angeregten Niveaus des C^{13} zum Grundzustand herrührt, als Funktion der Energie des die

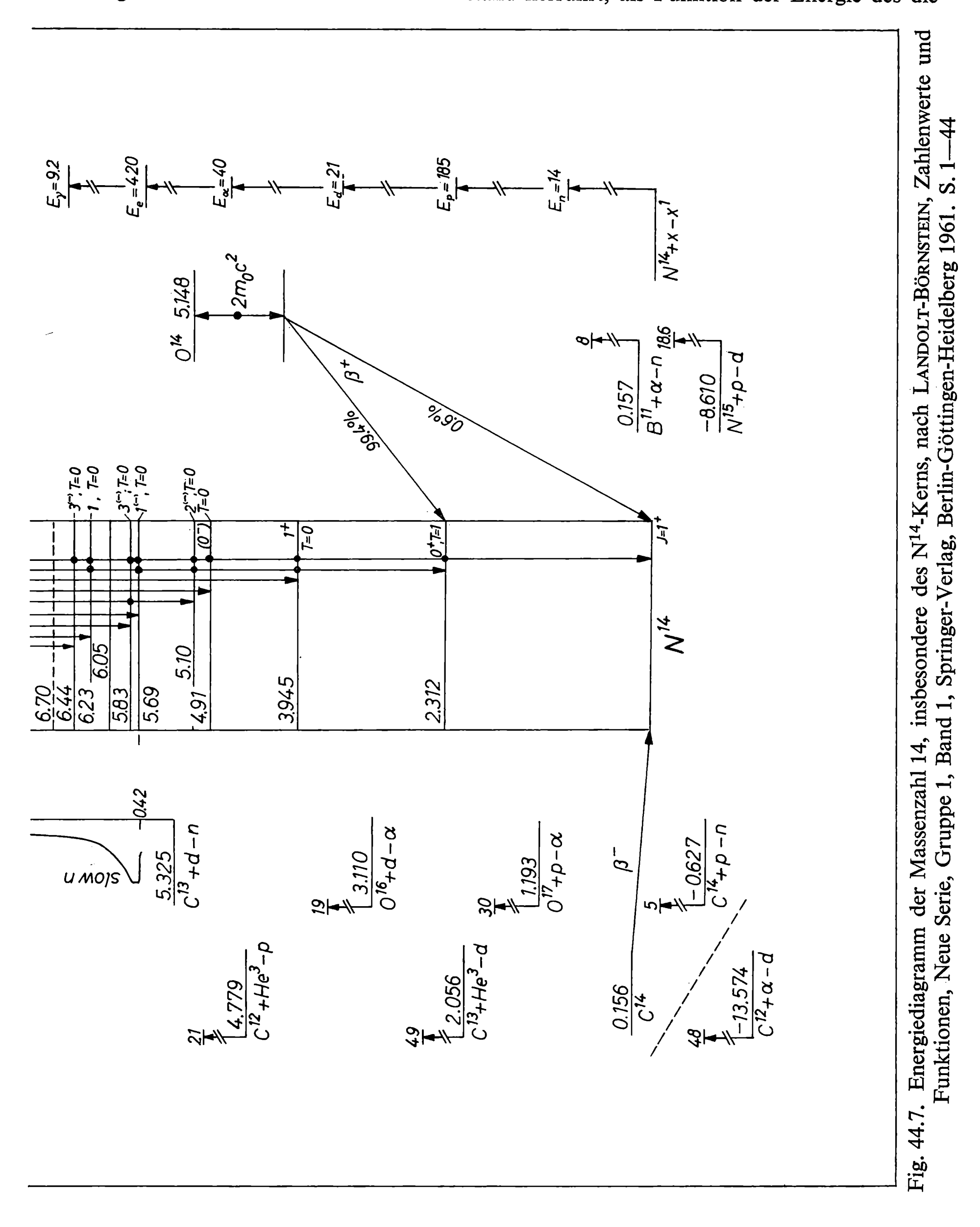


Fig. 44.7. Energiediagramm der Massenzahl 14, insbesondere des N^{14}-Kerns, nach LANDOLT-BÖRNSTEIN, Zahlenwerte und Funktionen, Neue Serie, Gruppe 1, Band 1, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1961. S. 1—44

Tabelle 44.1. *Kernreaktionstypen bei kleinen Einfallsenergien* ($E \lesssim 1$ MeV)

Methode	Auslösendes Teilchen	Beobachtung	Gibt Aufschluß über Niveaus im Kern	Spin und Parität der erreichbaren Niveaus ($l_{aA}=0$)	Typisches Energiediagramm
Elastische Streuung am Kern $_ZM_N^A$	n p α	Resonanzen in σ_{str} als Funktion der Einfallsenergie niedrige Resonanzen u. U. unterdrückt (p, α)	Compoundkern C $C={}_ZM_{N+1}^{A+1}$ $C={}_{Z+1}M_N^{A+1}$ $C={}_{Z+2}M_{N+2}^{A+4}$	$I_{C^*}=I_A\pm\frac{1}{2}$, $\pi_{C^*}=\pi_A$ (n, p) $I_{C^*}=I_A$, $\pi_{C^*}=\pi_A$ (α)	a C^*, $A+n$, C (Diagramm für Neutronenstreuung)
Inelastische Streuung am Kern $_ZM_N^A$	n p α	Bei fester Einfallsenergie: Gruppen von energieärmeren gestreuten Teilchen (oder anschließender γ-Strahlung)	Targetkern A $C={}_ZM_{N+1}^{A+1}$ $C={}_{Z+1}M_N^{A+1}$ $C={}_{Z+2}M_{N+2}^{A+4}$	$I_{A^*}=I_A$; $I_A\pm 1$, $\pi_{A^*}=\pi_A$ (n, p) $I_{A^*}=I_A$, $\pi_{A^*}=\pi_A$ (α)	b C^*, A^*, γ, $A+n$, C (Diagramm für inelastische Neutronenstreuung)
Reaktion $A(a,b)B$	beliebig	Maxima in der Häufigkeitsverteilung der Reaktionsprodukte b oder einer anschließend emittierten γ-Strahlung als Funktion der Einfallsenergie	Compoundkern C	wie bei elastischer Streuung	c C^*, $A+a$, γ, $B+b$, C
		Bei fester Einfallsenergie: Reaktionsprodukte werden in diskreten Energiegruppen emittiert	Endkern B	große l_{bB} unwahrscheinlich	d C^*, B^*, $A+a$, $B+b$, C

Reaktion auslösenden Teilchens, so erhält man Resonanzen, die den erreichbaren Zuständen des N^{14}-Kerns entsprechen. Eine Untersuchung des gesamten γ-Spektrums bei festgehaltener Einschußenergie ergibt Aussagen über die Niveaus des C^{13}-Kerns.

6. Entsprechende Möglichkeiten ergeben sich, wenn der N^{14}-Compoundzustand durch die Emission anderer Teilchen (Neutronen, Deuteronen, α-Teilchen usw.) zerfällt. Man erhält immer dann eine besonders hohe Reaktionswahrscheinlichkeit, wenn die Einfallsenergie so groß ist, daß ein Niveau des Compoundkerns angeregt wird. Die Spektroskopie der emittierten Teilchen gibt Aufschluß über die Niveaus des Restkerns.

Besondere Bedeutung kommt den Messungen der elastischen Streuung zu [z.B. $B^{10}(\alpha,\alpha)\,B^{10}$ oder $C^{13}(p,p)\,C^{13}$], weil hierbei zusätzliche Auswahlregeln für Spin und Parität des Compoundzustandes gelten.

Mißt man darüber hinaus die Winkelabhängigkeit des differentiellen Wirkungsquerschnitts, so kann man Spins und Paritäten der erreichbaren Niveaus oft eindeutig festlegen *.

Man sieht, daß bei der großen Anzahl von experimentellen Möglichkeiten an jedem der vielen Kerne des periodischen Systems ein umfangreiches Datenmaterial zusammengetragen werden kann. Die Beschreibung solcher Untersuchungen füllen auch jetzt noch einen breiten Raum in der kernphysikalischen Fachliteratur.

d) Umkehrreaktion

Im Anschluß an die Diskussion der Matrixelemente wollen wir den Zusammenhang des Wirkungsquerschnitts einer Reaktion mit dem der Umkehrreaktion herstellen. Obwohl der Zusammenhang allgemeiner gültig ist, wollen wir ihn hier aus der Gleichung (44.4) herleiten, die auf der 2. Goldenen Regel und damit auf einem Näherungsverfahren der quantenmechanischen Störungstheorie beruht.

Dazu betrachten wir die Reaktion $B(b,a)A$, sehen also den bisherigen Eingangskanal als Ausgangskanal an und umgekehrt. Dann gilt nach (44.4)

$$\sigma_{b,B\to a,A} = \frac{1}{\pi\hbar^4}\left|\int \psi^*_{a,A} H_{b,B\to a,A}\,\psi_{b,B}\,d\tau\right|^2 \frac{p_a^2}{v_{aA}\,v_{bB}}(2I_a+1)(2I_A+1). \tag{44.11}$$

Da der Wechselwirkungsoperator für die Rückwärtsreaktion dieselbe Form hat wie die für die Vorwärtsreaktion (er ändert sich bei Zeitumkehr nicht), gilt

$$H_{a,A\to b,B} = H_{b,B\to a,A},$$

ferner wegen der Hermitezität von H nach (23.5)

$$\left|\int \psi^*_{a,A}\,H\psi_{b,B}\,d\tau\right| = \left|\int (H\psi_{a,A})^*\,\psi_{b,B}\,d\tau\right| = \left|\int \psi^*_{b,B}\,H\psi_{a,A}\,d\tau\right|.$$

Damit folgt aus (44.4) und (44.11) bei Normierung der ψ-Funktionen der freien Teilchen im Volumen V_a bzw. V_b

$$\boxed{\frac{\sigma_{a,A\to b,B}}{\sigma_{b,B\to a,A}} = \frac{p_b^2}{p_a^2}\,\frac{2I_b+1}{2I_a+1}\,\frac{2I_B+1}{2I_A+1}.} \tag{44.12}$$

Dies ist das *Reziprozitätstheorem* der Reaktionsquerschnitte. Nach der Betrachtung eines Beispiels werden wir es im nächsten Paragraphen zur Grundlage der „statistischen Theorie“ der Kernreaktionen machen.

Beispiel: Berechnung des Wirkungsquerschnitts $\sigma(\gamma, p_0)$ (= Photoprotonenerzeugung) aus dem Wirkungsquerschnitt $\sigma(p, \gamma_0)$ (= Strahlungseinfang von Protonen). Dabei bedeutet der Index 0, daß der Folgekern nach der Reaktion im Grundzustand zurückbleibt.

---

* Beispiel: Die Reaktion $C^{12}(\alpha,\alpha)\,C^{12}$ wurde von J. W. BITTNER und R. D. MOFFAT [Phys. Rev. **96**, 374 (1954)] untersucht, um daraus die Quantenzahlen einiger niedrig angeregter Zustände des O^{16}-Kerns zu gewinnen.

Wird das γ-Quant als Teilchen a, das Proton als Teilchen b aufgefaßt, so ist $(2I_a+1)$ zu ersetzen durch 2 (das Quant hat zwei Polarisationsrichtungen), $2I_b+1=2$. Der Targetkern A des (γ, p)-Prozesses unterscheidet sich um ein Proton vom Targetkern $(A-1)$ der (p, γ)-Reaktion. p_b^2 und p_a^2 sind die Impulsquadrate von Proton und Quant im Schwerpunktssystem.

Durch die (γ, p)-Reaktion wird dem Compoundkern A (Masse $A'M$, $M=$ Nukleonenmasse) eine Anregungsenergie E_A^* vermittelt, die sich aus Energie- und Impulssatz zu

$$E_A^* = E_\gamma\left(1-\frac{E_\gamma}{2A'Mc^2}\right)\approx E_\gamma$$

berechnet [vgl. (11.1), aber anderes Vorzeichen]. Von dieser Anregungsenergie wird der Teil $(BE)_p$ zur Ablösung des Protons benötigt, der Rest verteilt sich als kinetische Energie auf Proton und Rückstoßkern (im Schwerpunktssystem). Das Proton erhält den Anteil

$$(KE)_{p,\,SPS}=\frac{A'-1}{A'}\left[E_A^*-(BE)_p\right]\approx\frac{A'-1}{A'}\left[E_\gamma-(BE)_p\right].$$

Damit wird sein Impuls im Schwerpunktssystem

$$p_b^2=2M(KE)_{p,\,SPS}\approx 2M\,\frac{A'-1}{A'}\left[E_\gamma-(BE)_p\right].$$

Der Schwerpunkt bewegt sich so langsam, daß man den Quantenimpuls in guter Näherung im Laborsystem berechnen kann. Es ist dann

$$p_a^2\approx\frac{E_\gamma^2}{c^2}.$$

Durch Einsetzen in (44.12) erhält man

$$\sigma_{(\gamma,\,p_0)}=\frac{2I_{A-1}+1}{2I_A+1}\;\frac{A'-1}{A'}\;\frac{2Mc^2}{E_\gamma^2}\left[E_\gamma-(BE)_p\right]\sigma_{(p,\,\gamma_0)}. \qquad (44.13)$$

Zu vergleichen ist also der Wirkungsquerschnitt für die (γ, p_0)-Reaktion bei der Energie E_γ (im Laborsystem) mit dem Wirkungsquerschnitt für (p, γ_0)-Reaktion am um ein Proton ärmeren Kern bei der Protonenenergie $(KE)_{p,SPS}$, also bei der Energie im Laborsystem

$$(KE)_{p,\,LS}=\left(\frac{A'}{A'-1}\right)^2(KE)_{p,\,SPS}=\frac{A'}{A'-1}\left[E_\gamma-(BE)_p\right]. \qquad (44.14)$$

Die Beziehung (44.13) ist experimentell gut bestätigt worden.

Zahlenbeispiel: Bei der Reaktion $H^3(p,\gamma)\,He^4$ wurde der Wirkungsquerschnitt bei einer Protonenenergie von 4 MeV von D. S. Gemmel und G. A. Jones [Nucl. Phys. **33**, 102 (1962)] zu 0,075 mb gemessen. Dieser Protonenenergie entspricht nach (44.14) eine γ-Energie von 22,8 MeV (die Protonenbindungsenergie des He^4 ist 19,8 MeV). Nach (44.13) erwartet man einen Wirkungsquerschnitt für die Reaktion $He^4(\gamma, p)\,H^3$ von 1,2 mb bei $E_\gamma=22{,}8$ MeV. Der gemessene Wert für diesen Wirkungsquerschnitt ist $(1{,}22\pm 0{,}1)$ mb [A. N. Gorbunov und V. M. Spiridonov, JETP **6**, 16 (1958)].

§ 45. Statistische Theorie und Kernverdampfung

In diesem Paragraphen wollen wir uns mit der Frage beschäftigen, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein einmal gebildeter Compoundzustand das vorgegebene Teilchen b emittiert und wie das Energiespektrum der Sekundärteilchen aussieht. Wir beschränken uns dabei auf solche Reaktionen, die über einen wohldefinierten Compoundzustand ablaufen und lassen die sogenannten Direktprozesse außer acht.

In diesem Fall kann der Wirkungsquerschnitt für die Reaktion

$$\begin{array}{ccccc} a+A & \Rightarrow & (C)^* & \Rightarrow & B+b \\ (\text{Zustand „}A\text{“}) & & (\text{Zustand „}C\text{“}) & & (\text{Zustand „}B\text{“}) \end{array}$$

zerlegt werden in einen Wirkungsquerschnitt $\sigma_{A\to C}$ für die Bildung des Compoundzustandes und die Wahrscheinlichkeit dafür, daß dieser in den Ausgangskanal „B“ zerfällt. Letztere ist gegeben durch $\Gamma_B/\Gamma_{\text{tot}}$, wenn Γ_{tot} die totale Linienbreite des Zustandes „C“ ist. Also

$$\sigma_{A\to B}=\sigma_{A\to C}\frac{\Gamma_B}{\Gamma_{\text{tot}}}. \tag{45.1}$$

Die Wahrscheinlichkeit für den Übergang „C“ nach „B“ läßt sich mit (44.2) darstellen als

$$w_{C\to B}=\frac{2\pi}{\hbar}\left|\int \psi_B^* H_{C\to B}\psi_C\, d\tau\right|^2\frac{dn}{dE}=\frac{1}{\hbar}\Gamma_B. \tag{45.2}$$

Dabei bestimmt sich dn/dE wie folgt: Im Endzustand „B“ hat das Teilchen b den Impuls p_b und den Spin I_b, also ist die Zahl der ihm zur Verfügung stehenden Zustände (s. §44)

$$dn=\frac{4\pi p_b^2\, dp_b}{(2\pi\hbar)^3}(2I_b+1).$$

Das Normierungsvolumen im Ortsraum für das Teilchen b ist dabei gleich Eins gesetzt. Mit $p_b^2=2M_bE_b$ folgt wie in §44

$$\frac{dp_b}{dE}=\frac{1}{v_{bB}}.$$

Der Kern B hat außer seiner kinetischen Energie, die nach den Erhaltungssätzen festliegt, sobald über den Zustand des Teilchens b verfügt ist, im Endzustand noch die Anregungsenergie E_B^*. Wenn man im Gegensatz zu §44 jetzt annimmt, daß E_B^* im Zustandskontinuum liegt, muß man mit der Niveaudichte $\omega_{B(E_B^*)}$ multiplizieren (bei entarteten Zuständen wird jedes Subniveau einzeln gezählt).

Damit ergibt sich insgesamt

$$\frac{dn}{dE} = \omega_{B\,(E_B^*)} \frac{4\pi\, p_b^2}{(2\pi\,\hbar)^3\, v_{b\,B}} (2I_b+1)\,.$$

Wir betrachten nun die Umkehrreaktion $B+b\to C^*$. Die Wahrscheinlichkeit $w_{B\to C}$ für diesen Prozeß ist nach (44.1) mit dem Wirkungsquerschnitt $\sigma_{B\to C}$ verknüpft durch

$$w_{B\to C} = v_{b\,B}\, \sigma_{B\to C}\,.$$

Weiter ist nach (44.2)

$$w_{B\to C} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \int \psi_C^*\, H_{B\to C}\, \psi_B\, d\tau \right|^2 \frac{dn}{dE}\,, \tag{45.3}$$

wobei das Matrixelement dasselbe ist wie in (45.2), aber nunmehr

$$\frac{dn}{dE} = \omega_{C\,(E_C^*)}$$

(der Endzustand ist der Compoundzustand). Elimination der Matrixelemente aus (45.2) und (45.3) liefert

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_B &= \frac{1}{2\pi^2\,\hbar^2}\, p_b^2 (2I_b+1) \frac{\omega_{B\,(E_B^*)}}{\omega_{C\,(E_C^*)}}\, \sigma_{B\to C} \\ &= \frac{M_b}{\pi^2\,\hbar^2} (2I_b+1) \frac{\omega_{B\,(E_B^*)}}{\omega_{C\,(E_C^*)}}\, E_b\, \sigma_{B\to C}\,. \end{aligned}\right\} \tag{45.4}$$

Dabei ist E_b die kinetische Energie des Teilchens b (nichtrelativistisch) im Schwerpunktssystem, M_b seine reduzierte Masse.

Aus (45.1) berechnet sich damit der Wirkungsquerschnitt für den Prozeß „A"→„B" zu

$$\boxed{\sigma_{A\to B} = \frac{M_b}{\pi^2\,\hbar^2} (2I_b+1) \frac{\omega_{B\,(E_B^*)}}{\omega_{C\,(E_C^*)}}\, E_b\, \sigma_{B\to C} \frac{\sigma_{A\to C}}{\Gamma_{\text{tot}}}\,,} \tag{45.5}$$

wobei

$$\Gamma_{\text{tot}} = \sum_{\text{alle B}} \Gamma_B\,.$$

Der Wirkungsquerschnitt $\sigma_{A\to C}$ für die Bildung des Compoundzustandes wird (43.8) bzw. (43.12) (oder näherungsweise aus der Kontinuumstheorie, s. §41) entnommen. Ist a ein geladenes Teilchen, so enthält $\sigma_{A\to C}$ zusätzlich die Durchdringungswahrscheinlichkeit des COULOMB-Walles.

Die Größen $\sigma_{B\to C}$ sind im allgemeinen der Messung nicht zugänglich, da der Zustand „B" in der überwiegenden Anzahl der Fälle einen *angeregten* Kern B und ein freies Teilchen b enthält; Kernreaktionen an angeregten

Kernzuständen aber können experimentell normalerweise nicht untersucht werden. Meistens verwendet man daher für $\sigma_{B\to C}$ ebenfalls die Ausdrücke (43.8) bzw. (43.12). Wenn das Teilchen b geladen ist, muß man darüberhinaus den Effekt des COULOMB-Walles berücksichtigen.

Wie man aus der Definition sieht, ist Γ_{tot} proportional zu $\omega_{C(E_C^*)}$, so daß $\sigma_{A\to B}$ nicht explizit von $\omega_{C(E_C^*)}$ abhängt.

Aus (45.5) ergibt sich das Energiespektrum $I_{(E_b)}$ der emittierten Teilchen b unter Benutzung von

$$E_B^* = E_C^* - (BE)_b - E_b = E_{b,\,\max} - E_b \tag{45.6}$$

(s. Fig. 45.1) zu

$$I_{(E_b)} \sim E_b\, \sigma_{B\to C}\, \omega_{B\,(E_{b,\max}-E_b)}\,. \tag{45.7}$$

Man kann erwarten, daß die Wirkungsquerschnitte $\sigma_{B\to C}$ im Falle geladener Teilchen b mit der Teilchenenergie wachsen, da energiereichere Teilchen den COULOMB-Wall leichter durchdringen können. Bei Neutronen ist zwar (bei $l=0$) σ im wesentlichen proportional zu $1/v$, aber das Produkt $E_b\,\sigma$ wächst mit der Neutronenenergie. Falls das Teilchen b mit einem von Null verschiedenen Bahndrehimpuls emittiert wird, muß zusätzlich der Zentrifugalwall $\hbar^2\, l(l+1)/2m\, r^2$ überwunden werden; daher wird die Emission von Teilchen, die einen größeren Bahndrehimpuls relativ zum Kern B haben, unwahrscheinlicher.

Nimmt man zunächst an, daß die Zustände des Endkerns B bei diskreten Energiewerten liegen, so ist

$$\omega_B = (2I_B+1)\,\delta_{E_{b,\max}-E_b,\,E_R};$$

die Häufigkeit, mit der das Teilchen b mit der Energie E_b emittiert wird, ist dann nach (45.7) für jedes Niveau durch das – mit E_b wachsende – Produkt $E_b\,\sigma_{B\to C}$ gegeben [s. Fig. 45.1, die von der allgemeinen (steigenden) Tendenz zuweilen abweichenden Linienintensitäten können durch die statistischen Gewichte der Zustände oder durch Drehimpulsauswahlregeln bedingt sein]. Ein Ausgangskanal mit hoher Teilchenenergie wird also eine höhere Reaktionsausbeute haben als ein Ausgangskanal, in dem das Teilchen b niederenergetisch ist. Dies rührt hauptsächlich davon her, daß das Phasenvolumen mit p_b^2 wächst, ist also ein statistischer Effekt. Diese Überlegung hat der „statistischen Theorie" ihren Namen gegeben.

Im allgemeinen ist die Niveaudichte bei einigen MeV Anregungsenergie so groß, daß die einzelnen Zustände sich überlappen und ihre Dichte als kontinuierliche Funktion der Anregungsenergie angesehen werden kann. Über ihre Abhängigkeit von der Anregungsenergie und den Zusammenhang mit den Drehimpulsen der Niveaus ist theoretisch nicht allzuviel bekannt*.

* Rechnungen unter Zugrundelegung des FERMIgas-Modells liefern ähnliche Ausdrücke wie (45.8). Siehe T. ERICSON, Advances in Physics, 9, 425 (1960).

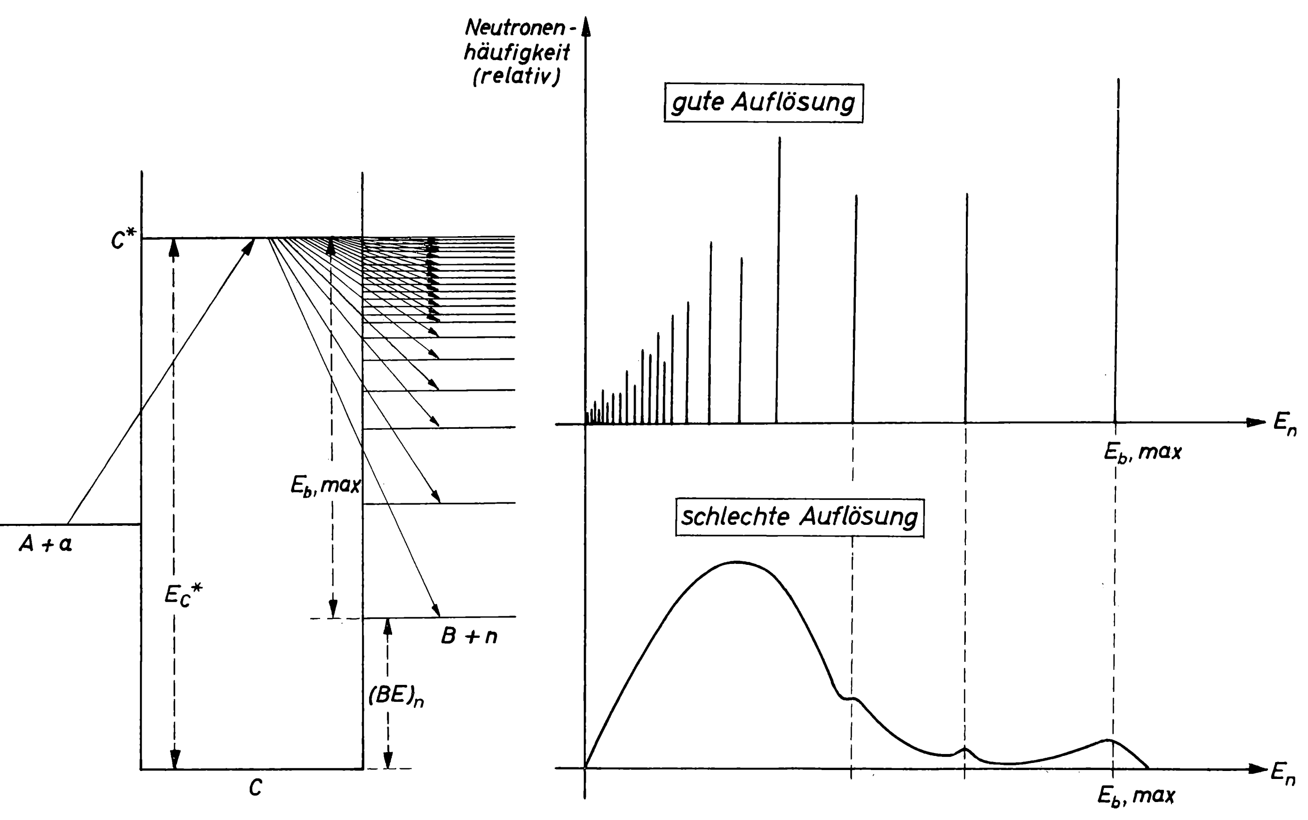


Fig. 45.1. Schematische Darstellung von Energiediagramm und Neutronenspektren verschieden guter Auflösung bei einer neutronenerzeugenden Kernreaktion $a+A \rightarrow C^* \rightarrow B+n$. E_n ist die kinetische Energie der Neutronen im Schwerpunktssystem

Aus der Auszählung von bekannten Niveaus gut untersuchter Kerne weiß man jedoch, daß die Zahl der Niveaus – jedenfalls im Abstand von etwa 6–10 MeV über dem Grundzustand – etwa exponentiell mit der Wurzel aus der Anregungsenergie wächst. Ferner hat sich ergeben, daß *u*-*u*-Kerne die größte, *g*-*u*- und *u*-*g*-Kerne eine mittlere und *g*-*g*-Kerne eine relativ geringe Niveaudichte besitzen. Die magischen Kerne haben eine besonders geringe Zahl von Niveaus pro Energieintervall.

Sieht man von diesen ab, so kann die von NEWTON* angegebene, experimentell ermittelte Näherung

$$\omega = (2I^* + 1)\,\frac{1}{C A^2 U^2}\, e^{0{,}62\sqrt{AU}}\,[\mathrm{MeV}^{-1}], \tag{45.8}$$

die im Bereich um etwa 7 bis 10 MeV Anregungsenergie für von Neutronen induzierte Reaktionen gültig ist, als Wegweiser für die weiteren Rechnungen dienen. Dabei ist A die Nukleonenzahl und I^* der Spin des Compoundzustandes**, für U ist einzusetzen:

E^* (= Anregungsenergie in MeV) für *u*-*u*-Kerne,
$E^* - \delta$ [in MeV; δ ist die Paarungsenergie, s. (13.11)] für *u*-*g*- und *g*-*u*-Kerne,
$E^* - 2\delta$ (in MeV) für *u*-*u*-Kerne.

Der Wert der Konstanten C ist etwa 1,6 keV^{-1}.

Zur weiteren Berechnung der Form des Energiespektrums (45.7) der Sekundärteilchen setzen wir der Einfachheit halber $\delta = 0$ und erhalten

$$\omega_{B\,(E_{b,\,\max} - E_b)} \sim \frac{1}{(E_{b,\,\max} - E_b)^2}\, e^{0{,}62\sqrt{A\,(E_{b,\,\max} - E_b)}}.$$

Im niederenergetischen Teil des Sekundärteilchenspektrums ist $E_b \ll E_{b,\,\max}$; angenähert gilt dann

$$\omega_{B\,(E_{b,\,\max} - E_b)} \sim \frac{1}{E_{b,\,\max}^2} \exp\left(0{,}62\sqrt{A\,E_{b,\,\max}}\sqrt{1 - \frac{E_b}{E_{b,\,\max}}}\right)$$
$$\sim \exp\left(-\frac{0{,}62\sqrt{A E_{b,\,\max}}\,E_b}{2E_{b,\,\max}}\right) \sim \exp\left(-\frac{E_b}{\theta}\right)$$

mit

$$\theta = \frac{1}{0{,}31}\sqrt{\frac{E_{b,\,\max}}{A}}. \tag{45.9}$$

---

* T. D. NEWTON, Can. J. Phys. **34**, 804 (1956); siehe auch G. BREIT, Handb. d. Phys. **41/1**, Sect. 36, 1959 und M. BORMANN und H. NEUERT, Fortschr. d. Phys. **11**, 277 (1963).

** Hat der Targetkern einen von Null verschiedenen Spin I, so beobachtet man bei Neutronenreaktionen eine größere effektive Niveaudichte, da das Neutron in die beiden Spinzustände $I^* = I + \frac{1}{2}$ und $I_1^* = I - \frac{1}{2}$ eingefangen werden kann. Es ist dann

$$\omega_{\mathrm{eff}} = 2(2I + 1)\,\frac{1}{C A^2 U^2}\, e^{0{,}62\sqrt{AU}}\,[\mathrm{MeV}^{-1}].$$

Setzt man (45.9) in (45.7) ein, so erhält man für die Energieabhängigkeit des Sekundärteilchenspektrums

$$I_{(E_b)}\, d E_b = \text{const}\, \sigma_{B\to C}\, E_b \exp\left(-\frac{E_b}{\theta}\right) d E_b\,. \tag{45.10}$$

Wenn $\sigma_{B\to C}$ nicht von E_b abhinge [s. z.B. (40.8)], wäre die Form dieses Spektrums dieselbe wie die aus der kinetischen Gastheorie bekannte MAXWELL-Verteilung. Man kann daher in formaler Analogie die Größe θ mit einer Temperatur in Verbindung bringen; da θ die Dimension einer Energie hat, definiert man diese durch $T=\theta/k$ (k = BOLTZMANN-Konstante). Ein Vergleich mit dem RICHARDSON-Gesetz für die Verdampfung von Elektronen aus einem geheizten Draht (Glühkathode) würde dann bedeuten, daß θ die (in Energieeinheiten ausgedrückte) Temperatur des Kerns wäre, der die Neutronen abdampft. Dieser Vergleich ist allerdings mit Vorsicht zu verwenden. Denn da der Kern nur endlich viele Nukleonen enthält, verliert er bei Emission eines von ihnen einen erheblichen Bruchteil seiner Anregungsenergie, was gerade bei der Herleitung des RICHARDSON-Gesetzes ausgeschlossen wird (dort ist die Temperatur vor und nach der Emission dieselbe). So ist denn auch nicht verwunderlich, daß die nach (45.9) berechnete Kerntemperatur bei $E_{b,\max}=10$ MeV nur von der Größenordnung 1 MeV ist.

Energiediagramm und Spektrum der Neutronen für eine Neutronenproduktionsreaktion sind in Fig. 45.1 schematisch dargestellt; das Spektrum ist einmal für gute und einmal für schlechte Auflösung der Neutronenenergie im Detektor (bzw. für schmale und breite Resonanzlinien des Kerns B) oder für exakt oder nicht ganz monoenergetische Einfallsneutronen gezeigt (im letzten Falle regt der Strahl gleichzeitig mehrere Zustände „C“ an). Man erkennt, daß bei guter Auflösung die zu den einzelnen Niveaus des Kerns B gehörigen Linien erscheinen (vgl. §44). Bei schlechter Auflösung und/oder höheren Anregungsenergien des Kerns B ergibt sich ein kontinuierliches Neutronenspektrum mit ausgeprägtem Maximum bei kleinen Neutronenenergien.

Für nicht zu hohe Anregungsenergien des Compoundkerns zeigt das experimentelle Sekundärteilchen-Emissionsspektrum für Neutronen in befriedigender Näherung die Form einer MAXWELL-Verteilung; die Maxima liegen bei 1 ... 2 MeV.

Sind die Sekundärteilchen geladen, wird die Form des Spektrums durch den in $\sigma_{B\to C}$ enthaltenen Durchdringungsfaktor des COULOMB-Walles empfindlich verändert, das Maximum liegt dann zu höheren Energien verschoben. Außerdem sind natürlich $(BE)_p$ und $(BE)_n$ verschieden, daher ergeben sich verschiedene Werte für $E_{b,\max}$.

Wenn man annimmt, daß $\omega_{B(E_B^*)}$ eine kontinuierliche Funktion von E_B^* ist, ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, daß überhaupt ein vorgegebenes Teilchen b emittiert wird, aus (45.5) durch Integration über das Spektrum zu

$$\sigma_b = \frac{M_b}{\pi^2 \hbar^2}(2I_b+1)\frac{\sigma_{A\to C}}{\omega_{C(E_C^*)}\,\Gamma_{\text{tot}}}\int\limits_0^{E_{b,\max}} \omega_{B(E_{b,\max}-E_b)}\, E_b\, \sigma_{B\to C}\, d E_b\,. \tag{45.11}$$

Es ist schwierig, diese Formel numerisch auszuwerten, da viele der vorkommenden Größen nur durch Modellrechnungen näherungsweise angegeben werden können. Mit etwas größerer Genauigkeit kann man aber z.B. das Verhältnis von Protonen- zu Neutronenausbeute berechnen; dann fällt der Faktor $\sigma_{A\to C}/\omega_{C(E_C^*)}\,\Gamma_{\text{tot}}$ heraus, der nur von der Erzeugungsart und den Eigenschaften des Compoundzustandes abhängt.

Ab etwa 20 MeV Anregungsenergie weichen die beobachteten Spektren systematisch von den Erwartungen nach der obigen „Verdampfungstheorie" ab. Und zwar enthalten die experimentellen Spektren zu viele hochenergetische Teilchen, und diese zeigen auch keine isotrope Richtungsverteilung mehr. Der Reaktionsmechanismus, der zu diesen Abweichungen führt, ist sicher anders als die bisher betrachtete Compoundkernbildung und -verdampfung. Anscheinend reagiert das einfallende Teilchen nur mit einem Teil des Targetkerns, ohne daß Energie, Impuls und Drehimpuls auf den ganzen Targetkern verteilt werden. Die Erhaltungssätze werden dann schon innerhalb des Systems Geschoß plus Teilkern befriedigt. Aus einer solchen Vorstellung ist verständlich, daß relativ hohe Sekundärenergien und Anisotropien auftreten können. Eine ausführliche Behandlung dieser „Direktreaktionen" übersteigt den Rahmen dieses Buches.

§ 46. Besonderheiten bei Reaktionen mit geladenen Teilchen

Die bisher beschriebene Reaktionstheorie ist hauptsächlich für Neutronenreaktionen entwickelt worden, bei denen die Verhältnisse wegen der fehlenden Ladungswechselwirkung am einfachsten zu übersehen sind. Außerdem steht mit dem Kernreaktor eine ergiebige Neutronenquelle für experimentelle Untersuchungen zur Verfügung.

Reaktionen mit geladenen Teilchen gestatten aber wesentlich genauere experimentelle Aussagen, weil solche Teilchen in elektrischen Feldern auf wohldefinierte Energien beschleunigt werden können. Mit den in den modernen Beschleunigeranlagen erzielbaren energie- und intensitätsreichen Strahlen von Protonen, Deuteronen, α-Teilchen und schweren Ionen wurde ein umfangreiches Datenmaterial über solche Reaktionen zusammengetragen.

Über die besprochenen Compoundkernreaktionen hinaus gibt es bei geladenen Geschossen einige weitere Reaktionstypen, von denen die wichtigsten kurz behandelt werden sollen.

a) Von Protonen induzierte Reaktionen

Bei niedrigen Protonenenergien verhindert der COULOMB-Wall ein Eindringen in den Kern, so daß keine Compoundkernbildung zustande kommt. Dies ist das Gebiet der COULOMB-Anregung (Beschreibung s. unten).

Für höhere Protonenenergien schließt sich der Bereich der Resonanzstreuung an. Reaktionen vom Typ (p, γ) sind wegen der schwachen Kopplung des elektromagnetischen Feldes an die Kernladung selten, besonders bei leichten Kernen (vgl. auch die kleinen Werte des Verhältnisses Γ_γ/Γ_n in §42). (p, n)-Reaktionen haben (vor allem bei leichten Kernen) oft einen negativen Q-Wert und daher eine hohe Schwellenenergie, denn nach (14.1) ist näherungsweise

$$Q_{(p,n)} = (BE)_{zM_N^A} - (BE)_{Z+1M_{N-1}^A}$$
$$\approx -a_3 \frac{2Z+1}{A^{\frac{1}{3}}} + a_4 \frac{4(N-Z-1)}{A} + (\lambda_1 - \lambda_2)\,\delta\,.$$

Für leichte Kerne überwiegt der erste Term, er hat angenähert die Größe $(-a_3 A^{\frac{2}{3}})$ (einige MeV). (p, n)-Reaktionen können daher nur mit energiereichen Protonen eingeleitet werden.

Oft liegt die (p, α)-Schwelle niedriger als die (p, n)-Schwelle; dann gibt es zwischen beiden Schwellen ein Gebiet sehr scharfer (p, α)-Resonanzen. Die totale Linienbreite dieser Resonanzen ist klein, da der (p, n)-Ausgangskanal fehlt.

Oberhalb der (p, d)-Schwelle erlangt der Wirkungsquerschnitt für diese Reaktion eine beträchtliche Größe. Der Prozeß kann über die Bildung eines Compoundkerns, aber auch als Direktreaktion ablaufen. Im letzteren Fall reißt das Proton sozusagen bei seinem Vorbeiflug am Kern ein lose gebundenes Neutron mit. Dieser als „Pick-up"-Reaktion bezeichnete Prozeß ist die Umkehrung der „Stripping"-Reaktion am Deuteron, die in Abschnitt b) behandelt wird. Die Gleichung (44.12) stellt den Zusammenhang zwischen den Wirkungsquerschnitten beider Reaktionen dar.

Oberhalb einer Anregungsenergie des Compoundkerns von etwa 14 bis 18 MeV (bei schweren Kernen schon oberhalb 10 MeV) über dem Grundzustand liegen die Niveaus so dicht, daß keine einzelnen Resonanzen mehr aufgelöst werden können.

COULOMB-*Anregung*: Für kleine Einfallsenergien, besonders wenn das Proton wegen des COULOMB-Walles nicht in den Kern eindringt, erwartet man keine Compoundreaktionen. Wegen der elektrostatischen Wechselwirkung wird das Proton jedoch aus seiner Bahn abgelenkt. Klassisch ergibt sich die Hyperbelbahn der RUTHERFORD-Streuung (vgl. §4). Da der Kern dabei ein sich zeitlich änderndes Feld empfindet, ist es nicht ausgeschlossen, daß er während des Ablenkprozesses in einen angeregten Zustand versetzt wird. Es handelt sich dabei um einen inelastischen Streuprozeß, der aber nicht durch ein Compoundkernstadium geht. Diese als „COULOMB-Anregung" bezeichnete Reaktion ist besonders geeignet zur Untersuchung der niedrigsten angeregten Zustände des Targetkerns.

Der Wirkungsquerschnitt für COULOMB-Anregung läßt sich mit (4.3) schreiben als

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{COULOMB-Anregung}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{RUTHERFORD}} \cdot P\,,$$

wobei P die Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß das in das Raumwinkelelement $d\Omega$ abgelenkte Teilchen gleichzeitig den Kern anregt.

Um einen Ausdruck für die Größe P zu finden, betrachten wir den HAMILTON-Operator des aus Targetkern (Ladung $+Ze$) und anfliegendem Teilchen (Ladung $+ze$) bestehenden Systems, wobei die Wechselwirkung zwischen Kernpotential und Teilchen mit der Begründung weggelassen wird, daß das Teilchen wegen der COULOMB-Abstoßung nicht in die Reichweite der Kernkräfte kommt.

$$H = H_{\text{Kern}} + \left(\frac{p^2}{2m}\right)_{\text{anfl. Teilchen}} + \sum_{p=1}^{Z} \frac{z e^2}{4\pi \varepsilon_0 \rho_p}\,.$$

Der letzte Term beschreibt die elektrostatische Wechselwirkung zwischen dem anfliegenden Teilchen und dem Targetkern, er koppelt die beiden Systeme aneinander. Die magnetische Wechselwirkung ist um einen Faktor v/c kleiner und wird hier vernachlässigt.

Zweckmäßigerweise wird zunächst die Bewegung des anfliegenden Teilchens relativ zum Schwerpunkt des Kerns abgespaltet (s. Fig. 46.1). Man zerlegt H in die Anteile

$$H_0 = H_{\text{Kern}} + \left(\frac{p^2}{2m}\right)_{\text{anfl. Teilchen}} + \frac{Z z e^2}{4\pi \varepsilon_0 r}$$

und

$$H' = \sum_{p=1}^{Z} \left(\frac{z e^2}{4\pi \varepsilon_0 \,|\vec{r} - \vec{r}_p|} - \frac{z e^2}{4\pi \varepsilon_0 r}\right).$$

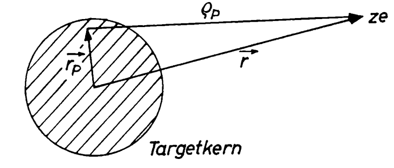


Fig. 46.1. Vektordiagramm zur elektrostatischen Wechselwirkung. $\vec{r}_p =$ Ortsvektor des Protons, $\vec{r} =$ Ortsvektor des anfliegenden Teilchens relativ zum Schwerpunkt des Targetkerns

Der Anteil H_0 beschreibt das RUTHERFORD-Problem, wobei r von der Zeit abhängt. Der Anteil H' kann als eine zeitabhängige Störung betrachtet werden, die einen Übergang des Targetkerns in einen angeregten Zustand verursacht. Wir vereinfachen zunächst den Nenner des ersten Summanden von H' durch Entwicklung nach LEGENDRE-Polynomen [vgl. (30.2)] und erhalten

$$\begin{aligned} H' &= \sum_{p=1}^{Z} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{z e^2}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{r} P_{l\,(\cos\theta)} \left(\frac{r_p}{r}\right)^l - \frac{z e^2}{4\pi \varepsilon_0 r}\right) \\ &= \sum_{p=1}^{Z} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z e^2}{4\pi \varepsilon_0} \frac{r_p^l}{r^{l+1}} P_{l\,(\cos\theta)}\,. \end{aligned}$$

Dabei ist angenommen, daß stets $r > r_p$ ist, also das anfliegende Teilchen nicht in den Kern eindringt. Mit dem Additionstheorem der Kugelfunktionen (30.3) (hier konjugiert komplex genommen) wird

$$H' = \frac{z e^2}{\varepsilon_0} \sum_{p=1}^{Z} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left[\frac{1}{2l+1} r_p^l \, Y^*_{l,m\,(\omega,\alpha)} \right] \left[\frac{1}{r^{l+1}} Y_{l,m\,(\theta',\Phi')} \right]. \tag{46.1}$$

Die erste eckige Klammer enthält zeitunabhängige Größen, die nur von den Kernkoordinaten abhängen; die zweite Klammer umfaßt die zeitabhängigen Koordinaten des anfliegenden Teilchens.

Nach der 1. Goldenen Regel (s. Anhang) verursacht H' eine Übergangsamplitude vom Anfangszustand Ψ_{Anf} zum Endzustand Ψ_{End} des Targetkerns der Größe

$$b_{\text{Anf}\to\text{End}} = \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\gamma t} \int \Psi^*_{\text{End}} H' \, \Psi_{\text{Anf}} \, d\tau \, dt, \tag{46.2}$$

wobei zur Abkürzung

$$\gamma = \frac{1}{\hbar} (E_{\text{End}} - E_{\text{Anf}})$$

gesetzt wurde. Die Übergangswahrscheinlichkeit ist proportional dem Betragsquadrat der Amplitude (s. Anhang). Da Ψ_{End} von den Quantenzahlen I_{End} und M_{End}, Ψ_{Anf} von I_{Anf} und M_{Anf} abhängt, ist $b_{\text{Anf}\to\text{End}}$ eine Funktion von M_{Anf} und M_{End}. Hat man einen unpolarisierten Einfallsstrahl und ein unpolarisiertes Target, dann muß man über die möglichen Spineinstellungen des Anfangszustandes mitteln und über die Zahl der Entartungen des Endzustandes summieren, so daß sich P zu

$$P \sim \frac{1}{2I_{\text{Anf}}+1} \sum_{M_{\text{Anf}},\, M_{\text{End}}} |b_{\text{Anf}\to\text{End}}|^2$$

ergibt [vgl. die ähnliche Begründung bei der Herleitung von (41.20)]. Einsetzen von H' in (46.2) zeigt, daß als Faktoren Kernmatrixelemente der Form

$$B_l = \sum_{M_{\text{Anf}},\, M_{\text{End}}} \left| \int \Psi^*_{\text{End}} \, r_p^l \, Y^*_{l,m\,(\omega,\alpha)} \, \Psi_{\text{Anf}} \, d\tau \right|^2 \tag{46.3}$$

auftreten, genau dieselben, die in der Wahrscheinlichkeit für spontane γ-Emission beim Übergang $\Psi_{\text{End}} \to \Psi_{\text{Anf}}$ erscheinen (s. §49). Aus Messungen des Wirkungsquerschnitts für COULOMB-Anregung kann man diese Kernmatrixelemente bestimmen, wenn man das Bahnintegral für das anfliegende Teilchen numerisch auswertet. Ein Vergleich der experimentellen Kernmatrixelemente mit Meßwerten aus der Halbwertszeit des spontanen γ-Zerfalls einerseits und mit Modellrechnungen andererseits ergibt, daß

die Meßwerte aus beiden Verfahren innerhalb der Meßfehler übereinstimmen — dies spricht für den Grad des theoretischen Verständnisses beider Prozesse, — daß aber Rechnungen mit Schalenmodell-Wellenfunktionen für niedrige Anregungsniveaus vieler Kerne nicht in Übereinstimmung mit dem experimentellen Befund stehen. Am hervorstechendsten ist die Abweichung im Fall $l=2$ (elektrischer Quadrupolübergang), und zwar stets in der Richtung, daß die Schalenmodellrechnungen zu kleine Übergangswahrscheinlichkeiten liefern. Dies ist ein Hinweis darauf, daß es „kollektive" Anregungszustände im Kern gibt, an deren Zustandekommen mehr als ein Nukleon beteiligt ist (z.B. Rotationen oder Vibrationen der Oberfläche des „Kerntröpfchens"). Ein kollektives Kernmodell, das gerade durch die Ergebnisse der COULOMB-Anregungs-Experimente stark befruchtet wurde, wird in §51 behandelt.

Untersuchungen der COULOMB-Anregung liefern heute die genauesten Informationen über energetisch niedrig liegende Kernzustände. Gemessen werden die Energie- und Winkelverteilungen der Einfallsteilchen (Protonen) nach der Reaktion oder die der sekundär emittierten γ-Quanten. Durch Vergleich mit der Theorie gewinnt man Aussagen über die Multipolarität (d.h. den l-Wert) des Übergangs (vgl. §49) und damit über Spin und Parität der angeregten Zustände*.

b) Von Deuteronen induzierte Reaktionen

Alle mit Protonen induzierbaren Reaktionstypen können auch von Deuteronen ausgelöst werden. Darüber hinaus kann das Deuteron während der Reaktion aufbrechen. Im Deuteron mit seiner geringen Bindungsenergie von nur 2,224 MeV haben Proton und Neutron einen mittleren Abstand, der größer ist als die Reichweite der Kernkräfte (s. §35). Beim Zusammenstoß des Deuterons mit einem Targetkern kann es vorkommen, daß eins der Nukleonen allein in den Targetkern eindringt, während das andere mehr oder weniger unbehelligt weiterfliegt. Dieser Reaktionstyp heißt „Stripping".

Die umgekehrte Reaktion, bei der z.B. ein Proton am Targetkern vorbeifliegt und ein lose gebundenes Neutron aus dem Kern mitnimmt, heißt „Pick-up". Dieser Prozeß ist ebenfalls experimentell nachgewiesen worden. Die überlagerte COULOMB-Wechselwirkung erschwert quantitative Aussagen über diese Reaktion.

Bei deuteroneninduzierten Kernreaktionen tritt der Stripping-Prozeß als zusätzlicher Kanal in Konkurrenz mit COULOMB-Anregung und Compoundkernreaktionen. Da der Wirkungsquerschnitt für Stripping jedoch größer ist als für die anderen Reaktionen, ist der Nachweis leicht. Am einfachsten lassen sich solche Fälle interpretieren, bei denen die COULOMB-Wechsel-

---

* Weiterführende Literatur: z.B. L. C. BIEDENHARN und P. J. BRUSSAARD, COULOMB Excitation, Duke University, 1963.

wirkung mit dem Targetkern vernachlässigt, aber das Energie- und Winkelspektrum der Reaktionsprodukte (Protonen bzw. Neutronen) noch aufgelöst werden kann. Dies ist gegeben für Deuteronenenergien im Bereich von 3 ... 30 MeV (unterhalb 3 MeV können COULOMB-Effekte nicht vernachlässigt werden, oberhalb 30 MeV treten auch Compoundreaktionen auf).

Da bei Vernachlässigung der COULOMB-Kräfte (d, p)- und (d, n)-Reaktionen gleiches Verhalten zeigen, können wir uns auf die Betrachtung eines dieser Prozesse, etwa der (d, p)-Stripping-Reaktion, beschränken. Das Neutron wird dabei im Targetkern eingefangen, das Proton fliegt bevorzugt in Vorwärtsrichtung weiter. Die Winkelverteilung der Protonen wird durch eine Überlagerung von COULOMB-Streuung und Drehimpulsübertragung hervorgerufen und ist charakteristisch für die Bahndrehimpulsquantenzahl l, mit der das Neutron eingefangen wurde. Eine Bestimmung von l liefert die Parität des angeregten Zustandes; der Spin geht aus einer solchen Messung nicht eindeutig hervor, er kann nur zwischen die Grenzen

$$I+l+\tfrac{1}{2} \leqq I^* \leqq \mathrm{Min}(I \pm l \pm \tfrac{1}{2})$$

eingeschlossen werden.

Bei der Betrachtung der Reaktionskinematik muß man bedenken, daß Proton und Neutron wegen ihrer Relativbewegung im Deuteron bereits vor dem Stoß jeweils einen vom halben Deuteronenimpuls verschiedenen Impuls haben. Ist $\vec{p}_d$ der Deuteronenimpuls vor dem Stoß, $\vec{p}_0$ der innere Protonenimpuls, so gelten vor dem Stoß die Beziehungen

Protonenimpuls im Laborsystem: $\vec{p}_p = \tfrac{1}{2}\vec{p}_d + \vec{p}_0$.

Neutronenimpuls im Laborsystem: $\vec{p}_n = \vec{p}_d - \vec{p}_p = \tfrac{1}{2}\vec{p}_d - \vec{p}_0$.

Die Größenordnung von p_0 kann man nach der Unschärferelation abschätzen: Einer Ortsunsicherheit von der Größenordnung des Proton-Neutron-Abstandes (etwa $3 \cdot 10^{-13}$ cm) entspricht ein Impuls von

$$p_0 \geqq \frac{\hbar}{3 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{cm}} \approx 65\,\frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{c}}.$$

Das Deuteron hat bei einer kinetischen Energie von 10 MeV den Impuls (unrelativistisch!)

$$p_d = \sqrt{2 m_d \varepsilon_d} \approx 200\,\frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{c}}.$$

Die Richtungen der Impulse von Proton und Neutron vor dem Stoß können also merklich von der Flugrichtung des Deuterons abweichen (s. Fig. 46.2).

Nach dem Stoß, bei dem das Neutron im Targetkern eingefangen wurde, fliegt das Proton in guter Näherung unbeeinflußt weiter, also ist

$$\vec{p}_p{}' = \vec{p}_p.$$

Aus Fig. 46.2 ist ersichtlich, daß $\vec{p}_p'$ bei $p_d > 2p_0$ nach vorne weist, d.h. man erwartet ausgeprägte Vorwärtsstreuung der Protonen im Laborsystem.

Das Neutron gibt seinen Impuls an den zunächst fast ruhenden Targetkern ab:

$$\vec{p}_n' = \vec{p}_n \approx \vec{p}_K ,$$

wobei

$$p_n^2 = (\vec{p}_d - \vec{p}_p)^2 = p_d^2 + p_p^2 - 2 p_d p_p \cos\Phi \quad (46.4)$$

ist. Die Energieerhaltung (nichtrelativistisch; ε = kinetische Energie) verlangt, daß

$$\varepsilon_d = \varepsilon_p' + \varepsilon_K + E_K^* - Q .$$

Dabei ist E_K^* die Anregungsenergie des Targetkerns nach dem Neutroneneinfang und

$$Q = (M + m_{H^2} - M_K - m_{H^1})\, c^2$$

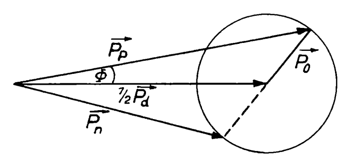


Fig. 46.2. Impulsvektoren im Deuteron: $\vec{p}_p$ = Protonenimpuls im Laborsystem, $\vec{p}_n$ Neutronenimpuls im Laborsystem, $\vec{p}_d$ = Deuteronenimpuls im Laborsystem, $\vec{p}_0$ = Protonenimpuls relativ zum Schwerpunkt des Deuterons

(M = Ruhmasse des Targetkerns vor dem Stoß, M_K = Ruhmasse des Targetkerns nach dem Neutroneneinfang). Weiter ist mit (46.4)

$$\varepsilon_K = \frac{p_K^2}{2M_K} = \frac{1}{M_K} \left(m_d \varepsilon_d + m_p \varepsilon_p - 2\sqrt{m_d \varepsilon_d m_p \varepsilon_p} \cos\Phi\right),$$

$$\varepsilon_p' = \varepsilon_p .$$

Einsetzen in den Energiesatz liefert [vgl. (9.4)]

$$Q - E_K^* = \left(1 + \frac{m_p}{M_K}\right) \varepsilon_p' + \left(\frac{m_d}{M_K} - 1\right) \varepsilon_d - 2\frac{\sqrt{m_d m_p}}{M_K} \sqrt{\varepsilon_d \varepsilon_p'} \cos\Phi . \quad (46.5)$$

Bei bekannten ε_d und Q ergibt sich E_K^* aus Messung von ε_p' unter einem vorgegebenen Winkel Φ. Durch Ausmessung des Protonenspektrums kann man somit die Energie der durch den Neutroneneinfang entstandenen Zustände bestimmen.

Eine halbklassische Betrachtung der Drehimpulserhaltung führt auf ein qualitatives Verständnis der Winkelverteilung der Protonen nach dem Stoß: Ist q der Stoßparameter, mit dem sich das einzufangende Neutron dem Targetkern nähert, dann hat die Bahndrehimpulskomponente senkrecht auf der Bahnebene die Größe $p_n q$. Damit ein Stripping-Prozeß stattfinden kann, muß $q \leq R$ (Kernradius) sein. Zur Übertragung eines Bahndrehimpulses der Größe $\hbar\, l$ muß dann der Neutronenimpuls der Bedingung

$$p_n \geq \frac{\hbar\, l}{R}$$

genügen. Dies liefert mit (46.4) eine Einschränkung für den Winkel Φ:

$$\left.\begin{aligned} p_d^2+p_p^2-2p_d\,p_p\cos\Phi &\geqq \frac{\hbar^2\,l^2}{R^2}, \\ \cos\Phi &\leqq \frac{p_d^2+p_p^2}{2p_d\,p_p}-\frac{\hbar^2\,l^2}{2p_d\,p_p\,R^2}. \end{aligned}\right\} \tag{46.6}$$

Der erste Summand auf der rechten Seite von (46.6) ist stets $\geqq 1$, da allgemein gilt $a^2+b^2\geqq 2a\,b$. Der zweite Summand wächst quadratisch mit der Quantenzahl l und bewirkt, daß es eine untere Grenze für den Winkel Φ gibt, die von l abhängt. Bei $l=0$ kann die Ungleichung für alle Φ erfüllt werden, aber für $l>0$ hat Φ einen Minimalwert.

Auf eine Berechnung des Wirkungsquerschnitts für die Stripping-Reaktion muß im Rahmen dieses Buches verzichtet werden*. Es ergibt sich,

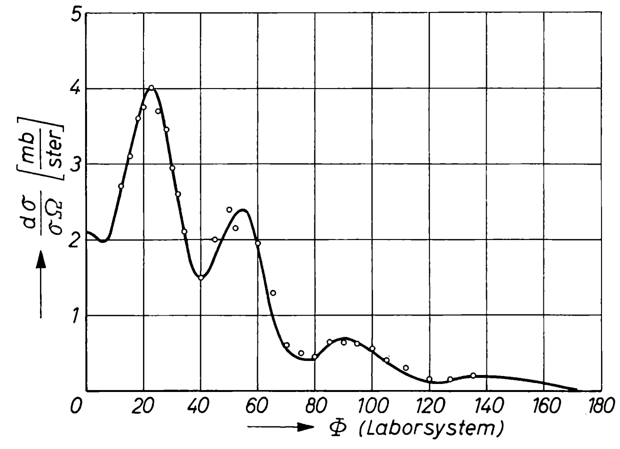


Fig. 46.3. Winkelverteilung derjenigen Protonengruppe aus der Stripping-Reaktion Zr^{90} (d, p) Zr^{91}, die auf den Grundzustand des Zr^{91} ($d_{\frac{5}{2}}$-Zustand) führt. Deuteronenenergie: 10,85 MeV. Da Zr^{90} den Grundzustand 0^+ hat (g-g-Kern), verlangen die Erhaltungssätze für Drehimpuls und Parität, daß das Neutron mit $l=2$ eingefangen wird. Experimentelle Punkte nach R. L. Preston, H. J. Martin und M. B. Sampson, Phys. Rev. **121**, 1741 (1961). Ausgezogene Kurve: Theorie für $l=2$ nach W. R. Smith und E. V. Ivash, Phys. Rev. **128**, 1175 (1962)

daß der Wirkungsquerschnitt am größten nahe dem kleinstmöglichen Winkel Φ ist (d.h. $\vec{p}_p$ möglichst gleichgerichtet mit $\vec{p}_d$). Man erwartet daher ein Maximum der Häufigkeitsverteilung der Protonen am minimal möglichen Winkel. Die quantenmechanische Rechnung ergibt keine scharfen Grenzwinkel; man erhält jedoch auch hier Maxima, die von 0° bei $l=0$ zu größeren Streuwinkeln bei $l>0$ verschoben liegen. Beispiel s. Fig. 46.3.

* Siehe S. T. Butler, Nuclear Stripping Reactions, John Wiley, 1957.

Da bei fester Deuteronenenergie die Neutronen in verschiedene Zustände des Endkerns eingefangen werden können, zeigt die Winkelverteilung der Protonen darüber hinaus Maxima, die verschiedenen l-Werten entsprechen. Das Energiespektrum der Protonen erlaubt jedoch eine eindeutige Zuordnung der l-Werte zu den Kernübergängen.

Durch ein Stripping-Experiment gelingt also eine Aussage über die Quantenzahl l des Kernübergangs beim Neutroneneinfang. Ist $(-1)^l = +1$, dann hat der angeregte Zustand des Endkerns die gleiche Parität wie der Grundzustand des Ausgangs-(=Target-)kerns; ist $(-1)^l = -1$, dann sind die Paritäten verschieden.

c) Von α-Teilchen induzierte Reaktionen

Für α-Teilchen kommen wegen der hohen Eindringschwelle T_a praktisch keine Compoundkernreaktionen unterhalb der (α, n)-Schwelle vor, insbesondere gibt es kaum (α, γ)-Einfangsreaktionen. Ein bekanntes Beispiel einer durch α-Teilchen ausgelösten Reaktion ist $Be^9(\alpha, n)\,C^{12}$ (vgl. § 7).

Der Wirkungsquerschnitt für elastische Streuung weicht bei großen α-Energien (ab etwa 10 MeV) vom RUTHERFORD-Wert ab („anomale Streuung"). Dies ist eine Folge der Überlagerung von Kernpotential und COULOMB-Potential sowie der Änderung des elektrostatischen Potentials innerhalb des Kerns, die sich bei kleinen Stoßparametern $q \leqq R$ (R = Kernradius) bemerkbar machen können. Die Abweichung kann man zur Bestimmung des Radius der Kernkräfte heranziehen. Man erhält Werte, die um einiges höher liegen als die Werte für den Radius der Ladungsverteilung im Kern. Dies läßt sich auf den Einfluß der „Größe" des α-Teilchens zurückführen.

Inelastische α-Streuung verläuft bei niedrigen α-Energien über den Mechanismus der COULOMB-Anregung.

Wenn die α-Energien im Relativsystem größer sind als die Schwellen für Teilchenemission, können (α, n)-, $(\alpha, 2n)$-, (α, np)-...-Prozesse auftreten. Der Verlauf der Wirkungsquerschnitte für diese Fälle wurde in § 44 beschrieben; da die α-Teilchen eine kurze Reichweite im Kern haben, handelt es sich stets um Compoundkernreaktionen. Stripping- und Pick-up-Reaktionen werden bei niederenergetischen α-Teilchen nicht beobachtet, da das α-Teilchen besonders fest und die Kerne der Massenzahl 5 überhaupt nicht gebunden sind.

Durch die moderne Entwicklung der VAN DE GRAAFF-Teilchenbeschleuniger (Tandem-Maschinen) und der Linearbeschleuniger ist es möglich, auch schwerere Ionen zu beschleunigen und als Geschosse zum Studium von Kernreaktionen zu benutzen. Damit können durch COULOMB-Anregung auch höhere Anregungsniveaus untersucht werden. Die Experimente dienen zur Vervollkommnung der Kernmodelle; in unserem Zusammenhang wichtige neue Reaktionsmechanismen — abgesehen von Austauschreaktionen — treten nicht auf.

§ 47. Kernphotoeffekt

In diesem Paragraphen wollen wir solche Reaktionen betrachten, die durch die elektromagnetische Wechselwirkung zwischen γ-Strahlung und Kernen zustandekommen. Wenn das γ-Quant vom Kern absorbiert wird, führt dies entweder zur Bildung eines angeregten Kernzustandes, der anschließend zerfällt, oder zur direkten Photodesintegration des Targetkerns. Ein Beispiel für den letzteren Prozeß ist die Photospaltung des Deuterons.

Für geringe Quantenenergien ($E_\gamma \lesssim 20$ MeV) ist die reduzierte Wellenlänge der Strahlung

$$\lambda\!\!\!^{-}_\gamma = \frac{\hbar c}{E_\gamma} \approx \frac{2\cdot 10^{-5}\,\mathrm{eV\,cm}}{2\cdot 10^{7}\,\mathrm{eV}} = 10^{-12}\,\mathrm{cm},$$

größer als der Kerndurchmesser. Näherungsweise kann man dann das Strahlungsfeld der Frequenz $\omega = E_\gamma/\hbar$ als ebene Welle ansehen, die auf die Ladungen im Kern einwirkt. Für die Wechselwirkung ist das elektrische oder das magnetische Wechselfeld der Welle verantwortlich.

a) Summenregeln

Wir beschränken uns hier auf die Betrachtung der elektrischen Dipolwechselwirkung. Höhere elektrische Multipolstrahlungen und die magnetische Wechselwirkung werden vernachlässigt; ihr Einfluß muß im allgemeinen zusätzlich berücksichtigt werden.

Nach §30 besitzen Kerne kein permanentes elektrisches Dipolmoment. Bewegt sich aber ein Nukleon relativ zum Schwerpunkt* der übrigen Nukleonen, so entsteht ein momentanes („dynamisches") elektrisches Dipolmoment $\vec{\mu}_e$, das mit dem elektrischen Feld $\vec{E}$ in Wechselwirkung tritt. Die Wechselwirkungsenergie ist gegeben durch [vgl. (29.2)]

$$W_{\mathrm{el}} = -(\vec{\mu}_e \vec{E}).$$

Die Größe des induzierten elektrischen Dipolmoments hängt im allgemeinen von der Feldstärke $\vec{E}$ ab. Für kleine $|\vec{E}|$ ergibt sich jedoch ein feldstärkeunabhängiges Dipolmoment im Relativsystem des Kerns aus der folgenden einfachen Modellbetrachtung: Denkt man sich den Kern der Nukleonenzahl A momentan zerlegt in $(A-1)$ Nukleonen (Ladung e_{A-1}) und ein einzelnes Nukleon (Ladung e_1), so hat er ein Dipolmoment der Größe (s. Fig. 47.1)

$$|\vec{\mu}_e| = e_1 \frac{A-1}{A} r - e_{A-1} \frac{1}{A} r$$
$$= r\left(\frac{A-1}{A} e_1 - \frac{1}{A} e_{A-1}\right).$$

* Die Bewegung des Schwerpunkts des Targetkerns führt nicht zur Absorption, sondern zur Streuung des Lichtquants.

Ist das einzelne Nukleon ein Proton, so ist $e_1 = e$, $e_{A-1} = (Z-1)\,e$, also

$$|\vec{\mu}_e|_{\text{Proton}} = r\,\frac{A-Z}{A}\,e = \frac{N}{A}\,e\,r; \tag{47.1}$$

handelt es sich um ein einzelnes Neutron, dann wird mit $e_1 = 0$, $e_{A-1} = Z\,e$

$$|\vec{\mu}_e|_{\text{Neutron}} = -\frac{Z}{A}\,e\,r. \tag{47.2}$$

$\frac{N}{A}\,e$ wird als die „effektive Ladung des Protons", $(-e)\,\frac{Z}{A}$ als die „effektive Ladung des Neutrons" bezeichnet. r ist der Abstand des herausgegriffenen Teilchens vom Schwerpunkt der anderen Nukleonen im Kern. Mit diesem Dipolmoment kann das elektrische Feld der Lichtwelle in Wechselwirkung treten.

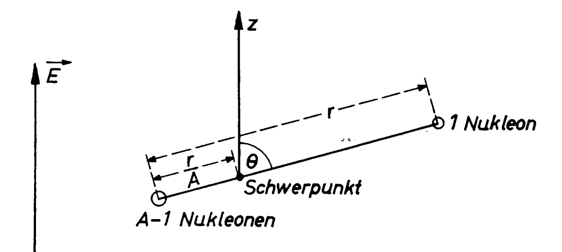


Fig. 47.1. Zur Definition des momentanen elektrischen Kerndipolmoments und der effektiven Ladung

Der Wirkungsquerschnitt für die Quantenabsorption folgt aus (40.1) und (44.2); dabei ist der einfallende Teilchenstrom $\vec{j}$ gleich dem zeitlichen Mittelwert des POYNTING-Vektors $\vec{P}$, dividiert durch die Energie des Einzelquants E_γ:

$$\vec{j} = \frac{\overline{\vec{P}}}{E_\gamma}.$$

Wird angenommen, daß der elektrische Feldvektor in z-Richtung zeigt und die Zeitabhängigkeit

$$E_z(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) = E_z \cdot 2\cos\omega t \tag{47.3}$$

hat, dann folgt aus der Elektrodynamik der ebenen Lichtwelle

$$|\overline{\vec{P}}| = |\overline{\vec{E}\times\vec{H}}| = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,E_z^2\,4\,\overline{\cos^2\omega t} = 2\varepsilon_0\,c\,E_z^2.$$

Der Störoperator wird durch Einsetzen von (47.1) bzw. (47.2) in W_{el} gegeben, lautet also allgemein

$$H' = -f\,e\,E_z\,r\cos\theta = -f\,e\,E_z\,z$$

$\left(f = \frac{N}{A}\text{ für ein Proton, } f = -\frac{Z}{A}\text{ für ein Neutron}\right)$. Damit folgt für die Absorption des Quants aus dem Grundzustand des Targetkerns, d.h. für

den Übergang $\psi_0 \to \psi_k$ mit $E_\gamma = E_k - E_0$, nach der 2. Goldenen Regel (s. Anhang)

$$\boxed{\sigma = \frac{w}{j} = \frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,\hbar\,c}\,4\pi^2 f^2 E_\gamma \left|\int \psi_k^* z\,\psi_0\,d\tau\right|^2 \rho_{(E_f)}\,.} \tag{47.4}$$

$\rho_{(E_f)}$ ist die Zahl der Zustände pro Energieintervall bei einer Endenergie E_f des Gesamtsystems. Die Beziehung (47.4) stellt den allgemeinen Zusammenhang zwischen dem Wirkungsquerschnitt für die Absorption von elektrischer Dipolstrahlung und den Kerneigenschaften dar. Im allgemeinen kennt man die Kernwellenfunktionen nicht und kann daher das Matrixelement nicht ausrechnen. Wie dies in einem Spezialfall doch gelingt, wird unten am Beispiel der Photospaltung des Deuterons gezeigt.

Ohne exakte Kenntnis der Kerneigenfunktionen kann man jedoch einige allgemeine *Summenregeln* für die Dipolabsorption ableiten.

Wird ein Quant vom Targetkern (im Grundzustand) absorbiert, um einen diskreten, nicht entarteten, angeregten Zustand zu produzieren, so ist bei Integration über den Energiebereich dieser Resonanz

$$\int_{\mathrm{Res}} \rho_{(E_f)}\,dE_f = 1$$

(nur dieser eine Zustand wird bevölkert). Nimmt man an, daß alle anderen Größen in (47.4) nicht stark von E_f abhängen, so folgt

$$\int_{\mathrm{Res}} \sigma_{(E_\gamma)}\,dE_\gamma = 4\pi^2\,\alpha f^2 E_\gamma \left|\int \psi_k^* z\,\psi_0\,d\tau\right|^2.$$

[α ist die durch (5.9) definierte Feinstrukturkonstante, $\alpha \approx \frac{1}{137}$]. Für ein diskretes Spektrum von (vom Grundzustand aus) erreichbaren Zuständen wird

$$\int_0^{E_0} \sigma_{(E_\gamma)}\,dE_\gamma = 4\pi^2\,\alpha f^2 \sum_k (E_\gamma)_k \left|\int \psi_k^* z\,\psi_0\,d\tau\right|^2. \tag{47.5}$$

Wenn über alle k von 0 bis ∞ summiert wird, sollte E_0 eigentlich unendlich sein. Da aber nach dem bisherigen experimentellen Befund die Dipolabsorption oberhalb von 100 bis 150 MeV praktisch aufhört und für höhere Energien die auf einem anderen Absorptionsmechanismus beruhende Photomesonenerzeugung (Schwelle: 135 MeV) auftritt, setzt man gewöhnlich $E_0 \approx 150$ MeV.

Die Summe in (47.5) läßt sich allgemein berechnen. Mit

$$(E_\gamma)_k = E_k - E_0$$

ist unter Benutzung der Hermitizität des Operators z

$$\sum_k (E_\gamma)_k \left|\int \psi_k^* z\,\psi_0\,d\tau\right|^2 = \sum_k \int \psi_0^* z\,\psi_k\,d\tau \int \psi_k^* (E_k - E_0)\,z\,\psi_0\,d\tau\,. \tag{47.6}$$

Das zweite Integral wird umgeformt: Wegen

$$H\psi_k = E_k\psi_k \quad \text{und} \quad H\psi_0 = E_0\psi_0$$

(H= HAMILTON-Operator des Kerns im ungestörten System) ist

$$\begin{aligned}\int \psi_k^*(Hz - zH)\,\psi_0\,d\tau &= \int (H\psi_k)^*\,z\,\psi_0\,d\tau - \int \psi_k^*\,z\,E_0\,\psi_0\,d\tau\\ &= (E_k - E_0)\int \psi_k^*\,z\,\psi_0\,d\tau\,.\end{aligned}$$

Also kann man das zweite Integral in (47.6) durch $\int \psi_k^*(Hz - zH)\,\psi_0\,d\tau$ ersetzen. Andererseits ist mit (20.7), da der Operator z nur auf die Koordinaten des am Übergang beteiligten Nukleons wirkt,

$$\begin{aligned}Hz - zH &= \left(\frac{p^2}{2M} + U\right)z - z\left(\frac{p^2}{2M} + U\right) = -\frac{\hbar^2}{2M}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}z - z\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\\ &= -\frac{\hbar^2}{M}\frac{\partial}{\partial z}\,.\end{aligned}$$

Damit wird die rechte Seite von (47.6) zu

$$-\frac{\hbar^2}{M}\sum_k \int \psi_0^*\,z\,\psi_k\,d\tau \int \psi_k^*\,\frac{\partial}{\partial z}\,\psi_0\,d\tau = -\frac{\hbar^2}{M}\int \psi_0^*\,z\,\frac{\partial}{\partial z}\,\psi_0\,d\tau\,.$$

Der letzte Schritt ist eine Konsequenz der Matrizenmultiplikation (s. §23, d 5), denn

$$\sum_k A_{0k}\,B_{k0} = (AB)_{00}\,;$$

mit

$$A_{0k} = \int \psi_0^*\,z\,\psi_k\,d\tau, \qquad B_{k0} = \int \psi_k^*\,\frac{\partial}{\partial z}\,\psi_0\,d\tau$$

folgt die Behauptung.

Man hätte die linke Seite von (47.6) auch anders zerlegen können:

$$\begin{aligned}\sum_k (E_\gamma)_k \left|\int \psi_k^*\,z\,\psi_0\,d\tau\right|^2 &= \sum_k \int \psi_0^*(E_k - E_0)\,z\,\psi_k\,d\tau \int \psi_k^*\,z\,\psi_0\,d\tau\\ &= \frac{\hbar^2}{M}\int \psi_0^*\,\frac{\partial}{\partial z}\,z\,\psi_0\,d\tau\,.\end{aligned}$$

Addition beider Ausdrücke ergibt nach Division durch 2 das Resultat

$$\sum_k (E_\gamma)_k \left|\int \psi_k^*\,z\,\psi_0\,d\tau\right|^2 = \frac{\hbar^2}{2M}\int \psi_0^*\left(\frac{\partial}{\partial z}\,z - z\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\psi_0\,d\tau = \frac{\hbar^2}{2M}\,.$$

Nimmt man M gleich der Nukleonenmasse, so erhält man aus (47.5) schließlich

$$\int_0^{E_0} \sigma_{(E_\gamma)}\, dE_\gamma = 4\pi^2 \alpha f^2 \frac{\hbar^2}{2M} \approx f^2 \cdot 60\,[\mathrm{MeV\,mb}]\,.$$

Wenn der Targetkern aus Z Protonen und N Neutronen besteht, muß über alle möglichen Dipolmomente summiert werden. Man erhält statt f^2 den Faktor

$$f^2 \to Z\left(\frac{N}{A}\right)^2 + N\left(-\frac{Z}{A}\right)^2 = \frac{NZ}{A}$$

und damit

$$\int_0^{E_0} \sigma_{(E_\gamma)}\, dE_\gamma = \frac{NZ}{A} \cdot 60\,[\mathrm{MeV\,mb}]\,.$$

Levinger und Bethe * haben an dieser Formel noch eine Korrektur angebracht, die das Vorhandensein von Austauschkräften im Kern (s. Ende des §37) berücksichtigt. Ist x der Anteil der Austauschkräfte, dann gilt

$$S_0 \equiv \int_0^{E_0} \sigma_{(E_\gamma)}\, dE_\gamma = \frac{NZ}{A}(1+0{,}8\,x) \cdot 60\,[\mathrm{MeV\,mb}]\,. \qquad (47.7)$$

Dies ist die Dipol-Summenregel für den Kernphotoeffekt; $\sigma_{(E_\gamma)}$ ist hierbei der Wirkungsquerschnitt für die Absorption eines γ-Quants bzw. für die Summe der Wirkungsquerschnitte für (γ, γ')-, (γ, n)-, (γ, p)-, $(\gamma, 2n)$-, (γ, np)-, (γ, α)-$\cdots$-Prozesse. S_0 wird als „integrierter Wirkungsquerschnitt" bezeichnet**. Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß diese Summenregel nur für elektrische Dipolabsorption der Quanten gilt, also als untere Grenze für die Gesamtabsorption zu betrachten ist.

Ein Vergleich der experimentellen bis 30 MeV integrierten Absorptionsquerschnitte (s. Fig. 47.2) mit der Theorie zeigt, daß ein Wert von $x \approx 0{,}5$ (vgl. Serber-Potential, §37) den Meßdaten an schweren Kernen einigermaßen gerecht wird. Das Absinken der experimentellen Werte für kleine A liegt – mindestens zum Teil – daran, daß der Wirkungsquerschnitt dort merkliche Beiträge für $E_\gamma > 30$ MeV aufweist.

* J. S. Levinger und H. A. Bethe, Phys. Rev. **78**, 115 (1950).

** Allgemeine Definition:

$$S_n = \int_0^{E_0} \sigma_{(E_\gamma)}\, E_\gamma^n\, dE_\gamma\,.$$

Mißt man den Wirkungsquerschnitt im einzelnen als Funktion der Quantenenergie, – dies ist experimentell schwierig, da man keine intensiven, beliebig mit der Energie variablen Quellen monoenergetischer γ-Quanten zur Verfügung hat; man ist meist auf Bremsspektren angewiesen – dann ist die bemerkenswerteste Tatsache das Auftreten einer „Riesenresonanz". Diese liegt für leichte Kerne bei $E_\gamma \approx$ 22 MeV und für schwere Kerne bei $\approx$13 MeV. Sie hat eine Breite von etwa 4 bis 6 MeV. Fig. 47.3 zeigt den Wirkungsquerschnitt für den (γ, n)-Prozeß am C^{12} (Schwelle: 18.8 MeV); eine ähnliche Kurve (natürlich mit verschiedener Schwelle) findet man für den (γ, p)-Prozeß. Mehrteilchenprozesse wie (γ, pn), $(\gamma, 2n)$ usw. zeigen etwa dieselbe Form der Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts, aber die absolute Größe ist viel kleiner, so daß die Dipolsumme im wesentlichen von den Prozessen (γ, n) und (γ, p) ausgeschöpft wird. Bei schweren Kernen wird die Protonenemission durch den COULOMB-Wall unterdrückt; dort überwiegen (γ, n)- und – oberhalb der zugehörigen Schwelle – $(\gamma, 2n)$-Prozesse.

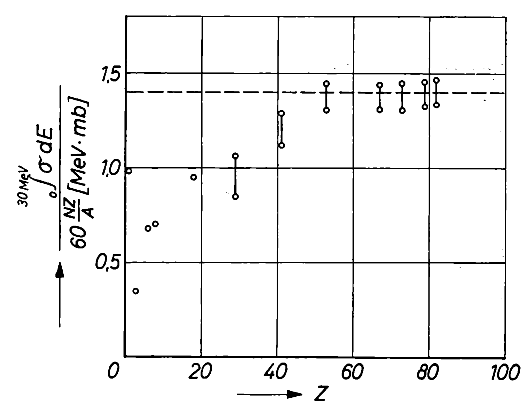


Fig. 47.2. Experimentelle Werte des integrierten γ-Absorptionsquerschnitts von Atomkernen. Nach E. G. FULLER und EVANS HAYWARD in Nuclear Reactions II, edited by P. M. ENDT und P. B. SMITH, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1962, p. 152

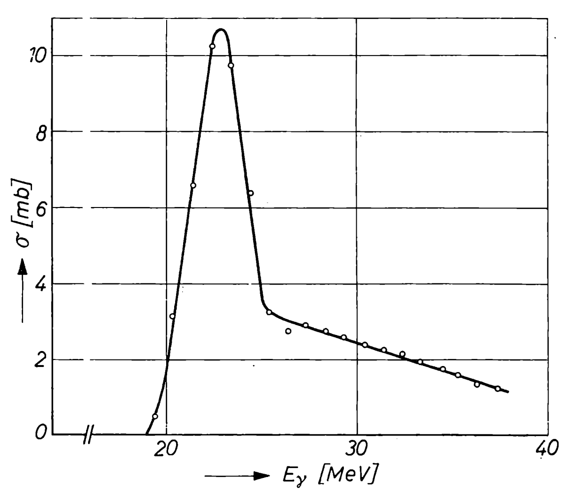


Fig. 47.3. Wirkungsquerschnitt für die Reaktion $C^{12}(\gamma, n)$ als Funktion der γ-Energie. Nach B. C. COOK, Phys. Rev. **106**, 300 (1957)

Zur Deutung der Riesenresonanz sind verschiedene Modelle vorgeschlagen worden. Zum Beispiel könnten sich – bei konstant bleibender Nukleo-

nendichte und Form des Kerns – die Neutronen- und Protonen-„Flüssigkeit“ durch das einwirkende elektrische Feld entmischen, was zu einer Verschiebung des Ladungsschwerpunktes gegen den Massenschwerpunkt führen und ein nicht verschwindendes Dipolmoment ergeben würde. Dieses Modell* liefert für schwerere Kerne eine befriedigende Deutung der Phänomene. Für leichtere Kerne scheint die Riesenresonanz von einer mehr oder weniger unaufgelösten Überlagerung mehrerer Kernzustände herzurühren; so wurden bei O^{16} eine größere Anzahl von 1^--Niveaus identifiziert, die alle zwischen etwa 18 und 25 MeV über dem Grundzustand liegen und durch elektrische Dipolabsorption angeregt werden können. Ihre Summe würde die Riesenresonanz ergeben. Eine quantitative Erklärung des gesamten Verlaufs des Wirkungsquerschnitts für alle Kerne ist bisher nicht gelungen.

Eine zweite Summenregel betrifft die Größe

$$S_{-1} \equiv \int_0^{E_0} \sigma_{(E_\gamma)} \frac{dE_\gamma}{E_\gamma}.$$

Aus (47.4) erhält man dafür mit denselben Annahmen wie oben

$$S_{-1} = 4\pi^2 \alpha f^2 \sum_k \left| \int \psi_k^* z \psi_0 \, d\tau \right|^2.$$

Da der Operator z reell ist, ergibt sich unter Ausnutzung der Gesetze der Matrizenmultiplikation

$$\sum_k \left| \int \psi_k^* z \psi_0 \, d\tau \right|^2 = \sum_k \left(\int \psi_0^* z \psi_k \, d\tau \right) \left(\int \psi_k^* z \psi_0 \, d\tau \right) = \int \psi_0^* z^2 \psi_0 \, d\tau.$$

Die Summe ist also gleich dem Erwartungswert der Größe z^2 im Grundzustand des Kerns. Für kugelsymmetrische Kerne ist

$$\overline{z^2} = \overline{x^2} = \overline{y^2} = \tfrac{1}{3} \overline{r^2},$$

so daß nach Summation über alle Dipolmomente im Kern $\left(\text{d.h. Ersatz von } f^2 \text{ durch } \frac{NZ}{A}, \text{ s. oben}\right)$ folgt**

$$\boxed{S_{-1} \equiv \int_0^{E_0} \sigma_{(E_\gamma)} \frac{dE_\gamma}{E_\gamma} = \frac{4\pi^2 \alpha}{3} \frac{NZ}{A} \overline{r^2}.} \tag{47.8}$$

---

* Siehe J. H. D. Jensen und H. Steinwedel, Z. Naturf. **5a**, 413 (1950).

** Eine exaktere Formel, die berücksichtigt, daß die Schwerpunktsbewegung des Kerns nicht zur Quantenabsorption führt, enthält im Nenner $(A-1)$ statt (A) [vgl. auch (34.8)]. Siehe L. L. Foldy, Phys. Rev. **107**, 1303 (1957).

Mit (34.3), $R_0 = 1{,}2 \cdot 10^{-13}$ cm und der Näherung $NZ = A^2/4$ erwartet man

$$S_{-1} = 0{,}21\,A^{\frac{5}{3}}\,[\text{mb}]\,.$$

Eine mit dem Experiment besser (auf etwa 10%) übereinstimmende Formel ist*

$$S_{-1} = 0{,}30\,A^{\frac{4}{3}}\,[\text{mb}]\,.$$

S_{-1} steigt stärker mit A an als $S_0 \approx 21\,A$ [MeV mb] [s. (47.7)].

Als „harmonisch gemittelte Energie" E_H bezeichnet man die Größe

$$E_H = \frac{S_0}{S_{-1}} \approx 70\,A^{-\frac{1}{3}}\,[\text{MeV}] = \begin{cases} 23 \text{ MeV} & \text{für } A = 27 \\ 11{,}5 \text{ MeV} & \text{für } A = 216\,. \end{cases}$$

Da das Quantenspektrum der Bremsstrahlung näherungsweise proportional zu $1/E_\gamma$ ist (die Abweichungen von der $1/E_\gamma$-Form sind bekannt), läßt sich die Größe S_{-1} mit dem Bremsstrahlspektrum relativ genau bestimmen, so daß sich hier eine Möglichkeit zur Messung des mittleren quadratischen Radius der Ladungsverteilung im Kern ergibt. Bei leichten Kernen wie He^4, C^{12} und O^{16} stimmen die Meßwerte mit denen aus Elektronenstreu-Experimenten überein. Die Genauigkeit der Elektronenstreumessungen ist allerdings viel größer (vgl. §34).

b) Photospaltung des Deuterons

Wir wenden uns jetzt dem Wirkungsquerschnitt für die Photospaltung des Deuterons zu. Dieser verdient besonderes Interesse, da das Deuteron das einzige reine Zweiteilchensystem in der Kernphysik ist. Wir beschränken uns zunächst wieder auf elektrische Dipolstrahlung. Ausgangspunkt ist Gleichung (47.4). Da man die Funktion ψ_0 nach §35 im Relativsystem des Deuterons kennt, ist es sinnvoll, auch den Wechselwirkungsoperator und die Funktion ψ_{End} im Relativsystem darzustellen. Dabei wird der Ursprung ins Zentrum des Neutrons gelegt und das Proton in seiner Bewegung relativ zum Neutron betrachtet.

Mit (47.1) ist der Wechselwirkungsoperator

$$W = \tfrac{1}{2}\,e\,E\,r\cos\theta\,,$$

also $f^2 = \frac{1}{4}$. Die Funktion ψ_{End} soll das freie Proton im Relativsystem beschreiben und kann wegen der geringen Wechselwirkung zwischen Proton und Neutron im P-Zustand als ebene Welle angesetzt werden:

$$\psi_{\text{End}} = \frac{1}{\sqrt{L^3}}\,e^{i(\vec{k}\,\vec{r})}\,.$$

Dabei bezeichnet L^3 das Normierungsvolumen und $\hbar\vec{k}$ den Relativimpuls von Proton und Neutron nach der Spaltung.

* Siehe J. S. Levinger, Nuclear Photo-Disintegration, Oxford Univ. Press, 1960.

Die Zahl der Zustände $\rho_{(E_{\text{End}})}$ findet man durch Integration des Phasenvolumens (vgl. § 44) zu

$$\rho_{(E_{\text{End}})} = \frac{dn}{dE_{\text{End}}} = \frac{dn}{dk}\,\frac{dk}{dE_{\text{End}}} = \frac{L^3}{8\pi^3}\,k^2\,\frac{dk}{dE_{\text{End}}}\,d\Omega\,.$$

Dabei ist die Endenergie gleich der Protonenenergie im Relativsystem:

$$E_{\text{End}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} \approx \frac{\hbar^2 k^2}{M}\,,$$

also

$$\frac{dk}{dE_{\text{End}}} = \frac{M}{2\hbar^2 k}\,.$$

Für die Wellenfunktion ψ_0 benutzen wir näherungsweise für alle r die zweite der Funktionen (35.2), obwohl diese eigentlich nur im Bereich $r > b$ gilt. Aber da im Matrixelement der Operator r auftritt, trägt der Bereich $r < b$ nicht viel zum Integral bei. Also

$$\psi_0 = \frac{B}{\sqrt{4\pi}}\,\frac{e^{-Kr}}{r}\,.$$

Nach § 35 ist $B = \sqrt{2K}$ für $b = 0$. Im allgemeinen hängt B von der Potentialtopfbreite b ab; man setzt an

$$B = \sqrt{2K}\,(1 + \beta_{(b)})\,.$$

Eine experimentelle Bestimmung von $\beta_{(b)}$ gibt Aufschluß über die Größe von b.

Der Wirkungsquerschnitt berechnet sich damit nach (47.4) zu

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \pi^2 \alpha E_\gamma \frac{1}{L^3}\,\frac{2K}{4\pi}\,(1+\beta)^2 \left| \int e^{-i(\vec{k}\,\vec{r})}\, r\cos\theta\, \frac{e^{-Kr}}{r}\, r^2\, dr\, d\Omega \right|^2 \frac{L^3}{8\pi^3}\,\frac{kM}{2\hbar^2}\,.$$

Um das Matrixelement zu berechnen, führt man nach Fig. 47.4 den Winkel θ' ein:

$$(\vec{k}\,\vec{r}) = k\,r\cos\theta'.$$

Man kann zunächst die Integration über r ausführen. Wegen

$$\int_0^\infty r^2 e^{-ar}\, dr = \frac{2}{a^3}$$

(hier: $a = ik\cos\theta' + K$) ergibt sich

$$\iint e^{-i(\vec{k}\,\vec{r})} \cos\theta\, e^{-Kr}\, r^2\, dr\, d\Omega = 2\int \frac{\cos\theta\, d\Omega}{(i\,k\cos\theta' + K)^3}\,.$$

Das Winkelintegral wird unter Benutzung des Additionstheorems der Kugelfunktionen (30.3) für $l=1$

$$\cos\theta=\cos\theta'\cos\vartheta+\sin\theta'\sin\vartheta\cos\delta$$

im gestrichenen System gelöst; man setzt

$$d\Omega=-d(\cos\theta')\,d\delta$$

und erhält

$$2\int\frac{\cos\theta\,d\Omega}{(i\,k\cos\theta'+K)^3}=-8\pi\,i\cos\vartheta\,\frac{k}{(k^2+K^2)^2}\,.$$

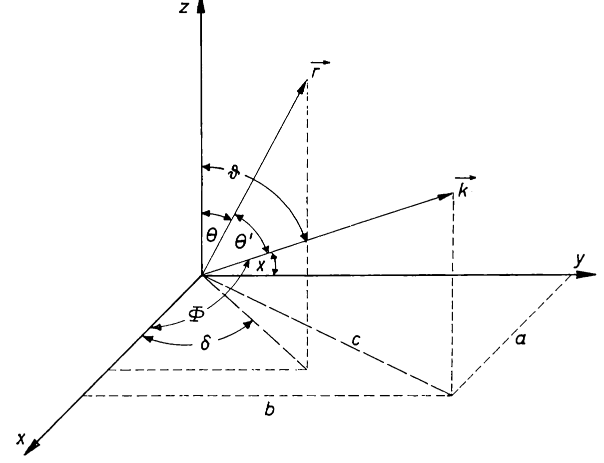


Fig. 47.4. Veranschaulichung der Winkel und Strecken, die bei der Herleitung des Wirkungsquerschnitts für die Photospaltung des Deuterons erscheinen

Damit folgt insgesamt für den Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=2\alpha E_\gamma\frac{M\,k\,K}{\hbar^2}(1+\beta)^2\cos^2\vartheta\,\frac{k^2}{(k^2+K^2)^4}\,. \tag{47.9}$$

Die Formel (47.9) gilt für polarisierte γ-Strahlung (der elektrische Vektor schwingt nur in z-Richtung). ϑ ist der Winkel zwischen der Impulsrichtung des emittierten Protons und der z-Richtung.

Wenn das Licht unpolarisiert ist und sich z.B in y-Richtung ausbreitet (s. Fig. 47.4), kommt ein weiterer Beitrag zu (47.9) hinzu, der von der x-Komponente des elektrischen Feldes herrührt; der Winkel zwischen $\vec{k}$ und der x-Richtung ist Φ. Aus Fig. 47.4 entnimmt man

$$a=k\cos\Phi\,,$$
$$b=k\cos\chi\,,$$
$$c=k\sin\vartheta\,,$$

der Satz des PYTHAGORAS liefert

$$a^2+b^2=c^2$$

oder eingesetzt

$$\cos^2\Phi+\cos^2\chi=\sin^2\vartheta=1-\cos^2\vartheta\,,$$

also

$$\cos^2\Phi+\cos^2\vartheta=1-\cos^2\chi=\sin^2\chi\,.$$

Für unpolarisiertes Licht (jede Komponente hat im Mittel die halbe Intensität) gilt demnach

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega}=\alpha\,\frac{MK}{\hbar^2}\,(1+\beta)^2\,\frac{k^3 E_\gamma}{(k^2+K^2)^4}\,\sin^2\chi\,.}$$

Der auftretende Winkel liegt zwischen der Einfallsrichtung des Lichts und der Emissionsrichtung des Protons.

Nach §35 ist $\hbar K=\sqrt{M(BE)_d}$, wobei M die Nukleonenmasse und $(BE)_d$ die Bindungsenergie des Deuterons ist. Um die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts von der Quantenenergie zu diskutieren, benutzt man die Tatsache, daß die beiden Teilchen zur Verfügung stehende Energie gleich $E_\gamma-(BE)_d$ ist. Also

$$E_{\mathrm{End}}=\frac{\hbar^2 k^2}{M}=E_\gamma-(BE)_d\,.$$

Setzt man zur Abkürzung $\eta=\frac{E_\gamma}{(BE)_d}$, so wird

$$\hbar^2 k^2=M(BE)_d(\eta-1)\,,$$

und es ergibt sich

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\underbrace{\frac{\alpha\,\hbar^2 c^2}{M c^2 (BE)_d}}_{1{,}32\ \mathrm{mb}}(1+\beta)^2\,\frac{(\eta-1)^{\frac{3}{2}}}{\eta^3}\,\sin^2\chi\,. \qquad (47.10)$$

Integration über den gesamten Raumwinkel liefert wegen

$$2\pi\int\limits_0^{\pi/2}\sin^3\chi\,d\chi=\frac{8\pi}{3}$$

den folgenden Ausdruck für den integralen Wirkungsquerschnitt für die Photospaltung des Deuterons bei unpolarisierter γ-Strahlung, unpolarisiertem Target und elektrischer Dipolabsorption:

$$\boxed{\sigma=\frac{8\pi}{3}\cdot 1{,}32\ \mathrm{mb}\cdot(1+\beta)^2\,\frac{(\eta-1)^{\frac{3}{2}}}{\eta^3}\,.} \qquad (47.11)$$

Wenn die Quantenenergie nur wenig über der Schwellenenergie liegt, also $\eta - 1 \ll 1$ ist, wächst der Wirkungsquerschnitt etwa mit $(E_\gamma - (BE)_d)^{\frac{3}{2}}$. Die Funktion $(\eta - 1)^{\frac{3}{2}}/\eta^3$ hat ihr Maximum bei $\eta = 2$, d.h. $E_\gamma = 2(BE)_d$, und nimmt dort den Wert $\frac{1}{8}$ an. Der maximale Wirkungsquerschnitt hat damit die Größe

$$\sigma_{\max} = 1{,}38\,(1+\beta)^2\ [\mathrm{mb}]\,.$$

Für hohe γ-Energien ($\eta \gg 1$) ist σ proportional zu $E_\gamma^{-\frac{3}{2}}$.

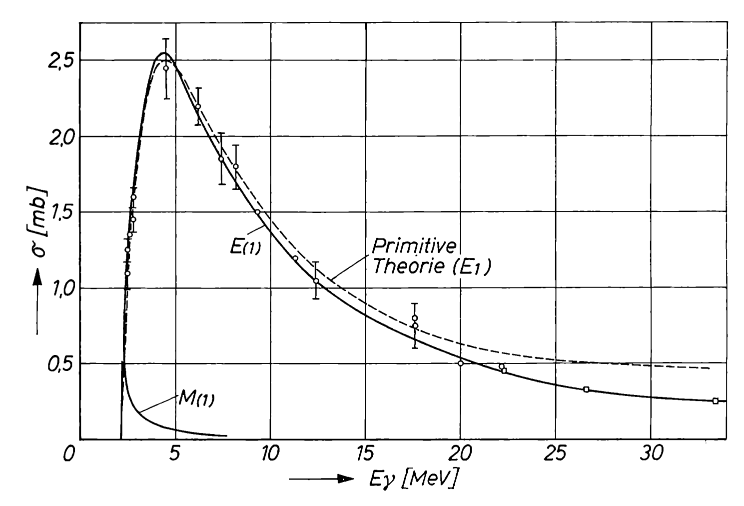


Fig. 47.5. Wirkungsquerschnitt für die Photospaltung des Deuterons. Meßpunkte nach FULLER und HAYWARD in Nuclear Reactions II, edited by ENDT und SMITH, North-Holland Publ. Co., Amsterdam 1962, Seite 173. Die ausgezogen Kurve $E(1)$ wurde von HULTHÉN und NAGEL, Phys. Rev. **90**, 62 (1953), unter Benutzung eines YUKAWA-Potentials (s. § 37) berechnet; die gestrichelte Kurve ergibt sich aus (47.11), wenn man $\beta = 0{,}35$ wählt. Die Kurve $M(1)$ stellt den Wirkungsquerschnitt für magnetische Photospaltung dar

Der gemessene Wirkungsquerschnitt (s. Fig. 47.5) zeigt im wesentlichen den mit der obigen simplen Theorie vorhergesagten Verlauf; Vergleich der Absolutwerte liefert aus der Größe β einen Wert für b, der innerhalb der Fehlergrenzen mit dem in § 35 angegebenen Wert

$$b = 2 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{cm}$$

verträglich ist. Der genaue Potentialverlauf geht nur als höhere Näherung in die Rechnung ein, so daß sich darüber aus dem Wirkungsquerschnitt für die Photospaltung des Deuterons keine Aussage machen läßt.

Es ist bemerkenswert, daß die Theorie trotz der vielen vereinfachenden Annahmen die experimentellen Resultate befriedigend erklärt. Exaktere

Rechnungen mit Hilfe der Quantenelektrodynamik bringen nur kleine Korrekturen. Einer der Gründe dafür ist, daß der Ansatz der (kräftefreien) ebenen Wellenbewegung im Endzustand wegen der sehr schwachen $^3P_1$-Kernkräfte offenbar eine recht gute Näherung darstellt (der elektrische Dipolübergang ist im Quantenzahlenbild ein Übergang vom $^3S_1$-Grundzustand des Deuterons in den ungebundenen $^3P_1$-Zustand).

Neben dem oben berechneten elektrischen Dipolübergang gibt es noch einen magnetischen Dipolübergang vom Zustand $^3S_1$ in den ungebundenen Zustand $^1S_0$. Als Wechselwirkungsoperator setzt man dabei an

$$W = -(\vec{\mu}_d \vec{H}) = \frac{\mu_K}{\hbar} H_z (g_{s\,p} S_{p\,z} + g_{s\,n} S_{n\,z}),$$

vgl. (38.1); im $^3S_1$-Ausgangszustand ist $L_p=0$ und $L_n=0$. $H=H_z$ ist das magnetische Wechselfeld der Lichtwelle.

Für ψ_0 muß man (35.2) einschließlich der Spinfunktionen benutzen, über die drei Möglichkeiten $m_s=+1, 0, -1$ wird gemittelt. Der so berechnete Wirkungsquerschnitt* bringt nur unmittelbar oberhalb der Schwelle einen merklichen Beitrag zum Gesamtwirkungsquerschnitt (s. Fig. 47.5); seine Winkelabhängigkeit ist im Gegensatz zu dem der elektrischen Dipolabsorption isotrop.

Die magnetische Photospaltung ist der Umkehrprozeß zum Neutroneneinfang durch das Proton [dem $p(n, \gamma)\, d$-Prozeß]; hier sind die Quantenzahlen im Ausgangszustand $S=0$, $L=0$ und im Endzustand $S=1$, $L=0$.

XIV. Spontaner Kernzerfall, Spin und Parität angeregter Kernzustände

In diesem Kapitel werden einfache theoretische Ansätze für die Berechnung der in §12 eingeführten Zerfallswahrscheinlichkeiten beim α-, β- und γ-Zerfall vorgeführt.

Die GAMOWsche Theorie des α-Zerfalls (§48) beruht auf der Vorstellung, daß das α-Teilchen nur aufgrund des quantenmechanischen Tunneleffektes (vgl. §22) den COULOMB-Wall eines Kerns durchdringen und den Kern verlassen kann. Eine Überschlagsrechnung ergibt Zerfallskonstanten, die mit dem Experiment einigermaßen übereinstimmen.

Bei der Betrachtung des γ-Zerfalls (§49) wird aus der Multipolentwicklung der elektromagnetischen Feldgrößen eine Klassifizierung der Strahlungsübergänge abgeleitet. Die Wahrscheinlichkeit für spontanen γ-Zerfall wird „halbklassisch“ berechnet, da die Darstellung der für eine exakte

* Ausführliche Rechnung s. R. G. SACHS, Nuclear Theory, Addison-Wesley, 1953, Chapter 6.5.

Theorie benötigten Quantenelektrodynamik den Rahmen dieses Buches sprengen würde. Auf den Prozeß der inneren Konversion und auf die Winkelkorrelationen sukzessiver γ-Übergänge wird kurz eingegangen.

In § 50 wird der β-Zerfall mit dem Ziel untersucht, die Form der β-Spektren und die Klassifizierung der Übergänge nach den sogenannten fT-Werten verständlich zu machen. Die Kernmatrixelemente und das Phänomen der Nichterhaltung der Parität beim β-Zerfall werden hier nicht quantitativ diskutiert.

Manche experimentellen Daten bei β- und γ-Zerfall erlauben Schlüsse auf die Quantenzahlen für Spin und Parität von angeregten Kernzuständen. Hierauf wird jeweils aufmerksam gemacht.

Obwohl die behandelten theoretischen Ansätze der methodischen Verfeinerung bedürfen und die benutzten Kernmodelle recht primitiv sind, erreicht man in vielen Fällen eine ausreichende Übereinstimmung mit den experimentellen Daten. Dies rechtfertigt einen Verzicht auf die Darstellung der mathematisch oft komplizierten exakteren Rechnungen.

§ 48. Elementare Theorie des α-Zerfalls

Wie bereits mehrfach erwähnt, sind eine Anzahl – meist schwerer – Kerne schon im Grundzustand instabil gegen die Emission eines α-Teilchens, nämlich immer dann, wenn die Ungleichung

$$Q = ({}_Z M_N^A - {}_{Z-2} M_{N-2}^{A-4} - m_{\mathrm{He}^4})\, c^2 > 0$$

erfüllt ist, d.h. wenn beim Zerfall Energie frei wird (zusätzlich müssen Drehimpuls- und Paritätserhaltung gewährleistet sein). Erst recht gilt dies für viele angeregte Zustände.

Daß ein solcher Zerfall nicht notwendig innerhalb eines sehr kleinen Zeitintervalles nach der Bildung des Zustandes stattfindet, wie dies bei den in Kernreaktionen auftretenden, im allgemeinen hoch angeregten Compoundzuständen oft der Fall ist, hat seinen Grund in der Existenz des Coulomb-Walles, der das α-Teilchen am Verlassen des Kerns hindert. Nach (44.8) ist die Durchdringungswahrscheinlichkeit T^2 des Walles für ein α-Teilchen der Ladung $z=2$, das nach der Emission die (nicht-relativistische) Geschwindigkeit v und den Bahndrehimpuls $l=0$ gegen den Restkern hat, gegeben durch

$$T^2 \approx \exp\left\{-4\alpha Z \frac{c}{v}\left[-\sqrt{\frac{R}{R+\Delta}\left(1-\frac{R}{R+\Delta}\right)} + \arccos\sqrt{\frac{R}{R+\Delta}}\right]\right\}; \quad (48.1)$$

dabei ist α die Feinstrukturkonstante (5.9); die Bedeutung der Strecke Δ ist aus Fig. 44.2 ersichtlich.

Die Zerfallswahrscheinlichkeit λ (gemessen z.B. in $\sec^{-1}$) erhält man durch folgende Überlegung: Das α-Teilchen* bewegt sich im Kern mit einer Geschwindigkeit V, es wird also (klassisch) mit einer „Klopffrequenz"

$$\nu \approx \frac{V}{R} \tag{48.2}$$

an die Schwelle anstoßen (R = Kernradius). Die Durchlaßwahrscheinlichkeit bei einmaligem Anklopfen ist T^2, also ist die Wahrscheinlichkeit, daß das α-Teilchen pro Zeiteinheit den Kern verläßt, gegeben durch

$$\lambda = \nu T^2.$$

Durch Reihenentwicklung ergibt sich für die eckige Klammer in (48.1) in der Näherung $R \ll \Delta$

$$\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{R}{R+\Delta}} = \frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_0 E R}{2Ze^2}}$$

und damit

$$\boxed{\ln\lambda \approx \ln\frac{V}{R} - \frac{4\pi Z\alpha c}{v} + \frac{8}{\hbar}\sqrt{\mu R Z \alpha \hbar c}.} \tag{48.3}$$

Diese erstmals von GAMOW abgeleitete Beziehung reproduziert das experimentell schon lange bekannte Gesetz von GEIGER und NUTTALL, nach dem Zerfallskonstante und α-Energie wie

$$\ln\lambda = a - \frac{b}{\sqrt{E}}$$

verknüpft sein sollten.

(48.3) zeigt eine starke Abhängigkeit der Zerfallskonstanten vom Kernradius. Der aus dem Vergleich mit experimentellen Daten des α-Zerfalls ermittelte Wert

$$R \approx (1{,}48 \cdot 10^{-13}\,\text{cm})\, A^{\frac{1}{3}}$$

enthält allerdings einen Fehler, der durch die Nichtbeachtung der „Größe" des α-Teilchens bedingt ist. Der Zahlenwert ist daher nur als obere Grenze brauchbar (vgl. die in § 34 beschriebenen genaueren Methoden).

Obwohl (48.3) unter sehr vereinfachenden Annahmen hergeleitet wurde (Kastenpotential, vorgebildetes α-Teilchen im Kern), gibt der Ausdruck die experimentellen Tatsachen bis auf etwa einen Faktor 50 richtig wieder.

* Die Frage, ob und wieviele vorgebildete α-Teilchen im Kern vorhanden sind oder ob sie erst im Moment des Zerfalls gebildet werden, ist noch offen. Jedoch ergibt die Annahme, daß in einem schweren Kern im Mittel etwa 1 bis 10 α-Teilchen am Kernrand existieren, keinen Widerspruch mit dem Experiment. Hier wird mit einem α-Teilchen gerechnet.

Diese Genauigkeit ist zufriedenstellend, wenn man bedenkt, daß die Halbwertszeiten der natürlichen α-Strahler zwischen $3 \cdot 10^{-7}$ sec ($\mathrm{ThC'} = \mathrm{Po}^{212}$) und mehr als 10^{15} y liegen. Ein Teil der Diskrepanzen zwischen Theorie und Experiment kann durch Schaleneffekte erklärt werden *.

Zum weiteren Verständnis seien noch einige Hinweise zur GAMOW-Theorie angefügt:

1. Für $l > 0$ tritt zum COULOMB-Wall die Zentrifugalbarriere hinzu, die den zu durchdringenden Potentialwall erhöht. Statt (48.1) wird die Durchdringungswahrscheinlichkeit gegeben durch

$$T^2 \approx \exp\left\{-2 \int\limits_R^{R+\Delta} \frac{1}{\hbar} \sqrt{2\mu\left(\frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{\hbar^2\, l(l+1)}{2\mu r^2} - E\right)}\, dr\right\}.$$

Für große Z ist der Einfluß des Zentrifugalgliedes klein gegen den COULOMB-Term; dann hängt die Zerfallswahrscheinlichkeit nicht stark von der Bahndrehimpulsquantenzahl l ab ** (Beispiel s. Tabelle 48.1).

Tabelle 48.1. *α-Zerfallswahrscheinlichkeiten für verschiedene Bahndrehimpulsquantenzahlen l. Berechnet für* $Z_{\mathrm{Tochter}} = 86$ *(d.h. für den Zerfall des Ra);* $\frac{1}{2} m_\alpha v^2 = 4{,}88$ *MeV;* $R = 9{,}87 \cdot 10^{-13}$ *cm. Nach* J. M. BLATT *und* V. F. WEISSKOPF, *Theoretical Nuclear Physics, Wiley, 1952, Chap. XI 3*

l	0	1	2	3	4	5	6
λ_l/λ_0	1	0,7	0,37	0,137	0,037	0,0071	0,0011

Welche Bahndrehimpulsquantenzahlen bei einem Übergang in Frage kommen, wird durch die Erhaltungssätze für Drehimpuls und Parität bestimmt (vgl. Beispiel in Fig. 48.1).

2. Bereits am Schluß von §41 haben wir gesehen, daß ein zerfallender Zustand durch eine komplexe Energie beschrieben werden kann. Es ist möglich, einen ähnlichen Formalismus auch im Fall des α-Zerfalls anzuwenden und dabei gleichzeitig einen Einblick in das Verhalten eines zeitlich veränderlichen quantenmechanischen Systems zu gewinnen.

Hinsichtlich der Unterscheidung zwischen freien (ungebundenen) und gebundenen Teilchen nimmt das α-Teilchen in unserem Zusammenhang

* Siehe z.B. R. D. EVANS, The Atomic Nucleus, McGraw-Hill, 1955, Chap. 2 und 16. Eine Theorie, die den α-Zerfall von Kernen in der Nähe des doppelt magischen Kerns Pb^{208} nach dem Schalenmodell behandelt, erreicht — mit größerem mathematischen Aufwand — eine quantitativ bessere Übereinstimmung; siehe H. J. MANG, Sitz. Ber. d. Heidelb. Akad. d. Wiss., 1959, Seite 299.

** Aber beim γ-Zerfall ist $\lambda_l/\lambda_{l+1} \approx 100$, siehe (49.24).

eine Mittelstellung ein. Vor dem Zerfall ist es im Kern gebunden, aber es existiert eine endliche Wahrscheinlichkeit dafür, daß es den gebundenen Zustand verläßt und sich außerhalb als völlig freies Teilchen bewegt.

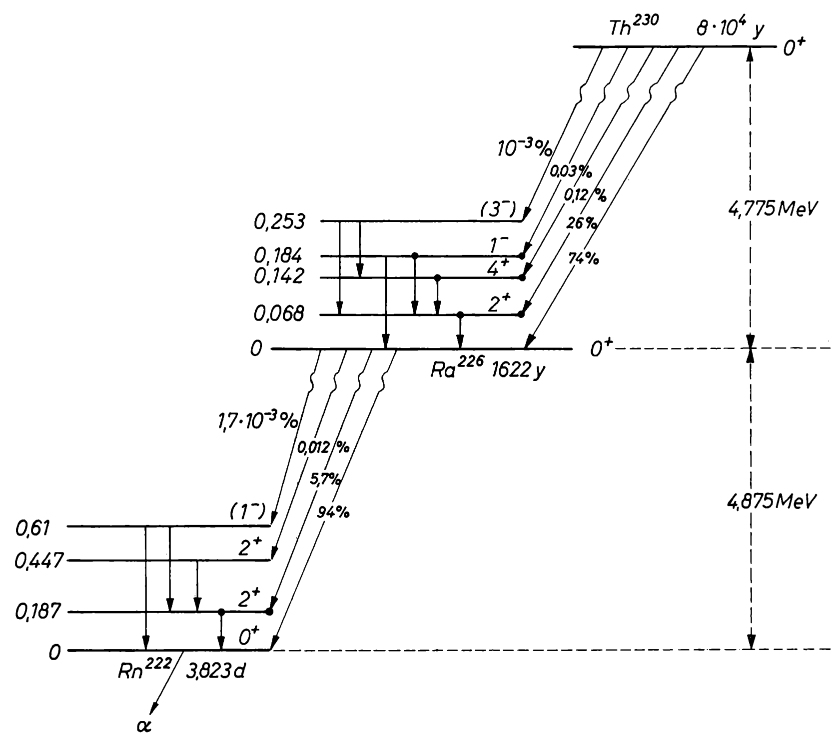


Fig. 48.1. Zerfallsschemen der α-Strahler Th^{230} und Ra^{226}, die in der Zerfallskette des U^{238} vorkommen. Beachte die starke Abhängigkeit der Zerfallswahrscheinlichkeit von der Energiedifferenz und die verhältnismäßig schwache Abhängigkeit vom Drehimpulsunterschied der beteiligten Niveaus

Zur quantenmechanischen Beschreibung nehmen wir an, daß für Zeiten $t<0$ ein fest gebundener Zustand existiere, während für $t\geqq 0$ der Tunneleffekt möglich sein soll. Für $t<0$ läßt sich die Wellenfunktion aus der SCHRÖDINGER-Gleichung

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+V\right)\psi=-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}=E\psi \tag{48.4}$$

gewinnen; die gebundenen Zustände werden dargestellt durch die normierbaren Funktionen

$$\psi_{n\,(\vec{r},\,t)}=\varphi_{n\,(\vec{r})}\,e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}, \qquad \text{wobei } |\vec{r}\,|\leqq R\,.$$

Für $t \geqq 0$ muß die Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Bindungsbereich (Index i, „innen") abnehmen:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \int_0^R \psi_i^* \psi_i \, d\tau < 0 .$$

Damit verläßt ein nach außen gerichteter Teilchenstrom der Größe

$$(j)_{r=R} = \frac{1}{4\pi R^2} \frac{dW}{dt}$$

den Kern (hierbei ist angenommen, daß ψ_i kugelsymmetrisch ist, also nur von r abhängt).

Für $r > R$ (Außenraum, Index a) wird im einfachsten Fall eine auslaufende Kugelwelle erwartet, die durch den Ansatz

$$\psi_{a\,(r,t)} = \sqrt{C\,W_{(t)}} \, \frac{e^{ikr}}{r} \, e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \quad \text{für} \quad r > R \tag{48.5}$$

mit

$$k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE} = \frac{mv}{\hbar}$$

beschrieben werde. Die Funktion sei normiert. Damit an der Stelle $r = R$ zu allen Zeiten eine stetige Anpassung von ψ_i an ψ_a möglich ist, muß die Normierungskonstante $\sqrt{C\,W_{(t)}}$ von der Zeit abhängen.

Der Teilchenstrom durch die Kernoberfläche ergibt sich aus der Definition (40.2) unter Benutzung von (48.5) zu

$$(j)_{r=R} = -\frac{\hbar}{2im} C W \frac{2ik}{R^2} = -\frac{1}{R^2} v\, C W .$$

Oben war $(j)_{r=R} = \frac{1}{4\pi R^2} \frac{dW}{dt}$; Gleichsetzen beider Ausdrücke und Integration liefert für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit W des α-Teilchens im Kern bei zeitunabhängigem C

$$W = W_0 \, e^{-4\pi v C t} .$$

Einsetzen in (48.5) führt auf

$$\psi_{a\,(r,t)} = \sqrt{C W_0} \, \frac{e^{ikr}}{r} \, e^{-\frac{i}{\hbar}Et - 2\pi v C t} .$$

Leider erfüllt diese Wellenfunktion die SCHRÖDINGER-Gleichung nicht. Durch einen kleinen Eingriff kann man aber diese Schwierigkeit beseitigen. Zunächst definiert man

$$E' = E - 2\pi i \hbar v C .$$

Mit den am Ende von §41 hergeleiteten Beziehungen ergibt sich hieraus die Lebensdauer des Zustandes zu

$$\tau=\frac{1}{4\pi v C}. \tag{48.6}$$

Man ersetzt nun k durch

$$k'=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE'}=k\sqrt{1-i\,2\pi\,\hbar\frac{C\,v}{E}}=k\sqrt{1-i\frac{4\pi\,\hbar\,C}{m\,v}}$$
$$\approx k-2\pi\,i\,C.$$

Die benutzte Annahme $|2\pi\,C|\ll k$ ist nach (48.6) gleichbedeutend mit $\tau\gg\hbar/4E_\alpha$. Bei Zerfallsenergien der Größenordnung MeV heißt das $\tau\gtrsim 10^{-20}$ sec. Da dies im allgemeinen zutrifft, ist auch $|k'|-|k|\ll 1$, also ändert sich die Wellenfunktion nur wenig. Sie befriedigt nunmehr die zeitabhängige SCHRÖDINGER-Gleichung und lautet

$$\psi_{a\,(r,t)}=\sqrt{C W_0}\,\frac{e^{i k' r}}{r}\,e^{-\frac{i}{\hbar}E' t}. \tag{48.7}$$

Durch das komplexe k' enthält $\psi_{a(r,t)}$ den Faktor $e^{2\pi C r}$, wächst also exponentiell nach außen an (wenn auch für große Lebensdauern sehr langsam). Dies hat den anschaulichen Grund, daß der weiter außen liegende Anteil der Wellenfunktion einem Emissionszeitpunkt entspricht, bei dem die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des α-Teilchens im Kern noch größer war.

Zur Normierung von $\psi_{a(r,t)}$ und damit zur Bestimmung der Konstanten C hilft folgende Überlegung: Wenn der Zerfall bei $t=0$ begonnen hat, kann das α-Teilchen nach der Zeit T höchstens die Strecke vT durchlaufen haben. Für $r>vT$ muß $\psi_a=0$ sein. Die Normierungsvorschrift lautet dann

$$\int_0^{r=R}|\psi_i|^2\,d\tau+\int_{r=R}^{vT}|\psi_a|^2\,d\tau=1.$$

Hieraus würde sich bei Kenntnis von ψ_i für $t>0$ die Größe von C ergeben; wir wählen jedoch einen anderen Weg.

Um die Lebensdauer nach (48.6) zu berechnen, ist eine Abschätzung der Größe der Normierungskonstanten C erforderlich. Wir betrachten die Austrittswahrscheinlichkeit des α-Teilchens aus dem Kern, d.h. an der Stelle $r=R$. Durch Anwendung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung erhält man zur Zeit $t=0$

$$W_0=\int_0^R|\psi_i|^2\,d\tau=\overline{|\psi_i|^2}\,\frac{4\pi}{3}R^3.$$

Andererseits ist nach (48.7) und wegen $CR\ll 1$ bei $t=0$

$$(|\psi_a|^2)_{r=R}=C W_0\,\frac{1}{R^2}\,e^{2\pi C R}\approx\frac{C W_0}{R^2}.$$

Daraus berechnet sich das Verhältnis der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten im Außen- bzw. Innenraum, also die Durchdringungswahrscheinlichkeit des Kernrandes von innen, zu

$$T^2 \approx \frac{|\psi_a|^2}{|\psi_i|^2} \approx \frac{4\pi}{3} CR .$$

Setzt man die Größe C hieraus in (48.6) ein, so erhält man

$$\lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{3v}{R} T^2 ,$$

ein Ausdruck, der für die „Klopffrequenz" des α-Teilchens bis auf einen Zahlenfaktor $\frac{3v}{V}$ (Größenordnung Eins) denselben Wert liefert wie (48.2).

§ 49. Multipolentwicklung des Strahlungsfeldes und γ-Zerfall

Beim spontanen Übergang von einem Kernniveau in ein energetisch um E^* niedriger liegendes desselben Kerns wird entweder elektromagnetische Strahlung emittiert oder die freiwerdende Energie wird auf eins der Hüllenelektronen übertragen, das dann mit der kinetischen Energie

$$(KE)_e = E^* - (BE)_e$$

das System verläßt (Innere Konversion, s. § 11).

Wir betrachten zunächst den Fall des Strahlungsüberganges und wollen die Übergangswahrscheinlichkeit näherungsweise berechnen unter der Annahme $\kappa R \ll 1$ ($\vec{\kappa}$ = Wellenvektor des ausgesandten Lichtquants, R = Kernradius). Diese Annahme bedeutet, daß die Wellenlänge der Strahlung groß sein soll gegen die Abmessungen des Strahlers:

$$\kappa R = \frac{R}{\lambda\!\!\!^{-}} = \frac{R\omega}{c} \frac{\hbar}{\hbar} = \frac{RE^*}{\hbar c} \ll 1 ,$$

wobei wegen der Energieerhaltung $\hbar\omega = E^*$ ist. Also muß gelten

$$E^* \ll \frac{\hbar c}{R} \approx 20 \,\text{MeV}.$$

Dies ist normalerweise erfüllt, weil oberhalb der Teilchenbindungsenergie die Teilchenemission gegenüber der elektromagnetischen Quantenemission stark bevorzugt ist, so daß keine γ-Quanten mit Energien über 10 bis 20 MeV aus dem Kernzerfall zu erwarten sind.

Die folgende Rechnung wird nur zum Teil quantenmechanisch durchgeführt. Eine exakte Beschreibung des Emissionsprozesses ist nur mit Hilfe der Quantenelektrodynamik möglich, die auch die Quantelung des elektromagnetischen Feldes berücksichtigt. Diese Theorie soll hier nicht dargestellt werden, wir wollen vielmehr das klassische MAXWELL-Feld zugrunde legen.

Im Vakuum gelten nach MAXWELL für die elektrische Feldstärke $\vec{\mathscr{E}}$ und die magnetische Feldstärke $\vec{\mathscr{H}}$ die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\text{a)}\quad \operatorname{rot}\vec{\mathscr{H}}=\varepsilon_0\frac{\partial\vec{\mathscr{E}}}{\partial t}; &&\text{b)}\quad \operatorname{rot}\vec{\mathscr{E}}=-\mu_0\frac{\partial\vec{\mathscr{H}}}{\partial t}\\ &\text{c)}\quad \operatorname{div}\vec{\mathscr{H}}=0; &&\text{d)}\quad \operatorname{div}\vec{\mathscr{E}}=0.\end{aligned}\right\}\qquad(49.1)$$

Die Lösungen dieser Gleichungen kann man als Superposition von ebenen Wellen schreiben. Diese Darstellung interessiert aber in unserem Zusammenhang weniger; wir wollen vielmehr nach Lösungen suchen, die durch die Drehimpulseigenschaften des Feldes charakterisiert sind („Multipolfelder"). Mit diesen wird dann die Wahrscheinlichkeit für spontane γ-Emission berechnet.

a) Multipoldarstellung der Lösungen der MAXWELL-Gleichungen

Ein elektromagnetisches Feld kann man allgemein darstellen als

$$\vec{\mathscr{E}}=\int\left(\vec{E}_{(\vec{r},\omega)}\,e^{-i\omega t}+\vec{E}^{*}_{(\vec{r},\omega)}\,e^{+i\omega t}\right)d\omega$$
$$\vec{\mathscr{H}}=\int\left(\vec{H}_{(\vec{r},\omega)}\,e^{-i\omega t}+\vec{H}^{*}_{(\vec{r},\omega)}\,e^{+i\omega t}\right)d\omega\,.$$

Aus (49.1) ergeben sich für die zeitunabhängigen Größen $\vec{E}$ und $\vec{H}$ die Gleichungen

$$\operatorname{rot}\vec{H}=-i\,\omega\,\varepsilon_0\,\vec{E};\qquad \operatorname{rot}\vec{E}=i\,\omega\,\mu_0\,\vec{H}\,.\qquad(49.2)$$

Nochmalige Anwendung des Operators rot ergibt mit $\kappa=\omega/c$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{H}&=\omega^2\,\varepsilon_0\,\mu_0\,\vec{H}=\kappa^2\,\vec{H}; &(\operatorname{rot}\operatorname{rot}-\kappa^2)\,\vec{H}&=0\\ \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E}&=\omega^2\,\varepsilon_0\,\mu_0\,\vec{E}=\kappa^2\,\vec{E}; &(\operatorname{rot}\operatorname{rot}-\kappa^2)\,\vec{E}&=0\,.\end{aligned}\right\}\qquad(49.3)$$

Als nächstes versuchen wir, $\vec{E}$ und $\vec{H}$ mit Hilfe der Drehimpulsvektoren und -eigenfunktionen darzustellen. Dabei soll uns der folgende Gedankengang leiten: Wenn es gelingt, einen Drehimpulsoperator zu finden, der mit $(\operatorname{rot}\operatorname{rot}-\kappa^2)$ kommutiert, dann hat er nach § 23 d 3 – bis auf einen konstanten Faktor – die gleichen (hier: vektoriellen) Eigenfunktionen wie $\vec{E}$ und $\vec{H}$. Die Feldstärken können dann durch diese Eigenfunktionen ausgedrückt werden.

Leider kommutiert der Operator rot nicht mit den Operatoren

$$L_z = \frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

und

$$L^2 = (\vec{r}\times\vec{p})^2 = -\hbar^2(\vec{r}\times \text{grad})^2.$$

Denn für eine beliebige Vektorfunktion

$$\vec{C}_{(x,y,z)} = \vec{i}\,C_x + \vec{j}\,C_y + \vec{k}\,C_z,$$

wobei $\vec{i}$, $\vec{j}$ und $\vec{k}$ die kartesischen Einheitsvektoren sind (s. § 1), gelten die folgenden Kommutationsregeln, wie man durch elementares Ausdifferenzieren bestätigt:

$$\frac{i}{\hbar}(\text{rot}\,L_z\vec{C} - L_z\,\text{rot}\,\vec{C})_x = -\frac{\partial C_z}{\partial x},$$

$$\frac{i}{\hbar}(\text{rot}\,L_z\vec{C} - L_z\,\text{rot}\,\vec{C})_y = -\frac{\partial C_z}{\partial y},$$

$$\frac{i}{\hbar}(\text{rot}\,L_z\vec{C} - L_z\,\text{rot}\,\vec{C})_z = \frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y}.$$

Um vollständige Kommutation zu erreichen, muß man z.B. zu L_z einen Operator S_z addieren, der durch

$$S_z = i\hbar\,\vec{k}\times$$

definiert wird. Wenn $\vec{C}$ ein beliebiger Vektor ist, bedeutet dies

$$S_z\vec{C} = i\hbar\,\vec{k}\times\vec{C}.$$

Durch Ausdifferenzieren erhält man

$$\frac{i}{\hbar}(\text{rot}\,S_z\vec{C} - S_z\,\text{rot}\,\vec{C}) = \vec{i}\,\frac{\partial C_z}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial C_z}{\partial y} - \vec{k}\left(\frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y}\right),$$

d.h. die Größe

$$J_z = L_z + S_z$$

kommutiert mit dem Operator rot gemäß der Gleichung

$$(J_z\,\text{rot} - \text{rot}\,J_z)\,\vec{C} = 0.$$

Auch zu L_x und L_y müssen ähnliche Operatoren S_x und S_y addiert werden; die entsprechenden Ausdrücke sind

$$\frac{i}{\hbar}J_x = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y} - \vec{i}\times$$

$$\frac{i}{\hbar}J_y = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z} - \vec{j}\times.$$

Definiert man ferner den Operator J^2 durch

$$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2,$$

so ergibt sich durch Ausdifferenzieren

$$J^2 \operatorname{rot} - \operatorname{rot} J^2 = 0,$$

d.h. die Operatoren J_z und J^2 kommutieren mit dem Operator rot.

Zur Interpretation der Größen S_x, S_y, S_z und J_x, J_y, J_z:

α) Behauptung: $S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = 2\hbar^2$.

Beweis:

$$\begin{aligned} S^2 \vec{C} &= (S_x^2 + S_y^2 + S_z^2)\, \vec{C} \\ &= \left(-\frac{\hbar}{i}\vec{i}\times\right)\left(-\frac{\hbar}{i}\vec{i}\times\right)\vec{C} + \\ &\quad + \left(-\frac{\hbar}{i}\vec{j}\times\right)\left(-\frac{\hbar}{i}\vec{j}\times\right)\vec{C} + \left(-\frac{\hbar}{i}\vec{k}\times\right)\left(-\frac{\hbar}{i}\vec{k}\times\right)\vec{C} \\ &= -\hbar^2 [(\vec{i}\times\vec{i}\times\vec{C}) + (\vec{j}\times\vec{j}\times\vec{C}) + (\vec{k}\times\vec{k}\times\vec{C})]. \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \vec{i}\times\vec{C} &= -\vec{j}\,C_z + \vec{k}\,C_y; & \vec{i}\times\vec{i}\times\vec{C} &= -\vec{j}\,C_y - \vec{k}\,C_z, \\ \vec{j}\times\vec{C} &= \vec{i}\,C_z - \vec{k}\,C_x; & \vec{j}\times\vec{j}\times\vec{C} &= -\vec{i}\,C_x - \vec{k}\,C_z, \\ \vec{k}\times\vec{C} &= -\vec{i}\,C_y + \vec{j}\,C_x; & \vec{k}\times\vec{k}\times\vec{C} &= -\vec{i}\,C_x - \vec{j}\,C_y. \end{aligned}$$

Damit

$$S^2 \vec{C} = 2\hbar^2 \vec{C}.$$

Dies kann man zunächst rein formal darstellen als

$$S^2 \vec{C} = \hbar^2 s(s+1)\vec{C} \quad \text{mit} \quad s = 1.$$

β) Behauptung: $S_z = 0, \pm\hbar$.

Beweis:

$$\begin{aligned} S_z \vec{C} &= i\hbar\vec{k}\times\vec{C} = i\hbar(-\vec{i}\,C_y + \vec{j}\,C_x), \\ S_z^2 \vec{C} &= -\hbar^2 \vec{k}\times\vec{k}\times\vec{C} = \hbar^2(\vec{i}\,C_x + \vec{j}\,C_y), \\ S_z(S_z^2 \vec{C}) &= i\hbar^3 \vec{k}\times(\vec{i}\,C_x + \vec{j}\,C_y) = i\hbar^3(-\vec{i}\,C_y + \vec{j}\,C_x) \\ &= \hbar^2 (S_z \vec{C}). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$S_z(S_z^2 - \hbar^2)\vec{C} = 0.$$

Wenn $\vec{C} \neq 0$ ist, muß also $S_z = 0$ oder $S_z = \pm\hbar$ sein. Die Operatoren S^2 und S_z haben somit die Eigenwerte eines Drehimpulses der Quantenzahl 1.

γ) Behauptung: Für den Operator $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$ gelten die Vertauschungsrelationen (25.3) und (25.4), also

$$\vec{S}\times\vec{S} = i\hbar\vec{S} \quad \text{und} \quad S^2 S_z - S_z S^2 = 0.$$

Beweis für die x-Komponenten:

$$S_x \vec{C} = i\hbar\, \vec{i} \times \vec{C} = i\hbar(-\vec{j}\, C_z + \vec{k}\, C_y),$$
$$S_y \vec{C} = i\hbar\, \vec{j} \times \vec{C} = i\hbar(\vec{i}\, C_z - \vec{k}\, C_x),$$
$$S_z \vec{C} = i\hbar\, \vec{k} \times \vec{C} = i\hbar(-\vec{i}\, C_y + \vec{j}\, C_x).$$

Damit

$$(\vec{S} \times \vec{S})_x \vec{C} = (S_y S_z - S_z S_y)\vec{C} = -\hbar^2(\vec{k}\, C_y - \vec{j}\, C_z) = i\hbar\, S_x \vec{C}.$$

Der Beweis für die anderen Komponenten verläuft analog.

Weiter ist

$$\begin{aligned} S^2 S_z &= (S_x^2 + S_y^2 + S_z^2) S_z = S_x(S_z S_x - i\hbar S_y) + S_y(S_z S_y + i\hbar S_x) + S_z^3 \\ &= (S_z S_x - i\hbar S_y) S_x - i\hbar S_x S_y + (S_z S_y - i\hbar S_x) S_y + i\hbar S_y S_x + S_z^3 \\ &= S_z(S_x^2 + S_y^2 + S_z^2) = S_z S^2. \end{aligned}$$

Also hat der Operator $\vec{S}$ alle Eigenschaften eines Drehimpulsoperators.

δ) Behauptung: $\vec{L}$ und $\vec{S}$ sind vertauschbar.

Beweis: Durch elementares Ausdifferenzieren ergibt sich, daß

$$L_z \vec{S}\vec{C} = \frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) i\hbar \begin{Bmatrix} -\vec{j}\, C_z + \vec{k}\, C_y \\ \vec{i}\, C_z - \vec{k}\, C_x \\ -\vec{i}\, C_y + \vec{j}\, C_x \end{Bmatrix}$$

und

$$\vec{S} L_z \vec{C} = \hbar^2 \begin{Bmatrix} \vec{i}\times \\ \vec{j}\times \\ \vec{k}\times \end{Bmatrix} \left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) \begin{Bmatrix} \vec{i}\, C_x \\ \vec{j}\, C_y \\ \vec{k}\, C_z \end{Bmatrix}$$

identisch sind. Für die anderen Komponenten von $\vec{L}$ verläuft der Beweis analog.

ε) Behauptung: J^2 und J_z sind vertauschbar.

Beweis:

$$\begin{aligned} J^2 J_z &= (\vec{L} + \vec{S})^2 (L_z + S_z) \\ &= L^2 L_z + 2\vec{L}\vec{S} L_z + S^2 L_z + L^2 S_z + 2\vec{L}\vec{S} S_z + S^2 S_z \\ J_z J^2 &= (L_z + S_z)(L^2 + 2\vec{L}\vec{S} + S^2) \\ &= L_z L^2 + 2 L_z \vec{L}\vec{S} + L_z S^2 + S_z L^2 + 2 S_z \vec{L}\vec{S} + S_z S^2. \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} J^2 J_z - J_z J^2 = {} & (L^2 L_z - L_z L^2) + 2(\vec{L}\vec{S} L_z - L_z \vec{L}\vec{S}) + (S^2 L_z - L_z S^2) + \\ & + 2(\vec{L}\vec{S} S_z - S_z \vec{L}\vec{S}) + (S^2 S_z - S_z S^2). \end{aligned}$$

Nach γ), δ) und (25.4) ist sofort einzusehen, daß

$$L^2 L_z - L_z L^2 = 0; \qquad S^2 S_z - S_z S^2 = 0;$$
$$S^2 L_z - L_z S^2 = \vec{S}(\vec{S} L_z) - (L_z \vec{S})\vec{S} = \vec{S}(L_z \vec{S}) - (\vec{S} L_z)\vec{S} = 0;$$
$$L^2 S_z - S_z L^2 = 0.$$

Weiterhin bestätigt man durch Ausdifferenzieren, daß

$$(\vec{L}\vec{S} L_z - L_z \vec{L}\vec{S})\vec{C} = -\hbar^2[\vec{i} L_x C_z + \vec{j} L_y C_z - \vec{k}(L_x C_x + L_y C_y)]$$

und

$$(\vec{L}\vec{S} S_x - S_x \vec{L}\vec{S})\vec{C} = \hbar^2[\vec{i} L_x C_z + \vec{j} L_y C_z - \vec{k}(L_x C_x + L_y C_y)]$$

ist. Damit ist die Behauptung bewiesen.

ζ) Behauptung:

$$J_z \vec{L} = \vec{L} L_z.$$

Beweis:

$$J_z \vec{L} = L_z \vec{L} + S_z \vec{L}.$$

Nach (25.3) gilt

$$L_z L_x - L_x L_z = i\hbar L_y,$$
$$(S_z \vec{L})_x = i\hbar(\vec{k} \times \vec{L})_x = -i\hbar L_y,$$

also

$$(J_z \vec{L})_x = L_z L_x + (S_z \vec{L})_x = L_x L_z.$$

Damit ist der Beweis für die x-Komponente erbracht; die Beweisführung für die anderen Komponenten verläuft analog.

η) Behauptung:

$$J^2 \vec{L} = \vec{L} L^2.$$

Beweis: Es ist $J^2 = L^2 + 2\vec{L}\vec{S} + S^2$. Mit (25.4) läßt sich die Behauptung zurückführen auf

$$2(\vec{L}\vec{S})\vec{L} + S^2 \vec{L} = 0.$$

Nach δ) und α) ist

$$S^2 \vec{L} = \vec{S}(\vec{L}\vec{S}) = \vec{L} S^2 = 2\hbar^2 \vec{L}.$$

Benutzung von (25.3) liefert

$$\begin{aligned} 2(L_x S_x + L_y S_y + L_z S_z)\vec{L} &= 2i\hbar(L_x \vec{i} \times \vec{L} + L_y \vec{j} \times \vec{L} + L_z \vec{k} \times \vec{L}) \\ &= 2i\hbar(-L_x L_z \vec{j} + L_x L_y \vec{k} + L_y L_z \vec{i} - L_y L_x \vec{k} - L_z L_y \vec{i} + L_z L_x \vec{j}) \\ &= -2\hbar^2(L_x \vec{i} + L_y \vec{j} + L_z \vec{k}) = -2\hbar^2 \vec{L}. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Man bezeichnet $\vec{L}$ als Bahndrehimpulsoperator, $\vec{S}$ als Spindrehimpulsoperator und $\vec{J}$ als Gesamtdrehimpulsoperator (vgl. auch §25). Wir haben gesehen, daß die Gesamtdrehimpulsoperatoren J_z und J^2 untereinander und

mit dem Operator rot vertauschbar sind. Also ist

$$J_z \operatorname{rot}\operatorname{rot} = \operatorname{rot} J_z \operatorname{rot} = \operatorname{rot}\operatorname{rot} J_z ,$$
$$J^2 \operatorname{rot}\operatorname{rot} = \operatorname{rot} J^2 \operatorname{rot} = J^2 \operatorname{rot}\operatorname{rot} ,$$

daher sind J_z und J^2 auch mit rot rot und damit mit dem Operator (rot rot $-\kappa^2$) vertauschbar. Die gesuchten Eigenfunktionen von (49.3) sind also – bis auf einen konstanten Faktor – gleich denen der Operatoren J_z und J^2.

Behauptung: Die Eigenfunktionen zum Operator (rot rot $-\kappa^2$) haben die Form

$$\vec{B} = \vec{L} R_{L(r)} Y_{L,M(\vartheta,\varphi)}$$

mit

$$\vec{L} = \frac{\hbar}{i} \vec{r} \times \operatorname{grad}.$$

Beweis: Mit ζ) (s. Kleindruck) und (25.5) ist

$$J_z \vec{B} = J_z \vec{L} R_{L(r)} Y_{L,M(\vartheta,\varphi)} = \vec{L} L_z R_{L(r)} Y_{L,M(\vartheta,\varphi)}$$
$$= M\hbar \vec{L} R_{L(r)} Y_{L,M(\vartheta,\varphi)} = M\hbar \vec{B}$$

und mit η) und (25.6) entsprechend

$$J^2 \vec{B} = J^2 \vec{L} R_{L(r)} Y_{L,M(\vartheta,\varphi)} = \vec{L} L^2 R_L Y_{L,M} = \hbar^2 L(L+1) \vec{B}. \tag{49.4}$$

Für die Funktion $R_{L(r)}$ ergibt sich durch Einsetzen in

$$(\operatorname{rot}\operatorname{rot} - \kappa^2)\vec{B} = 0$$

die Differentialgleichung

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{L(L+1)}{r^2} + \kappa^2\right) R_{L(r)} = 0,$$

deren Lösung nach §22 die sphärischen BESSEL-Funktionen $j_{L(\kappa r)}$ sind.

Die vektoriellen Eigenfunktionen zum Operator (rot rot $-\kappa^2$) haben also die Form $c\,\vec{L} j_{L(\kappa r)} Y_{L,M(\vartheta,\varphi)}$, wobei c eine Konstante ist*.

Wegen (49.3) hat man die Wahl, ob man den elektrischen oder den magnetischen Feldvektor auf diese Weise darstellen will. Setzt man

$$\vec{H}^{(e)}_{L,M} = c^{(e)} \vec{L} j_{L(\kappa r)} Y_{L,M(\vartheta,\varphi)}, \tag{49.5}$$

---

* Die Funktionen $\dfrac{\vec{L} Y_{L,M}}{\sqrt{L(L+1)}}$ sind Spezialfälle der „Vektorkugelfunktionen". Siehe J. M. BLATT und V. F. WEISSKOPF, Theoretical Nuclear Physics, Addison-Wesley Pbl. Co., Inc., Cambridge, Mass., 1953, Anhang B.

so hat $\vec{H}$ keine Radialkomponente, da $L_r = 0$ ist. Man nennt solche Felder „elektrische Multipolfelder" [Index (e)]. Mit (49.2) folgt für die elektrische Feldstärke in diesem Fall

$$\vec{E}^{(e)}_{L,M} = -\frac{1}{i\,\omega\,\varepsilon_0}\, c^{(e)} \operatorname{rot} \vec{L} j_{L(\kappa r)}\, Y_{L,M(\vartheta,\varphi)}\,.$$

Setzt man andererseits

$$\vec{E}^{(m)}_{L,M} = c^{(m)}\, \vec{L} j_{L(\kappa r)}\, Y_{L,M(\vartheta,\varphi)}\,, \tag{49.6}$$

dann hat $\vec{E}$ keine Radialkomponente. Solche Felder heißen „magnetische Multipolfelder" [Index (m)]. Das zugehörige Magnetfeld ist nach (49.2)

$$\vec{H}^{(m)}_{L,M} = \frac{1}{i\,\omega\,\mu_0}\, c^{(m)} \operatorname{rot} \vec{L} j_{L(\kappa r)}\, Y_{L,M(\vartheta,\varphi)}\,. \tag{49.7}$$

Um die Konstanten $c^{(e)}$ und $c^{(m)}$ zu bestimmen, muß man die Felder in geeigneter Weise normieren. Dazu verlangt man, daß nach dem Emissionsakt eines γ-Quants, das ein Strahlungsfeld der Multipolordnung L und der Frequenz ω erzeugt, die Feldenergie gleich $\hbar\omega$ sein soll (dieser Ansatz bringt das Wirkungsquantum in die Rechnung hinein). Da eine elektromagnetische Welle im zeitlichen Mittel zur Hälfte elektrische und zur Hälfte magnetische Feldenergie enthält, muß dann gelten

$$2\tfrac{1}{2}\varepsilon_0 \int \overline{\mathscr{E}^2}\, dV = 2\tfrac{1}{2}\mu_0 \int \overline{\mathscr{H}^2}\, dV = \hbar\,\omega = \hbar\, c\,\kappa\,. \tag{49.8}$$

Dabei ist

$$\overline{\mathscr{E}^2} = 2\,|\vec{E}|^2\,; \qquad \overline{\mathscr{H}^2} = 2\,|\vec{H}|^2\,.$$

Um ein diskretes Spektrum für die möglichen Werte von ω (und damit für κ) zu erhalten, schließt man das Strahlungsfeld in eine große Kugel* vom Radius R_0 ein ($\kappa R_0 \gg 1$) und verlangt, daß die Feldstärken für $r = R_0$ verschwinden, also

$$j_{L(\kappa R_0)} = 0\,. \tag{49.9}$$

Setzt man (49.5) in (49.8) ein, so ergibt sich für elektrische Multipolstrahlung

$$\frac{\hbar\, c\,\kappa}{2\mu_0} = (c^{(e)})^2 \int\limits_0^{R_0} |j_{L(\kappa r)}|^2\, r^2\, dr \int (\vec{L} Y_{L,M})^* (\vec{L} Y_{L,M})\, d\Omega\,.$$

Das Winkelintegral ergibt mit (23.5), da $\vec{L}$ ein hermitischer Operator ist,

$$\int Y^*_{L,M}\, L^2\, Y_{L,M}\, d\Omega = \hbar^2\, L(L+1)\,.$$

* Die Größe der Kugel fällt im Ausdruck für die Übergangswahrscheinlichkeit heraus, wie z.B. auch die Normierungsvolumina V_a und V_b in § 44.

Im Radialintegral tragen im wesentlichen große Werte von r bei, so daß man $j_{L(\kappa r)}$ durch seine asymptotische Näherung für $r\to\infty$ ersetzen kann (s. §22):

$$\int_0^{R_0} |j_{L(\kappa r)}|^2 r^2\, dr \approx \frac{1}{\kappa^2}\int_0^{R_0} \cos^2\left[\kappa r - \frac{\pi}{2}(L+1)\right] dr \approx \frac{R_0}{2\kappa^2}.$$

Damit wird

$$(c^{(e)})^2 = \frac{\hbar c \kappa}{2\mu_0}\,\frac{2\kappa^2}{R_0}\,\frac{1}{\hbar^2 L(L+1)} = \frac{c\kappa^3}{\mu_0 \hbar R_0 L(L+1)}.$$

Setzt man (49.6) in (49.8) ein, so ergibt sich für magnetische Multipolstrahlung

$$(c^{(m)})^2 = \frac{c\kappa^3}{\varepsilon_0 \hbar R_0 L(L+1)}.$$

Damit lauten die Multipol-Entwicklungsglieder für das elektrische und magnetische Feld insgesamt

$$\left.\begin{aligned}
\vec{E}^{(e)}_{L,M} &= i\sqrt{\frac{c\kappa}{\varepsilon_0 \hbar R_0 L(L+1)}}\ \mathrm{rot}\,\vec{L} j_{L(\kappa r)}\, Y_{L,M(\vartheta,\varphi)}\\
\vec{H}^{(e)}_{L,M} &= \kappa\sqrt{\frac{c\kappa}{\mu_0 \hbar R_0 L(L+1)}}\ \vec{L} j_{L(\kappa r)}\, Y_{L,M(\vartheta,\varphi)}\\
\vec{E}^{(m)}_{L,M} &= \kappa\sqrt{\frac{c\kappa}{\varepsilon_0 \hbar R_0 L(L+1)}}\ \vec{L} j_{L(\kappa r)}\, Y_{L,M(\vartheta,\varphi)}\\
\vec{H}^{(m)}_{L,M} &= -i\sqrt{\frac{c\kappa}{\mu_0 \hbar R_0 L(L+1)}}\ \mathrm{rot}\,\vec{L} j_{L(\kappa r)}\, Y_{L,M(\vartheta,\varphi)}.
\end{aligned}\right\}\qquad (49.10)$$

Der bei $\vec{E}^{(e)}_{L,M}$ und $\vec{H}^{(m)}_{L,M}$ auftretende Operator rot $\vec{L}$ läßt sich nach der Vektorrechnung umschreiben auf

$$\mathrm{rot}\,\vec{L} = \frac{\hbar}{i}\left[\vec{r}\,\Delta - \mathrm{grad}\left(1 + r\frac{\partial}{\partial r}\right)\right]; \qquad (49.11)$$

dabei gilt

$$\Delta\left[j_{L(\kappa r)}\, Y_{L,M(\vartheta,\varphi)}\right] = -\kappa^2 j_{L(\kappa r)}\, Y_{L,M(\vartheta,\varphi)}.$$

Für die Funktion $j_{L(\kappa r)}$ gibt es nach § 22 eine Rekursionsformel und eine Differentialrelation, sie ergeben

$$\begin{aligned}
r\frac{\partial}{\partial r} j_{L(\kappa r)} &= \kappa r\, j_{L-1(\kappa r)} - (L+1)\, j_{L(\kappa r)}\\
&= L j_{L(\kappa r)} - \kappa r\, j_{L+1(\kappa r)}.
\end{aligned}$$

Damit wird

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{rot}\vec{L} j_{L\,(\kappa r)}\, Y_{L,M\,(\vartheta,\varphi)} = \\ &= \frac{\hbar}{i}\left[-\kappa^2 \vec{r} - (L+1)\operatorname{grad}\right] j_{L\,(\kappa r)}\, Y_{L,M} + \frac{\hbar}{i}\operatorname{grad}\left[\kappa r\, j_{L+1\,(\kappa r)}\, Y_{L,M}\right].\end{aligned}\right\} \quad (49.12)$$

Aus der Darstellung (49.10) sieht man, daß $\vec{H}^{(e)}_{L,M}$ und $\vec{E}^{(m)}_{L,M}$ die Parität $(-1)^L$, $\vec{E}^{(e)}_{L,M}$ und $\vec{H}^{(m)}_{L,M}$ die Parität $(-1)^{L+1}$ haben, denn $Y_{L,M}$ hat die Parität $(-1)^L$, $\vec{L}$ die Parität $(+1)$ und der Operator rot die Parität (-1). Da $Y_{0,0}$ konstant ist, entnimmt man den Gleichungen (49.10) weiterhin, daß die Multipolfelder mit der Quantenzahl $L=0$ identisch verschwinden. Dies ist eine Konsequenz der Transversalität der Lichtwelle [vgl. (49.1c) und (49.1d)]*.

Die Multipolfelder bilden ein vollständiges Funktionssystem (hier nicht bewiesen), daher kann jedes den Gleichungen (49.2) und (49.3) genügende Feld aus Multipolanteilen aufgebaut werden:

$$\left.\begin{aligned}\vec{E} &= \sum_{L=1}^{\infty} \sum_{M=-L}^{+L} \left(a^{(e)}_{L,M}\, \vec{E}^{(e)}_{L,M} + a^{(m)}_{L,M}\, \vec{E}^{(m)}_{L,M}\right), \\ \vec{H} &= \sum_{L=1}^{\infty} \sum_{M=-L}^{+L} \left(b^{(e)}_{L,M}\, \vec{H}^{(e)}_{L,M} + b^{(m)}_{L,M}\, \vec{H}^{(m)}_{L,M}\right).\end{aligned}\right\} \quad (49.13)$$

Die Koeffizienten a und b bestimmen die Amplituden der einzelnen Multipolordnungen und werden (im freien Raum) durch die Quellen des Feldes gegeben.

Schließlich definieren wir noch das Vektorpotential $\vec{A}$ durch

$$\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}. \quad (49.14)$$

Mit (49.2) und der Identität rot grad $\Phi = 0$ ergibt sich

$$\vec{A} = \frac{1}{i\omega\mu_0}\vec{E} - \operatorname{grad}\Phi.$$

Die durch die Integration auftretende Potentialfunktion $\Phi_{(x,y,z)}$ läßt sich durch die sogenannte „COULOMB-Eichung" fortschaffen. Dabei wird über die noch freie Divergenz des Vektorpotentials durch

$$\operatorname{div}\vec{A} = 0$$

verfügt (diese Konvention ist *nicht* LORENTZ-invariant!). Verlangt man zusätzlich als Randbedingung, daß $\Phi_{(R_0)} = 0$ ist, dann verschwindet wegen

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi = \Delta\Phi = 0$$

* Das Lichtquant des Strahlungsfeldes trägt wegen (49.4) einen Drehimpuls $\hbar\sqrt{L(L+1)}$ mit $L \geq 1$ und ganzzahlig.

das Potential überall. Also wird

$$\vec{A} = \frac{1}{i\omega\mu_0}\vec{E} = \frac{1}{i\mu_0 c\kappa}\vec{E}, \tag{49.15}$$

das Vektorpotential ist dem elektrischen Feldvektor proportional.

b) Übergangswahrscheinlichkeit bei spontaner γ-Emission

Wenn sich ein geladenes Teilchen (z.B. ein Proton) in einem elektromagnetischen Feld befindet, so ist der HAMILTON-Operator gegeben durch *

$$H = \frac{1}{2m_p}(\vec{p} - e\mu_0\vec{A})^2 + U_{(r)} + \frac{\mu_K}{\hbar} g_{sp}(\vec{S}_p\vec{H}).$$

Dabei ist $U_{(r)}$ das (als kugelsymmetrisch angenommene) Kernpotential, in dem sich das Proton bewegt; die Spin-Bahn-Kopplung ist vernachlässigt. Der letzte Term beschreibt die Wechselwirkung des Protonenspins mit dem Magnetfeld (vgl. §28).

Der erste Term ergibt im einzelnen

$$\frac{1}{2m_p}p^2 - \frac{e\mu_0}{2m_p}(\vec{p}\vec{A} + \vec{A}\vec{p}) + \frac{e^2\mu_0^2}{2m_p}A^2.$$

Der zu A^2 proportionale Term kann im allgemeinen vernachlässigt werden **.

Man erhält somit als HAMILTON-Operator für *ein* Proton im Kern (Berücksichtigung der Neutronen s. u.), das außer mit dem Kernpotential noch mit dem Strahlungsfeld wechselwirkt,

$$H = \underbrace{\frac{1}{2m_p}p^2 + U_{(r)}}_{H_0} \underbrace{- \frac{e\mu_0}{2m_p}(\vec{p}\vec{A} + \vec{A}\vec{p}) + \frac{\mu_K}{\hbar} g_{sp}(\vec{S}_p\vec{H})}_{H' = H_1 e^{-i\omega t} + H_1^* e^{+i\omega t}}. \tag{49.16}$$

Die stationären Zustände des Protons (ohne elektromagnetisches Feld) werden durch Energie E_n, Drehimpuls und Parität gekennzeichnet. Sie ergeben sich durch Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung

$$H_0\psi_n = E_n\psi_n$$

(vgl. etwa §32 für den Fall des Protons im Oszillatorpotential).

* Siehe z.B. D. J. BLOCHINZEW, Grundlagen der Quantenmechanik, Harri Deutsch, Frankfurt a.M. 1962, Kap. III und Anhang VI. Die Unterschiede gegen die hier benutzten Formeln ergeben sich aus den verschiedenen Maßsystemen.

** Er beschreibt einen Zweiquantenübergang, der um einen Faktor der Größenordnung $\alpha = 1/137$ unwahrscheinlicher ist als der Einquantenübergang.

Die Wechselwirkung mit dem als Störung aufgefaßten, zeitlich periodischen Strahlungsfeld führt nach der 2. Goldenen Regel zu einer Übergangswahrscheinlichkeit w vom Zustand Ψ_{Anf} in den Zustand Ψ_{End} der Größe

$$w=\frac{2\pi}{\hbar}\,|\int \Psi_{\text{End}}^{*}\,H'\,\Psi_{\text{Anf}}\,d\tau\,|^{2}\,\rho_{(E_{\text{End}})}\,. \tag{49.17}$$

Ein Übergang von einem höher zu einem weniger hoch angeregten Zustand (Emission) wird dabei nach der Störungstheorie (s. Anhang) der Wirkung des Operators $H_1^{*}\,e^{i\omega t}$ zugeschrieben, ein Übergang in der umgekehrten Richtung (Absorption) dem Operator $H_1\,e^{-i\omega t}$. Ein Beispiel für den Absorptionsprozeß wurde in §47 behandelt (Kernphotoeffekt); hier wollen wir uns nur mit der Emission befassen.

Die Zustandsdichte $\rho_{(E_{\text{End}})}$ erhält man durch Abzählen der möglichen Werte der Wellenzahl κ des emittierten Quants pro Energieintervall der Endenergie (das Proton habe nur einen nicht entarteten Endzustand; die Entartung in der magnetischen Quantenzahl wird später berücksichtigt). Mit (49.9) und $\kappa R_0 \gg 1$ folgt aus der asymptotischen Entwicklung von $j_{L(\kappa r)}$ bei $\kappa r \to \infty$ (s. §22c)

$$\kappa R_0 = \frac{\pi L}{2} = n\pi \qquad (n = \text{ganze Zahl})\,.$$

Dann ergibt sich wegen

$$E_\gamma = \hbar\omega = \hbar c \kappa$$

die Zustandsdichte zu

$$\rho_{(E_{\text{End}})} = \frac{dn}{dE_{\text{End}}} = \frac{dn}{dE_\gamma} = \frac{R_0}{\pi \hbar c}\,. \tag{49.18}$$

(n wird hier näherungsweise als kontinuierliche Variable aufgefaßt; es ist eine sehr große Zahl).

Wir wollen die Übergangswahrscheinlichkeit zunächst für einen *elektrischen Multipolübergang* berechnen. Da die Wellenfunktionen Ψ_{End} und Ψ_{Anf} nur innerhalb des Kerns wesentlich von Null verschieden sind und $\kappa R \ll 1$ vorausgesetzt werden kann (s. oben; R = Kernradius), darf man die im Integral (49.17) über H_1 und die Ausdrücke (49.10) auftretenden BESSEL-Funktionen durch ihre Näherungen für $\kappa r \ll 1$ ersetzen (s. §22c, Entwicklungsglied für $\nu = 0$):

$$j_{L(\kappa r)} \approx \frac{2^L L!}{(2L+1)!}\,(\kappa r)^L.$$

Manche Autoren verwenden das Symbol

$$(2L+1)!! = \frac{(2L+1)!}{2^L L!} = 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2L+1)\,.$$

Aus (49.15), (49.12) und der ersten der Gleichungen (49.10) folgt mit $\kappa r \ll 1$ unter Vernachlässigung höherer Potenzen von κr

$$\vec{A}^{(e)}_{L,M} = -\frac{1}{\mu_0 c \kappa} \sqrt{\frac{c\kappa}{\varepsilon_0 \hbar R_0 L(L+1)}} \frac{2^L L!}{(2L+1)!} (L+1) \frac{\hbar}{i} \operatorname{grad} v_{(\kappa r, \vartheta, \varphi)}$$

mit

$$v_{(\kappa r, \vartheta, \varphi)} = (\kappa r)^L \, Y_{L, M(\vartheta, \varphi)}\,.$$

Wir formen zunächst den Ausdruck

$$\int \Psi^*_{\mathrm{End}} (\vec{p} \vec{A}^* + \vec{A}^* \vec{p}) \, \Psi_{\mathrm{Anf}} \, d\tau$$

unter Benutzung von (20.7) und (23.5) um (dabei werden der Einfachheit halber die Vorfaktoren zunächst fortgelassen):

$$\left.\begin{aligned} \int \Psi^*_{\mathrm{End}} (\vec{p} \vec{A}^* + \vec{A}^* \vec{p}) \, \Psi_{\mathrm{Anf}} \, d\tau \sim \int (\vec{p}\, \Psi_{\mathrm{End}})^* (\vec{p}\, v^*) \, \Psi_{\mathrm{Anf}} \, d\tau + \\ + \int \Psi^*_{\mathrm{End}} (\vec{p}\, v^*) \, \vec{p}\, \Psi_{\mathrm{Anf}} \, d\tau\,. \end{aligned}\right\} \quad (49.19)$$

Mit den allgemein gültigen Beziehungen

$$(\vec{p}\, v^*)\, \psi = \vec{p}(v^* \psi) - v^* (\vec{p}\, \psi)$$

und

$$(\vec{p}\, v^*)\, \vec{p}\, \psi = \vec{p}(v^* \vec{p}\, \psi) - v^* p^2 \psi$$

folgt für die rechte Seite von (49.19)

$$\begin{aligned} \int [(p^2 \Psi_{\mathrm{End}})^* v^* \Psi_{\mathrm{Anf}} - (\vec{p}\, \Psi_{\mathrm{End}})^* v^* (\vec{p}\, \Psi_{\mathrm{Anf}}) + \\ + (\vec{p}\, \Psi_{\mathrm{End}})^* v^* (\vec{p}\, \Psi_{\mathrm{Anf}}) - \Psi^*_{\mathrm{End}} v^* p^2 \Psi_{\mathrm{Anf}}] \, d\tau\,. \end{aligned}$$

Die beiden mittleren Terme heben sich auf. Man addiert und subtrahiert einen Term $2m_p \int \Psi^*_{\mathrm{End}} \, U v^* \, \Psi_{\mathrm{Anf}} \, d\tau$; dabei ist $U_{(r)}$ die Potentialfunktion aus (49.16), die mit v^* kommutiert. Damit wird das Integral zu

$$\begin{aligned} 2m_p \int [(H_0 \Psi_{\mathrm{End}})^* v^* \Psi_{\mathrm{Anf}} - \Psi^*_{\mathrm{End}} v^* (H_0 \Psi_{\mathrm{Anf}})] \, d\tau = \\ = 2m_p (E_{\mathrm{End}} - E_{\mathrm{Anf}}) \int \Psi^*_{\mathrm{End}} v^* \Psi_{\mathrm{Anf}} \, d\tau = 2m_p \hbar \omega \int \Psi^*_{\mathrm{End}} v^* \Psi_{\mathrm{Anf}} \, d\tau\,. \end{aligned}$$

Schließlich folgt mit Einbeziehung der Vorfaktoren und $p^* = -p$

$$\left.\begin{aligned} -\frac{e\mu_0}{2m_p} \int \Psi^*_{\mathrm{End}} (\vec{p}^* \vec{A}^* + \vec{A}^* \vec{p}^*) \, \Psi_{\mathrm{Anf}} \, d\tau = \\ = e\hbar \sqrt{\frac{c\kappa}{\varepsilon_0 \hbar R_0 L(L+1)}} \frac{2^L L!}{(2L+1)!} (L+1) \int \Psi^*_{\mathrm{End}} v^* \Psi_{\mathrm{Anf}} \, d\tau\,. \end{aligned}\right\} \quad (49.20)$$

Der Term der Spinwechselwirkung in H' [vgl. (49.16)] ist mit $\mu_K = \frac{\mu_0 e \hbar}{2m_p}$ und (49.10) gegeben durch

$$\frac{\mu_0 e}{2m_p} g_{sp} \kappa \sqrt{\frac{c\kappa}{\mu_0 \hbar R_0 L(L+1)}} \frac{2^L L!}{(2L+1)!} \hbar^2 \int \Psi^*_{\mathrm{End}} \left(\frac{\vec{S}_p \vec{L} v}{\hbar^2} \right)^* \Psi_{\mathrm{Anf}} \, d\tau\,. \quad (49.21)$$

Damit folgt für die Übergangswahrscheinlichkeit aus (49.17), (49.18), (49.19) und (49.20)

$$w_{L,M}^{(e)} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{R_0}{\pi \hbar c} \frac{c\kappa}{\varepsilon_0 \hbar R_0 L(L+1)} \left(\frac{2^L L!}{(2L+1)!}\right)^2 \left| (L+1) \int \Psi_{\text{End}}^* v^* \Psi_{\text{Anf}}\, d\tau + \right.$$
$$\left. + g_{sp} \frac{\hbar\omega}{2 m_p c^2} \int \Psi_{\text{End}}^* \left(\frac{\vec{S}_p \vec{L} v}{\hbar^2}\right)^* \Psi_{\text{Anf}}\, d\tau \right|^2 .$$

Die Operatoren in den verbleibenden Matrixelementen enthalten dieselbe niedrigste Potenz von κr, nämlich $(\kappa r)^L$. Man erkennnt aber aus den Vorfaktoren, daß das zweite vernachlässigbar klein gegen das erste ist. Als gute Näherung ergibt sich daher mit $\alpha \approx \frac{1}{137}$

$$w_{L,M}^{(e)} = 8\pi\alpha\omega \left(\frac{2^L L!}{(2L+1)!}\right)^2 \frac{L+1}{L} \left| \int \Psi_{\text{End}}^* (\kappa r)^L Y_{L,M(\vartheta,\varphi)}^* \Psi_{\text{Anf}}\, d\tau \right|^2 . \quad (49.22)$$

Aus dieser Form des Matrixelementes wird die Nomenklatur „Multipolfelder" ersichtlich: Für $L=1$ ist der Operator im wesentlichen $r\cos\vartheta$, also der Dipoloperator (vgl. auch § 47), für $L=2$ ergibt sich der Quadrupoloperator $r^2 Y_{2,M}^*$ usw. Hierbei handelt es sich (im Gegensatz zu § 30) um „dynamische" Multipolmomente des Kerns.

Solange die in (49.16) auftretende Potentialfunktion U nur vom Betrag r, nicht aber von den Winkeln und Spins abhängt, kann man die ψ-Funktionen des Kerns in Radial-, Winkel- und Spinanteil separieren (die in Ψ_{End} auftretende Wellenfunktion des Quants ist auf Eins normiert)

$$\psi = \frac{u_{l(r)}}{r} \varphi_{j,l,m_j} .$$

Mit (26.8) ist

$$\varphi_{j,l,m_j} = \sum_{m_s=-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} C_{\frac{1}{2},l,j;m_s,m_j} \chi_{\frac{1}{2},m_s} Y_{l,m_j-m_s} .$$

Dabei ist der Protonenzustand durch die Quantenzahlen j (Gesamtdrehimpuls), l (Bahndrehimpuls), $s=\frac{1}{2}$ (Spindrehimpuls) und die zugehörigen Quantenzahlen m_j, m_l und m_s gekennzeichnet (es gilt $m_j = m_l + m_s$).

(49.22) gilt für einen Übergang vom Zustand (j', l', m_j') in den Zustand (j, l, m_j). Da keine ausgezeichnete Raumrichtung vorhanden ist, sind die zu einer Drehimpulsquantenzahl j gehörigen $(2j+1)$ Subniveaus entartet. Um die Übergangswahrscheinlichkeit vom Zustand (j', l') in den Zustand (j, l) zu erhalten, muß man über die Anfangszustände mitteln und über die Endzustände summieren*, es ergibt sich

$$w_{(j',l'\to j,l)}^{(e)} = 8\pi\alpha\omega \left(\frac{2^L L!}{(2L+1)!}\right)^2 \frac{L+1}{L} \left| \int_{\text{Kern}} u_l u_{l'} (\kappa r)^L dr \right|^2 S_{j',l',L,j,l} \quad (49.23)$$

* Wenn man dies in (49.22) tut, sieht man, daß die Kernmatrixelemente die Form (46.3) haben.

mit

$$S_{j',l',L,j,l}=\frac{1}{2j'+1}\sum_{m_j,m'_j}\left|\int \varphi^*_{j,l,m_j}\,Y^*_{L,M}\,\varphi_{j',l',m'_j}\,d\Omega\,ds\right|^2.$$

Das Winkel- und Spinintegral lautet explizit

$$\int \varphi^*_{j,l,m_j}\,Y^*_{L,M}\,\varphi_{j',l',m'_j}\,d\Omega\,ds=$$
$$=\sum_{m_s,m'_s} C_{\frac{1}{2},l,j;m_s,m_j}\,C_{\frac{1}{2},l',j';m'_s,m'_j}\int\chi^*_{\frac{1}{2},m_s}\chi_{\frac{1}{2},m'_s}\,ds\int Y^*_{l,m_j-m_s}\,Y^*_{L,M}\,Y_{l',m'_j-m'_s}\,d\Omega$$

und liefert nur nichtverschwindende Beiträge für [vgl. (34.14)]

$$m_s=m'_s \quad \text{(kein „Spin-Flip" des Protons)}$$
$$m'_j-m_j=M$$
$$|l-L|\leqq l'\leqq l+L;\qquad L\neq 0.$$

Nach (34.13) läßt sich das Integral über drei Kugelfunktionen auf ein Produkt aus CLEBSCH-GORDAN-Koeffizienten reduzieren, das u.a. den Koeffizienten $C_{l,L,l';0,0}$ enthält. Dieser verschwindet, falls nicht $l+L+l'$ eine gerade Zahl g ist*. Daher muß z.B. für $L=1$ („elektrische Dipolstrahlung") $\Delta l=l'-l\leqq 1$ und ungerade, also $\Delta l=1$ sein (vgl. Schluß von §29), allgemein $\Delta l=g-2l-L$. Man folgert, daß Δl für ungerades L ungerade sein muß. Also muß der Ausgangszustand die andere Parität haben als der Endzustand (Paritätswechsel der Kernfunktion beim Übergang); für gerades L darf sich die Parität beim Übergang nicht ändern.

Auf die explizite Auswertung des Winkelintegrals wird hier verzichtet.

Die Berechnung des Radialintegrals verlangt die Kenntnis der Funktionen $u_{l(r)}$, die nur mit Hilfe eines Kernmodells bestimmt werden können. Als primitivste Näherung kann man annehmen, daß das Proton sowohl im Zustand l als auch im Zustand l' gleichmäßig über den Kern (Kugel mit Radius R) verteilt ist. Dann wird

$$u_l=u_{l'}=\begin{cases} r\sqrt{4\pi\rho_p} & \text{für}\quad 0\leqq r\leqq R\\ 0 & \text{für}\quad r>R.\end{cases}$$

ρ_p folgt aus der Normierung zu

$$\rho_p=\frac{3}{4\pi R^3}.$$

Das Radialintegral ergibt dann

$$4\pi\int_0^R \rho_p(\kappa r)^L r^2\,dr=(\kappa R)^L\frac{3}{L+3}.$$

* Dieser Koeffizient heißt auch Paritätskoeffizient; vgl. M. E. ROSE, Elementary Theory of Angular Momentum, John Wiley, 1957, § 11.

Die Wahrscheinlichkeit für einen elektrischen Multipolübergang ist damit angenähert gegeben durch

$$\boxed{w_L^{(e)} \approx 2\alpha\omega\left(\frac{2^L L!}{(2L+1)!}\right)^2 \frac{L+1}{L}\left(\frac{3}{L+3}\right)^2 (\kappa R)^{2L} S_{j',l',L,j,l}.} \tag{49.24}$$

$w_L^{(e)}$ fällt schnell mit wachsendem L, hauptsächlich wegen des Faktors $(\kappa R)^{2L}$. Denn κR ist z.B. bei einer γ-Energie von 1 MeV von der Größenordnung 0,01. Die Abhängigkeit der Übergangswahrscheinlichkeit von der Quantenenergie $E_\gamma = \hbar\omega = \hbar c\kappa$ folgt aus (49.24) zu

$$w_L^{(e)} \sim (E_\gamma)^{2L+1}.$$

Die Wahrscheinlichkeit für elektrische Dipolemission wächst also mit E_γ^3, die für elektrische Quadrupolemission mit E_γ^5 usw. Trotzdem kann die Quantenemission oberhalb der Teilchenschwelle im allgemeinen nicht mit der Teilchenemission konkurrieren.

Die betrachtete Näherung, daß die Radialfunktion des Protons im Kern konstant ist, liefert bereits alle wesentlichen Züge der Einteilchenübergänge *. Die Wahl anderer Radialfunktionen, z.B. aus dem Schalenmodell (s. §32 und 33), ergibt nur geringe Korrekturen. Man muß jedoch beachten, daß an Stelle der Ladung des Protons beim Protonenübergang die *effektive* Protonenladung (s. §47) und bei einem Neutronenübergang die effektive Neutronenladung einzusetzen ist; hierdurch und durch die Ersetzung von $g_{sp}\vec{S}_p$ durch $g_{sn}\vec{S}_n$ wird die Theorie auch auf Neutronenübergänge anwendbar. Die effektiven Ladungen für Dipolübergänge wurden in §47 angegeben; für einen beliebigen Multipolübergang der Ordnung L ist die effektive Ladung **

$$e_{L,\text{eff}}^2 = \left\{\varepsilon\left(\frac{A-1}{A}\right)^L + (-1)^L\left(\frac{Z-\varepsilon}{A^L}\right)\right\}^2 e^2$$

mit

$$\varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{für Neutron} \\ 1 & \text{für Proton}. \end{cases}$$

Gleichung (49.24) muß also mit $\left(\frac{e_{L,\text{eff}}}{e}\right)^2$ multipliziert werden. Dieser Faktor bewirkt, daß Übergänge mit $L > 1$ bei schweren Kernen praktisch nur mit Protonen vor sich gehen, da die effektive Neutronenladung dann sehr klein ist; nur Dipolübergänge kommen mit merklicher Wahrscheinlichkeit bei Neutronen vor.

---

* Die rechte Seite von (49.24) — bis auf den Faktor $S_{j',l',L,j,l}$, der dabei gleich Eins gesetzt wird, — wird als „WEISSKOPF-Einheit“ bezeichnet.

** Siehe M. GOLDHABER und J. WENESER, Ann. Rev. Nucl. Sci. **5**, 1 (1955).

Die Zerfallswahrscheinlichkeit (49.24) beschreibt die experimentellen Fakten mit einer Unsicherheit von etwa einem Faktor 10. Dies ist relativ befriedigend in Anbetracht der Tatsache, daß die bekannten γ-Lebensdauern $\tau = 1/w$ einen Bereich von mindestens 15 bis 20 Zehnerpotenzen überdecken. Siehe auch die Bemerkung am Schluß dieses Abschnitts.

Die Wahrscheinlichkeit für einen *magnetischen Multipolübergang* ergibt sich nach dem gleichen Verfahren, wenn man für das Vektorpotential und das Magnetfeld in (49.16) die entsprechenden Ausdrücke nach (49.15) und (49.10) in den Störoperator einsetzt. Die Rechnung wird hier nicht durchgeführt; die Ergebnisse sind:

1. Das Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten für elektrische und magnetische Multipolemission derselben Ordnung L und gleicher Quantenenergie $\hbar\omega$ ist unabhängig von der Energie und wird näherungsweise gegeben durch *

$$\frac{w_L^{(e)}}{w_L^{(m)}} \approx \frac{(m_p c R)^2}{10\hbar^2}. \tag{49.25}$$

Dieser Faktor ist von der Größenordnung 30 für $A = 20$ und 150 für $A = 200$.

2. Die Auswahlregeln für magnetische Multipolstrahlung lauten:

$$m_j' - m_j = M,$$
$$|l - L| \leqq l' \leqq l + L; \qquad L \neq 0.$$

Für gerades L muß Δl ungerade sein, für ungerades L gerade.

„Spin-Flip" ($\Delta m_s = \pm 1$) ist bei magnetischen Multipolübergängen etwa gleich wahrscheinlich wie Änderung von l.

Bei einem Übergang zwischen zwei Niveaus eines Atomkerns sind die Kernspins I_{Anf} und I_{End} vorgegeben. Der Übergang kann mit $L = |I_{\text{Anf}} - I_{\text{End}}|$, $|I_{\text{Anf}} - I_{\text{End}}| + 1, \ldots, I_{\text{Anf}} + I_{\text{End}}$ vor sich gehen. Da aber die Übergangswahrscheinlichkeit mit wachsendem L schnell fällt, kommt der Hauptbeitrag gewöhnlich vom Übergang mit $L = \Delta I$, d.h. das erzeugte Strahlungsfeld hat vorwiegend die Multipolordnung ΔI. Eine schwache Beimischung des Übergangs der Multipolordnung $\Delta I + 1$ ist wegen (49.25) hauptsächlich dann zu erwarten, wenn der Hauptbeitrag ($\Delta I = L$) ein magnetischer Übergang ist (wegen der Paritätserhaltung kann nur eine elektrische Strahlung der Ordnung $\Delta I + 1$ zugemischt werden). So werden Beimischungen von $E(2)$ zu $M(1)$ beobachtet.

Tabelle 49.1 gibt einen Überblick über die Multipolübergänge beim Kernzerfall. Mit $E(L)$ bzw. $M(L)$ wird ein elektrischer bzw. magnetischer Übergang der Ordnung L bezeichnet.

---

* Siehe z.B. B. STECH, Z. Naturf. **7a**, 401 (1952). Dort sind die Rechnungen mit der relativistischen DIRAC-Theorie durchgeführt. Siehe auch M. E. ROSE, Multipole Fields, Wiley, 1955.

Aus der Messung der Halbwertszeit $T=(\ln 2)/w$ einer γ-Strahlung kann man über (49.24) bzw. (49.25) die Multipolordnung des Überganges bestimmen und daraus in Verbindung mit den Angaben der Tabelle 49.1 Aussagen über ΔI und die Paritätsverhältnisse beim Übergang gewinnen. Kennt man Spin und Parität des Endzustandes (oft Grundzustand), so erhält man – im Rahmen der Unsicherheit der Theorie – Werte für Spin und Parität des Ausgangszustandes (der Spinwert ist im allgemeinen nicht eindeutig; z. B. ein Dipolübergang auf einen $\frac{3}{2}$-Zustand kann von einem

Tabelle 49.1. *Klassifizierung der Multipolübergänge beim γ-Zerfall*

Kernübergang im Bild des Einteilchenmodells	ΔI	Paritätswechsel im Kern	Vorherrschende Strahlung	Mögliche schwache Beimischung
Änderung der Bahndrehimpulsquantenzahl des Nukleons; kein „Spin-Flip“	gerade $(\neq 0)$	nein	$E(\Delta I)$	$M(\Delta I+1)$; abwesend, wenn I_{Anf} oder I_{End} gleich Null
	ungerade	ja	$E(\Delta I)$	$M(\Delta I+1)$; abwesend, wenn I_{Anf} oder I_{End} gleich Null
Nur Spin-Flip des Nukleons	0*	nein	$M(1)$	$E(2)$; abwesend, wenn $I_{\mathrm{Anf}}=I_{\mathrm{End}}=\frac{1}{2}$
Änderung der Spinrichtung des Nukleons (Spin-Flip) sowie eventuell Änderung der Bahndrehimpulsquantenzahl	0*	ja	$E(1)$**	$M(2)$; abwesend, wenn $I_{\mathrm{Anf}}=I_{\mathrm{End}}=\frac{1}{2}$
	gerade $(\neq 0)$	ja	$M(\Delta I)$	$E(\Delta I+1)$; abwesend, wenn I_{Anf} oder I_{End} gleich Null
	ungerade	nein	$M(\Delta I)$	$E(\Delta I+1)$; abwesend, wenn I_{Anf} oder I_{End} gleich Null

$\frac{1}{2}$-, einem $\frac{3}{2}$- oder einem $\frac{5}{2}$-Zustand ausgehen). Weitere Möglichkeiten der Bestimmung dieser Quantenzahlen bieten die Untersuchung der inneren Konversion und gelegentlich die Messung der Winkelkorrelation sukzessiver γ-Übergänge.

Wenn die Halbwertszeit größer als etwa 1 msec ist, nennt man den Zustand ein *Kernisomer* (die Grenze von 1 msec ist willkürlich). Solche Zustände besitzen meist einen vom Grundzustand stark verschiedenen Spin, so daß die Übergänge (Bezeichnung: $IT=$ „isomeric transition“) mindestens die Multipolordnung $L=3$ haben. Das Auftreten solcher Einteilchenzustände ist in vielen Fällen nach dem Schalenmodell verständlich; wie man aus Tabelle 32.2 entnimmt, sollten an mehreren Stellen des periodischen Systems

* Übergänge $I=0 \rightarrow I=0$ sind verboten, sie erfolgen durch innere Konversion oder innere Paarbildung. Genaueres s. R. D. Evans, The Atomic Nucleus, McGraw-Hill, 1955, Chap. 6.

** Solche Übergänge kommen über die Spinwechselwirkung (49.21) zustande, die in (49.24) vernachlässigt wurde.

Zustände großen und kleinen Spins energetisch benachbart liegen, also einer der angeregten Zustände dicht über dem Grundzustand eine lange Lebensdauer haben. Diese Erwartung bestätigt sich; die Existenz der sogenannten „Inseln des Isomerismus“ gilt als wesentliche Stütze für die Schalenmodell-Vorstellung.

Bei einer systematischen Untersuchung zeigt sich, daß (49.24) in vielen Fällen eine um einen Faktor der Größenordnung 100 zu kleine Übergangswahrscheinlichkeit vorhersagt. Das berechtigt zu dem Schluß, daß in diesen Fällen der angeregte Zustand nicht als Einteilchenzustand gedeutet werden kann. Das Kollektivmodell (§ 51) sagt Zustände des Kerns voraus, die nicht von einem einzelnen Teilchen in einer „höheren Bahn“ herrühren, sondern auf eine kollektive Anregung des ganzen Kerns zurückzuführen sind. Dann beteiligen sich viele Nukleonen am Übergang, die Übergangswahrscheinlichkeit ist größer als beim Einteilchenübergang. Dies wurde besonders bei $E(2)$-Übergängen zwischen dem ersten angeregten Zustand und dem Grundzustand bei deformierten Kernen beobachtet.

c) Innere Konversion

Bei diesem Prozeß wird die beim Kernübergang freiwerdende Energie E^* nicht als Strahlungsquant emittiert sondern auf ein Hüllenelektron übertragen, das dann den Atomverband verläßt (s. § 11). γ-Emission und innere Konversion sind konkurrierende Prozesse; der „Konversionskoeffizient“ α ist definiert als [vgl. (11.4) bzw. (11.5)]

$$\alpha = \frac{\text{Zahl der pro Zeiteinheit emittierten Elektronen}}{\text{Zahl der pro Zeiteinheit emittierten } \gamma\text{-Quanten}}.$$

Exakte theoretische Ausdrücke für die Konversionskoeffizienten können aus der relativistischen DIRAC-Theorie gewonnen werden*. In grober Näherung gilt (hier ohne Beweis)

$$\alpha_K^{(e)} \approx \alpha^4 \frac{L}{L+1} Z^3 \left(\frac{2 m_e c^2}{E^*}\right)^{L+\frac{5}{2}},$$

$$\alpha_K^{(m)} \approx \alpha^4 Z^3 \left(\frac{2 m_e c^2}{E^*}\right)^{L+\frac{5}{2}},$$

wobei α_K der K-Konversionskoeffizient, α die Feinstrukturkonstante (5.9) und $m_e c^2 = 0{,}511$ MeV die Ruhmasse des Elektrons ist.

Die Konversionskoeffizienten haben folgende Eigenschaften: (i) Sie sind proportional zu Z^3, infolgedessen überwiegt bei schweren Kernen oft der Konversionsprozeß, während bei leichten Kernen die γ-Emission

* Siehe M. E. ROSE in K. SIEGBAHN, Beta- and Gamma-Ray Spectroscopy, North-Holland Pbl. Co., Amsterdam 1955, Chap. XIV. Dort umfangreiche Tabellen.

bevorzugt ist. (ii) Sie wachsen zu kleinen E^* mit einer hohen Potenz von $1/E^*$. Daher sind Übergänge geringer Energie bevorzugt konvertiert. (iii) Sie wachsen, jedenfalls für $E^* < 2m_e c^2 = 1{,}022$ MeV, mit der Multipolordnung L des Überganges. (iv) Unter sonst gleichen Umständen sind die $\alpha^{(m)}$ etwas größer als die $\alpha^{(e)}$.

Zur Messung der Konversionskoeffizienten sind Absolutbestimmungen der Emissionsraten sowohl der γ-Quanten als auch der Elektronen erforderlich. Man kann jedoch bei bekannter Fluoreszenzausbeute* der auf die Elektronenemission folgenden RÖNTGEN-Strahlung das Verhältnis der γ- zur RÖNTGEN-Intensität oder das Verhältnis der Konversions- zur AUGER-Elektronen-Intensität messen. Der Messung ebenfalls zugänglich ist das Verhältnis α_K/α_L; die Elektronenintensitäten in K- und L-Linie werden verglichen und unter Benutzung der (bekannten) Fluoreszenzausbeuten auf α_K/α_L umgerechnet. Auch dieses Verhältnis hängt von L, Z und E^* ab (Tabellen bei ROSE, loc. cit.).

Die Zerfallswahrscheinlichkeit λ eines angeregten Kernzustandes setzt sich aus den Zerfallswahrscheinlichkeiten λ_γ für γ-Emission und λ_C für innere Konversion zusammen**:

$$\lambda = \lambda_\gamma + \lambda_C = \lambda_\gamma (1 + \alpha) .$$

Dabei ist λ_γ durch (49.24) bzw. einen entsprechenden Ausdruck für magnetische Multipolübergänge gegeben.

Die Bestimmung des Konversionskoeffizienten zusätzlich zur Halbwertszeit liefert im allgemeinen eine eindeutige Aussage über die Multipolordnung des Überganges.

d) Winkelkorrelationen bei aufeinanderfolgenden γ-Übergängen

Ein γ-strahlendes Präparat, das aus vielen nicht orientierten Kernen besteht, emittiert seine Strahlung isotrop in alle Raumrichtungen. Eine Winkelabhängigkeit der Emissionsrate kann nur dann entstehen, wenn die emittierenden Kerne eine Vorzugsrichtung aufweisen. Bringt man z.B. ein γ-strahlendes Präparat in ein starkes äußeres Magnetfeld und weist nur die von Kernen mit einer bestimmten Quantenzahl m_I stammende Strahlung nach (im Beispiel durch Diskriminierung der γ-Energie prinzipiell möglich), dann wären die emittierenden Kerne orientiert und man könnte eine

* Die Fluoreszenzausbeute ist definiert als die Zahl der emittierten Strahlungsquanten pro Elektronenübergang; wegen der Möglichkeit des AUGER-Effektes ist die Fluoreszenzausbeute im allgemeinen <1. Werte s. z.B. EVANS, The Atomic Nucleus, McGraw-Hill, 1955, Chap. 17,3.

** Beide Prozesse sind unabhängig voneinander. Dies weiß man daher, daß sich λ_C durch Beeinflussung der Elektronenhülle (z.B. in verschiedenen chemischen Verbindungen) in gewissen (sehr kleinen) Grenzen ändern läßt, während λ_γ dabei völlig konstant bleibt. Wäre die innere Konversion ein sekundärer Prozeß, bei dem etwa erst ein γ-Quant vom Kern erzeugt wird, das dann in der Hülle desselben Atoms seine Energie durch Photoeffekt an ein Elektron überträgt, dann müßte sich λ_γ ebenfalls ändern, aber $\lambda_\gamma + \lambda_C$ konstant bleiben.

nichtisotrope Winkelverteilung erwarten. Bei sehr tiefen Temperaturen sind die magnetischen Subniveaus verschieden stark besetzt, dann dominiert die Winkelabhängigkeit der Strahlung des energetisch niedrigsten Niveaus.

Aber auch ohne äußere Magnetfelder gibt es die Möglichkeit einer Anisotropie in der Winkelverteilung, wenn es gelingt, eine Raumrichtung auszuzeichnen. Dies erreicht man z.B. auf folgende Weise: Wenn ein Präparat zwei γ-Quanten in Kaskade emittiert, wählt man durch die Meßapparatur nur solche Kerne aus, die das erste der beiden Quanten in eine bestimmte Raumrichtung emittieren ($\vartheta=0$ in Fig. 49.1). Dazu beobachtet man die Koinzidenzzählrate zweier γ-Zähler, die einen variablen Winkel ϑ einschließen und von denen der eine nur auf das erste γ-Quant, der andere nur auf das zweite Quant anspricht (s. Fig. 49.1). Die ausgezeichnete Richtung ist $\vartheta=0$.

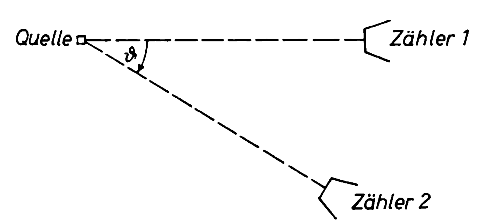


Fig. 49.1. Anordnung zur Messung der Winkelkorrelation zweier in Kaskade emittierter γ-Quanten (schematisch). Zähler 1 spricht nur auf γ_1 an, Zähler 2 nur auf γ_2

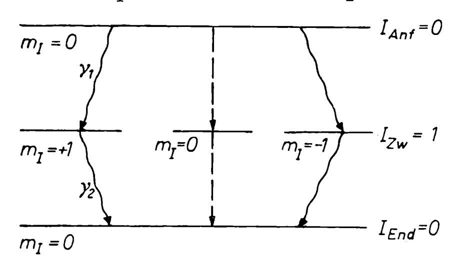


Fig. 49.2. Energiediagramm der γ-Kaskade 0(1)1(1)0

Daß dabei eine Winkelkorrelation auftreten kann, soll am Beispiel der Kaskade 0(1)1(1)0 gezeigt werden*, bei der zwei aufeinanderfolgende Dipolübergänge stattfinden. Der Zwischenzustand hat drei Subniveaus mit den Quantenzahlen $m_I=+1, 0, -1$, die aber wegen des Fehlens einer Wechselwirkung nicht aufspalten (s. Fig. 49.2). Beim ersten Übergang $I_{\mathrm{Anf}} \to I_{\mathrm{Zw}}$ wird eins der drei Subniveaus besetzt. Die ausgesandte Dipolstrahlung hat eine vom Wert Δm_I abhängige Winkelverteilung, und zwar gilt für die Wahrscheinlichkeit $w\,d\Omega$, daß ein Quant unter dem Winkel ϑ in das Raumwinkelelement $d\Omega$ emittiert wird,

$$w_{(\Delta m_I=0)}\,d\Omega \sim \sin^2\vartheta\,d\Omega = (1-\cos^2\vartheta)\,d\Omega$$

(σ-Übergang, vgl. Schluß des §29),

$$\left.\begin{aligned} w_{(\Delta m_I=+1)}\,d\Omega &\sim \tfrac{1}{2}(1+\cos^2\vartheta)\,d\Omega \\ w_{(\Delta m_I=-1)}\,d\Omega &\sim \tfrac{1}{2}(1+\cos^2\vartheta)\,d\Omega \end{aligned}\right\}\ (\pi\text{-Übergänge}).$$

* Wie in § 39 wird der Übergang
$I_{\mathrm{Anf}} \xrightarrow{L_1} I_{\mathrm{Zwischenzustand}} \xrightarrow{L_2} I_{\mathrm{End}}$ durch das Symbol $I_{\mathrm{Anf}}(L_1)\, I_{\mathrm{Zw}}(L_2)\, I_{\mathrm{End}}$ dargestellt.

Herleitung: Die Intensität der Strahlung wird durch den Betrag des POYNTING-Vektors $\vec{P}=\vec{E}\times\vec{H}$ beschrieben. Bei elektromagnetischen Wellen ist $|\vec{E}|=\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}\,|\vec{H}|$ [vgl. (49.8)], so daß sich für die Winkelabhängigkeit mit (49.10) die Proportionalität

$$|\vec{P}|\sim|\vec{L}j_{L(\kappa r)}\,Y_{L,M(\vartheta,\varphi)}|^2\sim|\vec{L}\,Y_{L,M(\vartheta,\varphi)}|^2$$

ergibt. Dabei ist ϑ der Winkel zwischen $\vec{L}$ und $\vec{\kappa}$, also zwischen Drehachse des Strahlungsfeldes und Emissionsrichtung des Quants. Die Beziehung gilt sowohl für elektrische als auch für magnetische Multipolstrahlungen [vgl. (49.10)], deren räumliche Intensitätsverteilungen unterscheiden sich also nicht.

Mit (25.22) läßt sich schreiben

$$\begin{aligned}\vec{L}\,Y_{L,M}=&\left[\frac{\hbar}{2}\sqrt{L(L+1)-M(M+1)}\,Y_{L,M+1}+\right.\\&\left.+\frac{\hbar}{2}\sqrt{L(L+1)-M(M-1)}\,Y_{L,M-1}\right]\vec{i}+\\&+\left[\frac{\hbar}{2i}\sqrt{L(L+1)-M(M+1)}\,Y_{L,M+1}-\right.\\&\left.-\frac{\hbar}{2i}\sqrt{L(L+1)-M(M-1)}\,Y_{L,M-1}\right]\vec{j}+\hbar M\,Y_{L,M}\,\vec{k}.\end{aligned}$$

Bei Bildung des Absolutquadrats fallen die gemischten Glieder heraus, und es bleibt

$$\begin{aligned}|\vec{P}|\sim|\vec{L}\,Y_{L,M}|^2=\frac{\hbar^2}{2}&\left[\{L(L+1)-M(M+1)\}\,|Y_{L,M+1}|^2+\right.\\&\left.+\{L(L+1)-M(M-1)\}\,|Y_{L,M-1}|^2+2M^2\,|Y_{L,M}|^2\right].\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck enthält — bis auf einen Proportionalitätsfaktor — die gesuchte Winkelabhängigkeit.

Für den oben betrachteten Dipolübergang folgt mit (21.10) (jetzt ist ϑ wegen $I_{\mathrm{Zw}}=L$ der Winkel zwischen $\vec{I}_{\mathrm{Zw}}$ und der Emissionsrichtung)

$$L=1,\ M=0:\quad |\vec{P}|\sim 2\frac{3}{8\pi}\sin^2\vartheta+2\frac{3}{8\pi}\sin^2\vartheta+0=\frac{3}{2\pi}\sin^2\vartheta$$

$$L=1,\ M=+1:\ |\vec{P}|\sim 0+2\frac{3}{4\pi}\cos^2\vartheta+2\frac{3}{8\pi}\sin^2\vartheta=\frac{3}{4\pi}(1+\cos^2\vartheta)$$

$$L=1,\ M=-1:\ |\vec{P}|\sim 2\frac{3}{4\pi}\cos^2\vartheta+0+2\frac{3}{8\pi}\sin^2\vartheta=\frac{3}{4\pi}(1+\cos^2\vartheta).$$

Sind alle Übergänge gleich wahrscheinlich, so findet man durch Mittelung

$$w\,d\Omega=\mathrm{const}\,d\Omega,$$

also isotrope Strahlung. Um eine Winkelabhängigkeit zu erhalten, muß man mindestens einen der Übergänge beschränken bzw. ausschalten. Dies gelingt dadurch, daß man als Vorzugsrichtung $\vartheta=0$ die Emissionsrichtung

des ersten Quants wählt. Dann ist $w_{(\Delta m_I=0)}=0$ (klassisch: Ein HERTZscher Dipol strahlt nicht in Richtung seiner Achse), also muß der Übergang auf eins der Subniveaus mit $|m_I|=1$ erfolgt sein. Dann muß aber auch das anschließend emittierte Quant $\Delta m_I=1$ haben; seine Winkelverteilung ist gegeben durch

$$w_{(\vartheta)}\, d\Omega \sim (1+\cos^2\vartheta)\, d\Omega .$$

Diese Funktion beschreibt die Winkelkorrelation der beiden γ-Quanten.

Die Anordnung (Fig. 49.1) ist also nur für solche Kaskaden empfindlich, bei denen die Kerne im Zwischenzustand ausgerichtet sind, und zwar so, daß – bildlich gesprochen – der Spin I_{Zw} in die Emissionsrichtung des ersten Quants (oder entgegengesetzt) weist.

Im allgemeinen Fall der Kaskade $I_{\mathrm{Anf}}(L_1)\, I_{\mathrm{Zw}}(L_2)\, I_{\mathrm{End}}$ läßt sich die Winkelverteilungsfunktion darstellen als [vgl. (39.2)]

$$w_{(\vartheta)}\, d\Omega \sim (1+a_2\cos^2\vartheta + a_4\cos^4\vartheta+\cdots+a_{2L}\cos^{2L}\vartheta)\, d\Omega , \qquad (49.26)$$

wobei L die kleinste der Zahlen L_1, L_2, I_{Zw} ist (oder um $\frac{1}{2}$ weniger, wenn die kleinste Zahl halbzahlig ist). Wenn $I_{\mathrm{Zw}}=0$ oder $\frac{1}{2}$ ist, wird die Strahlung isotrop. Der Zwischenzustand muß also mindestens den Spin 1 haben, wenn eine Winkelkorrelation beobachtet werden soll.

Die Koeffizienten a_{2L} sind in Tabelle 49.2 für einige Kaskaden zusammengestellt. Es ist ersichtlich, daß es keine eindeutige Zuordnung der Koeffizienten zu einer Kaskade gibt. Außerdem gelten die gleichen Koeffizienten für elektrische und magnetische Multipolstrahlung. Daher gibt die Messung der Winkelkorrelation nur eine Information über die beteiligten Spins, nicht aber über die Parität der zugehörigen Niveaus. In Verbindung mit Halbwertszeit und Konversionskoeffizienten sowie unter Umständen β-Zerfallsmessungen (s. § 50) oder anderen Kernreaktionen ist in vielen Fällen eine eindeutige Aussage über Spins und Paritäten angeregter Kernzustände möglich. Beispiele s. § 50.

Tabelle 49.2. *Koeffizienten der Winkelverteilung* (49.26) *für einige γ-Kaskaden*

Kaskade	a_2	a_4
0(1)1(1)0	$+1$	0
1(1)1(1)0	$-\frac{1}{3}$	0
1(2)1(1)0	$-\frac{1}{3}$	0
2(1)1(1)0	$-\frac{1}{3}$	0
3(2)1(1)0	$-\frac{3}{29}$	0
0(2)2(2)0	-3	$+4$
1(1)2(2)0	$-\frac{1}{3}$	0
2(1)2(2)0	$+\frac{3}{7}$	0
2(2)2(2)0	$-\frac{15}{13}$	$+\frac{16}{13}$
3(1)2(2)0	$-\frac{3}{29}$	0
4(2)2(2)0	$+\frac{1}{8}$	$+\frac{1}{24}$

Die Beziehung (49.26) gilt unter folgenden Bedingungen:

1. Die Subniveaus des Ausgangszustandes müssen gleichmäßig besetzt sein.

2. Jedes der drei am Übergang beteiligten Niveaus muß isoliert sein (keine Beimischung benachbarter Niveaus) und „gute" Quantenzahlen für Spin und Parität besitzen.

3. Die Strahlungen L_1 und L_2 müssen reine Multipolstrahlungen sein; Beimischungen anderer Multipolordnungen verursachen Glieder mit ungeraden Potenzen in $\cos\vartheta$.

4. (49.26) gilt im Mittel über die γ-Polarisationen; wenn Detektoren benutzt werden, die auch die Polarisation messen, muß der Ausdruck modifiziert werden. Dann wird auch eine Aussage über die Parität der beteiligten Niveaus möglich.

5. Die Lebensdauer des Zwischenzustandes muß so klein sein, daß der Kernspin seine Richtung beibehält, sonst „verwischt" die Winkelkorrelation.

Wenn am Kernort ein Magnetfeld vorhanden ist, präzediert der Zwischenkern um die Feldrichtung. Dies bewirkt eine Veränderung der Winkelverteilung, aus der man das Produkt aus dem g_I-Faktor des angeregten Zwischenzustandes und der Magnetfeldstärke bestimmen kann [vgl. die Wechselwirkungsenergie (28.10)].

§ 50. Spektrum und fT-Wert beim β-Zerfall

a) Zerfallswahrscheinlichkeit

In diesem Paragraphen behandeln wir den β^+- und den β^--Zerfall unter dem Sammelnamen β-Zerfall. Wie bereits in §11 erwähnt, handelt es sich dabei um einen Dreiteilchenzerfall; nach dem Prozeß existieren Rückstoßkern, β-Teilchen und Neutrino bzw. Antineutrino. Die Wahrscheinlichkeit $w_{(p)}\,dp$, daß pro sec ein β-Teilchen emittiert wird, dessen Impulsbetrag zwischen p und $p+dp$ liegt, ist nach der 2. Goldenen Regel (s. Anhang) gegeben durch

$$w_{(p)}\,dp=\frac{2\pi}{\hbar}\left|\int \Psi_{\text{End}}^{*}\,O\,\Psi_{\text{Anf}}\,d\tau\right|^2 \rho_{(E_{\text{End}})}\,dp\,. \qquad (50.1)$$

Man schreibt oft zur Abkürzung

$$\left|\int \Psi_{\text{End}}^{*}\,O\,\Psi_{\text{Anf}}\,d\tau\right|^2=G^2\,|M|^2. \qquad (50.2)$$

Das Matrixelement M läßt sich in einen Leptonen- und in einen Nukleonen-Anteil aufteilen (feldtheoretisch läßt sich begründen, daß dabei das Antilepton im Endzustand als Lepton im Anfangszustand angesehen werden kann)*:

$$M=\int \psi_\beta^*\,O_{\text{Lepton}}\,\psi_\nu\,\varphi_{\text{Kern, End}}^*\,O_{\text{Kern}}\,\varphi_{\text{Kern, Anf}}\,d\tau\,.$$

Wenn angenommen wird, daß M dimensionslos ist, kann man die Größe G (Dimension eV cm^3) unter Verwendung der dimensionsbehafteten Kon-

* Ein vollständiger Ausdruck mit Angabe der Form der Operatoren O („Vektor-Achsialvektor"-Kopplung) unter Berücksichtigung der DIRAC-Theorie findet sich z. B. bei E. J. KONOPINSKI, Ann. Rev. Nucl. Sci., **9**, 99 (1959); H. SCHOPPER, Fortschr. d. Phys., **8**, 327 (1960); J. A. SMORODINSKIJ, ebenda S. 426, oder bei M. A. PRESTON, Physics of the Nucleus, Addison-Wesley, 1962, Chap. 15.

stanten m, c, $\hbar$ darstellen als

$$G = g\,\frac{(\hbar c)^3}{(m c^2)^2}\,.$$

Nimmt man für m die Elektronenmasse, so hat die verbleibende dimensionslose „Kopplungskonstante" g den experimentell ermittelten* Zahlenwert

$$g = (2{,}87 \pm 0{,}11)\cdot 10^{-12}.$$

Die β-Wechselwirkung ist damit um viele Größenordnungen schwächer als die elektromagnetische (der entsprechende Kopplungsfaktor ist $\alpha \approx \frac{1}{137}$) oder gar die „starke" Wechselwirkung zwischen den Nukleonen (Kopplungskonstante von der Größenordnung 10). Man nennt die β-Wechselwirkung daher auch die „schwache Wechselwirkung".

Das Matrixelement M in (50.2) ist nur innerhalb des Kerns wesentlich von Null verschieden. Da $\psi_{\beta(r)}$ und $\psi_{\nu(r)}$ – abgesehen von einer Coulomb-Korrektur (s. unten) – durch ebene Wellen angenähert werden können, enthält M den Faktor $\exp[i(\vec{k}_\nu + \vec{k}_\beta)\,\vec{r}]$. Entwickelt man diesen nach Multipolen, dann sieht man, daß wegen $(k_\nu + k_\beta)\,R \ll 1$ (R = Kernradius) die Emission der Leptonen um so unwahrscheinlicher ist, je höher die Multipolordnung l ist. Die Übergangswahrscheinlichkeit bei $l \neq 0$ ist aber sicher von Null verschieden, weil der Kern nicht punktförmig ist und Bereiche bis zu $r \approx R$ zum Integral (50.1) beitragen. Der niedrigst mögliche l-Wert ergibt sich aus der Drehimpulsbilanz des Zerfalls. Übergänge mit $l = 0$ heißen „erlaubt", mit $l > 0$ „verboten".

Die Spins von β-Teilchen und Neutronen müssen noch in das Bild eingefügt werden. Wenn die Teilchen mit $l = 0$ emittiert werden, können sie „antiparallelen" oder „parallelen" Spin haben. Im ersten Fall (Singulett) ändert sich der Kernspin beim Zerfall nicht ($\Delta I = 0$, auch $I = 0 \rightarrow I = 0$ erlaubt) und die Parität der Kerneigenfunktionen bleibt erhalten („Fermi-Übergang")**. Im zweiten Fall (Triplett) ist $\Delta I = \pm 1, 0$, aber $I = 0 \rightarrow I = 0$ verboten; die Parität ändert sich ebenfalls nicht („Gamow-Teller-Übergang")***. Beide Zerfallsweisen sind beobachtet worden; Gamow-Teller-Übergänge kommen häufiger vor, besonders bei schweren Kernen.

b) Nichterhaltung der Parität

Eine sehr wichtige Entdeckung machten Lee und Yang im Jahre 1956, daß nämlich das β-Teilchen und das Neutrino in Zustände unbestimmter

---

* Gilt für reine „Fermi"-Wechselwirkung; die Konstante für „Gamow-Teller"-Wechselwirkung ist um einen Faktor $1{,}15 \pm 0{,}03$ größer.

** Ein Beispiel für einen reinen „Fermi-Übergang" ist der β^+-Zerfall des O^{14} (Grundzustand 0^+) in den ersten angeregten Zustand des N^{14} (0^+) mit $(KE)_{\beta,\,\max} = 2{,}31$ MeV.

*** Ein Beispiel für reinen „Gamow-Teller-Übergang" ist der erlaubte β^--Zerfall des Co^{60} (β_2 in Fig. 50.3). Hier ist $\Delta I = 1$, die Parität der Kernfunktion bleibt erhalten.

Parität emittiert werden. Während die Wellenfunktion des zerfallenden Kerns sowohl im Ausgangs- als auch im Endzustand Eigenfunktion zum Paritätsoperator ist, gilt dies nicht für die Wellenfunktionen der Leptonenzustände. Viele seitdem durchgeführte Messungen haben ergeben, daß die Leptonenzustände einen Schraubensinn auszeichnen in dem Sinn, daß es eine pseudoskalare Größe (Produkt aus achsialem und polarem Vektor) gibt, deren Erwartungswert nicht verschwindet. Der Schraubensinn wird durch den als „Helizität" bezeichneten Operator

$$\mathscr{h}=2\,\frac{(\vec{s}\,\vec{p})}{\hbar\,|\vec{p}|}$$

beschrieben, wobei $\vec{s}$ der Spinoperator und $\vec{p}$ der Impulsoperator des Leptons ist. Die Behauptung lautet, daß das Lepton bevorzugt in Zustände mit „parallelen" oder „antiparallelen" Spin- und Impulsvektoren emittiert wird. Dann hat das Lepton eine Längspolarisation bzw. einen Schraubensinn.

Das Neutrino bewegt sich in jedem LORENTZ-Koordinatensystem mit Lichtgeschwindigkeit, ferner besitzt sein Spin der Quantenzahl $\frac{1}{2}$ nur zwei diskrete Einstellmöglichkeiten zur Impulsrichtung. Daher kann seine Helizität nur die Werte $+1$ und -1 annehmen. Leider ist die Helizität eines Neutrinos wegen der sehr geringen Wechselwirkung des Neutrions mit Materie dem Experiment nicht leicht zugänglich; indirekte Schlüsse aus den Experimenten an β-Teilchen sind jedoch mit der Annahme verträglich, daß die Neutrinos nicht mit gleicher Wahrscheinlichkeit die Werte $\mathscr{h}=-1$ und $\mathscr{h}=+1$ aufweisen sondern stets die Helizität -1 haben, während die Helizität von Antineutrinos $+1$ ist*.

Da bei Raumspiegelung ($\vec{r}\rightarrow-\vec{r}$) der Impuls und damit $\mathscr{h}$ sein Vorzeichen ändert, kommutiert der Operator $\mathscr{h}$ nicht mit dem Paritätsoperator. Die Wellenfunktion des Neutrinos kann dann keine Eigenfunktion zum Paritätsoperator sein, denn wenn der Zustand am Koordinatenursprung gespiegelt wird, ändert sich der Wert von h, der Zustand geht also nicht in sich selbst über.

Für Teilchen mit endlicher Ruhmasse, die nie Lichtgeschwindigkeit erreichen, kann die Helizität keine Erhaltungsgröße sein. Denn hat das Teilchen in einem System z.B. die Helizität $+1$, so gibt es stets ein (dem Teilchen vorauseilendes) System, in dem der Teilchenimpuls und damit die Helizität das andere Vorzeichen haben. Jedoch ist der Erwartungswert der Längspolarisation der beim β-Zerfall emittierten Elektronen bzw. Positronen im allgemeinen von Null verschieden.

Wenn nun die Wellenfunktion eines Leptons beim β-Zerfall nicht Eigenfunktion zum Paritätsoperator ist, darf auch der HAMILTON-Operator des

* Dies wäre eine Unterscheidungsmöglichkeit für Neutrinos und Antineutrinos.

β-Zerfalls nicht mit dem Paritätsoperator kommutieren, sondern muß einen pseudoskalaren Anteil enthalten. Diesem kann keine Energie im klassischen Sinn entsprechen, da „normale" Energien stets echte Skalare sind. Der β-Zerfall ist damit ein Phänomen, das kein klassisches Analogon hat.

Beispiel: Bei dem am Schluß dieses Paragraphen behandelten β^--Zerfall des Co^{60} liegt ein erlaubter Übergang zwischen einem 5^+- und einem 4^+-Kernniveau vor. Die Erhaltungssätze verlangen, daß dabei die Spins von Zerfallselektron und Neutrino — innerhalb des durch die Unschärferelation zugelassenen Bereiches — „gleiche" Richtung haben, nämlich die Richtung des Spins des Mutterkerns (beachte: Der Spinvektor weist nie genau in die ausgezeichnete z-Richtung). Wenn es gelingt, die Kerne der Co^{60}-Quelle auszurichten, z.B. in einem Magnetfeld bei tiefen Temperaturen, muß wegen der positiven Helizität des Antineutrinos dessen Impuls in die Richtung des Kernspins weisen. Die Impulserhaltung ergibt dann eine bevorzugte Emission der β^--Teilchen entgegengesetzt der Kernspinrichtung. Diese Anisotropie der emittierten Elektronen wurde experimentell erstmals von C. S. WU nachgewiesen *.

Der Umfang dieses Buches verbietet eine weitere Diskussion; der Leser wird auf die bei Gleichung (50.1) angegebenen ausführlichen Darstellungen verwiesen.

c) β-Spektrum und fT-Wert

Die Funktion ψ_β in (50.2) hängt weiterhin von der Ladung des emittierten β-Teilchens sowie der Ladung des Folgekerns ab, weil das β-Teilchen sich nach seiner Emission im elektrostatischen Feld des Kerns befindet. Am niederenergetischen Ende des β-Spektrums (nichtrelativistischer Grenzfall) gilt angenähert **, wenn das β-Teilchen der Ladung ze mit dem Bahndrehimpuls $l=0$ emittiert wird [vgl. den Durchdringungsfaktor (44.9) des COULOMB-Walles]

$$\frac{|\psi_{\beta\,(0)}|_z^2}{|\psi_{\beta\,(0)}|_{z=0}^2} = F_{(Z,\,p)} = \frac{\eta}{1-e^{-\eta}} \quad \text{mit} \quad \eta = -\frac{\pi z Z \alpha c}{2v}. \tag{50.3}$$

Dabei ist $(\psi_\beta)_{z=0}$ die Wellenfunktion eines hypothetischen, „ungeladenen" Elektrons, die als ebene Welle angesetzt werden kann (s. oben), α die Feinstrukturkonstante, $v=p/m_e$ die (hier als nichtrelativistisch angenommene) Geschwindigkeit des β-Teilchens in großer Entfernung vom emittierenden Kern und Z die Ladung des Tochterkerns.

Da das Matrixelement des Übergangs (50.2) außer über den COULOMB-Term (50.3) nicht von der Verteilung der freiwerdenden Energie auf β-Teilchen und Neutrino bzw. Antineutrino abhängt, wird das Energie- und Impulsspektrum der β-Teilchen („Glockenform", s. Fig. 11.2 und Fig. 50.1) hauptsächlich durch den statistischen Faktor $\rho_{(E_{\mathrm{End}})}\,dp$ bestimmt. Er

---

* C.S. WU, E. AMBLER, R.W. HAYWARD, D.D. HOPPES u. R.P. HUDSON: Phys. Rev. **105**, 1413 (1957).

** Exakte, relativistische Rechnungen ergeben die bei K. SIEGBAHN, Beta- and Gamma-Ray Spectroscopy, North-Holland Publ. Co., Amsterdam 1955, Appendix II, tabellierten Werte der Funktion $F_{(Z,p)}$.

wird durch Abzählen der Endzustände im Energieintervall dE_{End} auf folgende Weise gewonnen:

1. Der zerfallende Kern hat – abgesehen von der Entartung in der Quantenzahl m_I – bei vorgegebenen Impulsen für β-Teilchen und Neutrino wegen der Erhaltungssätze nur einen Endzustand. Der Spinfaktor des Entartungsgrades wird gewöhnlich dem Kernmatrixelement zugeschlagen.

2. Das β-Teilchen mit dem Impuls $\vec{p}$ hat

$$(dn)_\beta = \frac{4\pi p^2}{(2\pi\hbar)^3} dp$$

Endzustände im Impulsintervall dp, wenn das Ortsvolumen auf Eins normiert wird (vgl. §44) und die Spinrichtung festliegt.

3. Das Neutrino habe den Impuls $\vec{q}$, also ist bei festliegender Spinrichtung

$$(dn)_\nu = \frac{4\pi q^2}{(2\pi\hbar)^3} dq$$

(Ortsvolumen ebenfalls auf Eins normiert).

q und die Endenergie sind über den Energiesatz verknüpft: Da man die Rückstoßenergie vernachlässigen kann, ist nach §11

$$E_{\text{End}} = M_B c^2 + \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \end{Bmatrix} m_e c^2 + (KE)_\beta + (KE)_\nu \quad \text{für} \quad \begin{cases} \beta^+\text{-Zerfall} \\ \beta^-\text{-Zerfall} \end{cases}$$

mit

$$(KE)_\beta + (KE)_\nu = (KE)_{\beta,\max}$$

bzw. nach (8.5)

$$\sqrt{c^2 p^2 + m_e^2 c^4} - m_e c^2 + cq = (KE)_{\beta,\max}.$$

Daraus folgt (bei festem p)

$$dq = \frac{1}{c}\, d(KE)_{\beta,\max} = \frac{1}{c}\, dE_{\text{End}}.$$

Insgesamt ist

$$\rho_{(E_{\text{End}})}\, dp = \frac{(dn)_\beta (dn)_\nu}{dE_{\text{End}}} = \frac{16\pi^2 p^2 q^2}{(8\pi^3 \hbar^3)^2 c} dp$$

$$= \frac{1}{4\pi^4 \hbar^6 c^3} p^2 [(KE)_{\beta,\max} - (KE)_\beta]^2\, dp.$$

Mit (50.1), (50.2) und (50.3) folgt für das Impulsspektrum der β-Teilchen

$$\boxed{w_{(p)}\, dp = \frac{G^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} |M|^2_{z=0} F_{(Z,p)}\, p^2 [(KE)_{\beta,\max} - (KE)_\beta]^2\, dp.} \tag{50.4}$$

Auf Grund der (relativistisch gültigen) Beziehungen [vgl. (8.4) und (8.5)]

$$c^2 p\, dp = E\, dE = (KE + m_e c^2)\, d(KE)$$

kann man die Impulsverteilung in die Energieverteilung umrechnen und umgekehrt.

Werden die β-Teilchen mit kleinen Energien ausgesandt („unteres" Ende des Spektrums), so ist der statistische Faktor proportional zu p^2, der Faktor $F_{(Z,p)}$ umgekehrt proportional zu p für β^--Zerfall und proportional zu $\frac{1}{p} \exp\left(-\frac{\text{const}}{p}\right)$ für β^+-Zerfall. Das *Impuls*spektrum verläuft also

bei kleinen p proportional p für Elektronenemission,

proportional $p \exp\left(-\frac{\text{const}}{p}\right)$ für Positronenemission.

Das *Energie*spektrum der β-Teilchen ist bei kleinen kinetischen Energien ohne COULOMB-Korrektur proportional zu $(KE)_\beta^{\frac{1}{2}}$; der Term $F_{(Z,p)}$ bewirkt, daß das Energiespektrum

bei kleinen KE proportional const $\neq 0$ für Elektronenemission,

proportional $\exp\left(-\frac{\text{const}}{(KE)_\beta^{\frac{1}{2}}}\right)$ für Positronenemission

wird.

Die Positronen werden durch den COULOMB-Wall im Kern zurückgehalten und können ihn bei kleinen Energien nur durch Tunneleffekt verlassen; außerhalb werden sie durch die elektrostatische Abstoßung beschleunigt. Daher gibt es im β^+-Spektrum wenig niederenergetische Positronen. Die Elektronen befinden sich nach der Emission in einem anziehenden COULOMB-Potential und werden beim Verlassen des Kerns abgebremst. Daher verschiebt sich ihr Spektrum zu niedrigen Energien (s. Fig. 50.1).

Falls $m_\nu = 0$ ist, mündet das Spektrum der β-Teilchen bei großen kinetischen Energien (nahe der Maximalenergie) mit der Steigung Null in die Abszisse ein. Alle experimentellen Befunde deuten darauf hin, daß das Neutrino wirklich eine verschwindende Ruhmasse hat.

In Fig. 50.1 sind als Beispiel das Zefallsschema des Cu^{64} sowie das zugehörige β^+- und β^--Spektrum dargestellt. Der Impuls der β-Teilchen wurde mit einem magnetischen Spektrometer gemessen; er ist deshalb in Einheiten [Gauß cm] aufgetragen (die Ablenkung eines geladenen Teilchens im homogenen Magnetfeld führt zu einer Kreisbahn mit dem Radius p/zeB, p = Impuls, ze = Ladung, B = magnetische Kraftflußdichte). Man erkennt deutlich den Einfluß des COULOMB-Faktors $F_{(Z,p)}$.

Um die Grenzenergie $(KE)_{\beta,\max}$ eines β-Spektrums zu bestimmen, die nach (11.7) mit dem Q-Wert der Zerfallsreaktion zusammenhängt, trägt man die Funktion

$$\sqrt{\frac{w_{(p)}}{p^2 F_{(Z,p)}}} \quad \text{gegen} \quad (KE)_\beta$$

auf („KURIE-Plot"). (Experimentell zugänglich sind $w_{(p)}$ und p^2, die Funktion $F_{(Z,p)}$ wird Tabellen entnommen.) Durch Extrapolation der erhaltenen Geraden* bis zum Schnittpunkt mit der Abszisse erhält man $(KE)_{\beta,\max}$.

* Für verbotene Übergänge erhält man nicht notwendig eine Gerade, in diesem Falle ist die Auswertung komplizierter. Auch bei nicht verschwindender Ruhmasse des Neutrinos würde sich keine exakte Gerade ergeben.

Integriert man (50.4) über alle Impulse, so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, daß überhaupt ein β-Zerfall stattfindet, zu

$$\left.\begin{aligned}\lambda &= \int\limits_0^{p_{\max}} w(p)\,dp = C' \int\limits_0^{p_{\max}} F_{(Z,\,p)}\, p^2 \left[(KE)_{\beta,\,\max} - (KE)_\beta\right]^2 dp\\ &= m_e^5 c^7 C' f_{\left(Z,\,\frac{(KE)_{\beta,\,\max}}{m_e c^2}\right)} = C f_{\left(Z,\,\frac{(KE)_{\beta,\,\max}}{m_e c^2}\right)}\,.\end{aligned}\right\} \qquad (50.5)$$

$(KE)_{\beta^-,\,\max} = 0.573$ MeV $\quad \log_{10} fT = 5.3$

$(KE)_{\beta^+,\,\max} = 0.656$ MeV $\quad \log_{10} fT = 5.0$

Fig. 50.1. Zerfallsschema, Impuls- und Energiespektrum des Cu^{64}. Dieses Isotop (u-u-Kern) liegt nahe der Sohle des Energietals und hat beide Zerfallsmöglichkeiten β^- und β^+ bzw. EC. Die verschiedenen Formen der Spektren für β^-- und β^+-Zerfall resultieren hauptsächlich aus der verschiedenen elektrostatischen Wechselwirkung mit dem Folgekern [Faktor $F_{(Z,\,p)}$, siehe (50.3)]

Bei Kenntnis von $(KE)_{\beta,\,\max}$ läßt sich die dimensionslose Größe $f_{\left(Z,\,\frac{(KE)_{\beta,\,\max}}{m_e c^2}\right)}$ aus der Definitionsgleichung (50.5) numerisch berechnen. Sie ist tabelliert*; für große $(KE)_{\beta,\,\max}$ ist f proportional zu $\left[\frac{(KE)_{\beta,\,\max}}{m_e c^2} + 1\right]^5$.

* E. Feenberg und G. Trigg, Rev. Mod. Phys. **22**, 399 (1950).

λ ist mit der Halbwertszeit T des Zerfalls verknüpft; es gilt der Zusammenhang

$$T=\frac{\ln 2}{\lambda}=\frac{\ln 2}{Cf} \quad \text{mit} \quad C=\frac{m_e c^2}{2\pi^3 \hbar} g^2 |M|^2_{z=0}. \tag{50.6}$$

Im Experiment bestimmt man T und $(KE)_{\beta,\,\max}$, berechnet $f_{\left(Z,\,\frac{(KE)_{\beta,\,\max}}{m_e c^2}\right)}$ nach (50.5) und bildet den Ausdruck

$$fT=\frac{\ln 2}{C} \quad (\text{„}fT\text{-Wert“}). \tag{50.7}$$

Mit (50.6) folgt daraus die Größe des Matrixelementes. Der fT-Wert ist umgekehrt proportional zu $|M|^2_{z=0}$ und nimmt also mit der Bahndrehimpulsquantenzahl l der emittierten Leptonen zu. fT ist damit ein Maß für den Verbotenheitsgrad des Überganges und kann als Kennzeichen zur Klassifikation der beobachteten β-Zerfälle herangezogen werden. Meist wird nicht fT sondern $\log_{10} fT$ angegeben. „Erlaubte“ Zerfälle haben niedrige, „verbotene“ Zerfälle hohe fT-Werte *.

Eine Untergruppe der „erlaubten“ Zerfälle ($l=0$) sind die „übererlaubten“, bei denen das zerfallende Nukleon vorher und nachher zur selben Schale im Sinne des Schalenmodells gehört. Bei den sonstigen „erlaubten“ Zerfällen wechselt das zerfallende Nukleon die Schale. In die Klasse der übererlaubten Zerfälle gehören die β-Zerfälle von Spiegelkernen (vgl. § 14); Beispiele sind die β-Zerfälle des freien Neutrons und des Tritons. Die Auswahlregeln sind $\Delta l=0$, $\Delta I=0$, kein Paritätswechsel der Kerneigenfunktion. Für diese Zerfälle ist $\log_{10} fT \approx 3{,}5$.

„Erlaubte“ Zerfälle haben die Auswahlregeln $\Delta l=0$, $\Delta I=\pm 1, 0$, kein Paritätswechsel; ihre $\log_{10} fT$-Werte liegen – je nach dem Wert von $|M|^2$ – zwischen etwa 4,5 und 7.

β-Zerfälle mit $\Delta l=1$ werden „einfach verboten“ genannt. Hierbei muß ein Paritätswechsel der Kerneigenfunktionen stattfinden; $\Delta I=0, \pm 1, \pm 2$; $6 \lesssim \log_{10} fT \lesssim 10$.

Bei Übergängen mit $\Delta l=2$ bleibt die Parität der Kerneigenfunktion wieder erhalten. Man unterscheidet „l-verbotene“ Übergänge, deren Auswahlregeln für ΔI ähnlich sind wie für einfach verbotene, $5 \lesssim \log_{10} fT \lesssim 9$, und „zweifach verbotene“ Übergänge mit $\Delta I=\pm 2, \pm 3$ (auch der Übergang $0 \to 0$ bei GAMOW-TELLER-Auswahlregel gehört hierhin), $\log_{10} fT \gtrsim 10$. Es gibt auch noch höher verbotene Übergänge, ihre fT-Werte steigen mit dem Verbotenheitsgrad.

Die Form des β-Spektrums ist für übererlaubte, erlaubte und einfach verbotene Übergänge dieselbe. Die l-verbotenen Übergänge zeigen eine

* Für „erlaubte“ reine FERMI-Übergänge ist $|M|^2_{z=0}=2$. Aus dem gemessenen fT-Wert des O^{14}-Zerfalls [$fT=(3160 \pm 12)$ sec] ergibt sich nach weiteren Korrekturen der oben angegebene Wert für g.

charakteristische Änderung des Spektrums, daher können sie leicht identifiziert werden.

Die oben beschriebenen „Verbotenheitsgrade“ sind nur ein qualitatives Maß für die Übergangswahrscheinlichkeit, von einem exakten Verbot ist nicht die Rede.

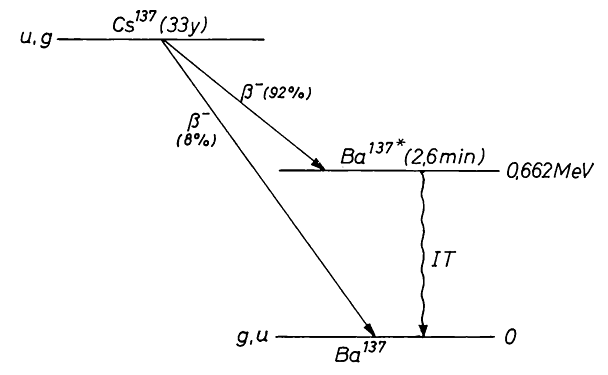


Fig. 50.2. Zerfallsschema des Cs^{137}. IT = isomerer Übergang (isomeric transition). Zerfallsdaten s. Tabelle 50.1

Tabelle 50.1. *Zum β-Zerfall des* Cs^{137}

Meßgröße	Ergebnis	Schlußfolgerung
Grundzustände:		
Spin Cs^{137}	$\frac{7}{2}$	Aus Fig. 28.2 folgt $I=l-\frac{1}{2}$,
Magn. Kernmoment des Cs^{137}	$+2{,}822\ \mu_K$	daraus $l=4$, Parität +.
		Grundzustand ist $g_{\frac{7}{2}}$-Zustand
Spin Ba^{137}	$\frac{3}{2}$	Aus Fig. 28.3 folgt $I=l-\frac{1}{2}$,
Magn. Kernmoment des Ba^{137}	$+0{,}931\ \mu_K$	daraus $l=2$, Parität +.
		Grundzustand ist $d_{\frac{3}{2}}$-Zustand
β-Zerfälle:		
Halbwertszeit des Cs^{137}	$33y$	
$(KE)_{\beta,\max}(92\%)$	0,51 MeV	Partielle Halbwertszeit $T=33y/0{,}92=36y$; $\log_{10} fT=9{,}6$.
Form des β-Spektrums	erlaubt	Einfach verbotener Übergang, $\Delta l=1$, Paritätswechsel
$(KE)_{\beta,\max}(8\%)$	1,17 MeV	Partielle Halbwertszeit $T\approx 400y$, $\log_{10} fT=12{,}2$, zweifach verboten, kein Paritätswechsel
γ-Zerfall:		
Halbwertszeit des Ba^{137*}	2,6 min	$M(4)$
E_γ	0,662 MeV	
α_K	0,08	$L=3$, 4 oder 5
α_K/α_L	4,6	$L=4$

Im folgenden wird an einigen Beispielen gezeigt, wie man aus β- und γ-Zerfallsdaten Aufschluß über Spins und Paritäten von Kernzuständen erhalten kann.

1. β^--Zerfall des ${}_{55}Cs_{82}^{137}$ (s. Fig. 50.2). In Tabelle 50.1 sind die Meßdaten und die daraus ableitbaren Schlußfolgerungen zusammengestellt.

Die Meßwerte des 8%-β^--Überganges sind aus den Grundzustandsdaten verständlich. Für den isomeren Zustand des Ba^{137} erwartet man aus dem Verbotenheitsgrad des 92%-β^--Zerfalls negative Parität und $l=3$ oder 5. Aus Tabelle 49.1 entnimmt man, daß bei $M(4)$-Strahlung $\Delta I=4$ sein muß. Daher hat der isomere Zustand den Spin $\frac{11}{2}$ und negative Parität ($h_{\frac{11}{2}}$-Zustand). Aus dem Einteilchen-Schalenmodell ist verständlich (s. Tabelle 32.2), daß das Ba^{137} mit 81 Neutronen einen $d_{\frac{3}{2}}$-Grundzustand hat und daß ein $h_{\frac{11}{2}}$-Zustand nahe dem Grundzustand liegt; dazu paart sich eins der $h_{\frac{11}{2}}$-Neutronen mit dem $d_{\frac{3}{2}}$-Neutron und läßt ein unpaariges $h_{\frac{11}{2}}$-Neutron zurück.

2. β^--Zerfall des ${}_{27}Co_{60}^{33}$ (s. Fig. 50.3). In Tabelle 50.2 sind die Meßdaten und die daraus ableitbaren Schlußfolgerungen zusammengestellt.

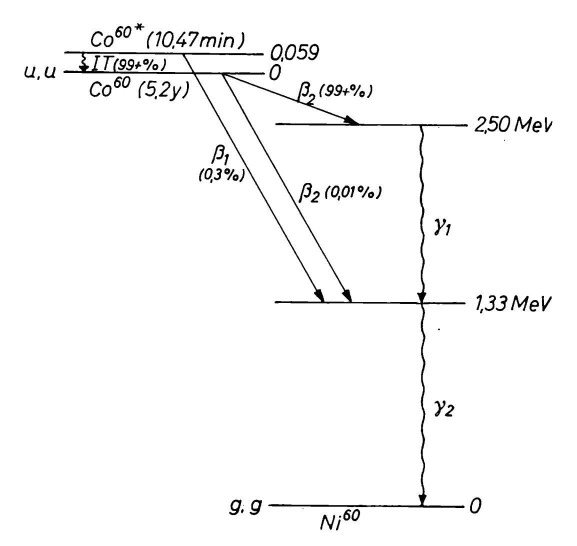


Fig. 50.3. Zerfallsschema des Co^{60}. Zerfallsdaten s. Tabelle 50.2

Für die angeregten Zustände des Ni^{60} folgt eindeutig 2^+ (1,33 MeV-Niveau) und 4^+ (2,50 MeV-Niveau). Die Tatsache, daß β_2 so viel häufiger ist als β_3, unterstützt die Zuordnung $I=5$ für den Grundzustand des Co^{60}. Da die $M(3)$-Strahlung des IT-Überganges die Parität erhält, ergeben sich als mögliche Zuordnungen für den Co^{60}*-Zustand 2^+, 8^+ (wenn Grundzustand 5^+) oder 2^-, 8^- (wenn Grundzustand 5^-). Die Existenz des Überganges β_1 schließt 8^+ und 8^- aus. Die Entscheidung, welche Parität Grundzustand und isomerer Zustand haben, kann aus dem hier benutzten Datenmaterial nicht getroffen werden; aus anderen Kernreaktionen weiß man jedoch, daß beide Zustände gerade Parität haben. Also ergibt sich für den isomeren Zustand die Zuordnung 2^+.

d) Elektroneneinfang

Der Elektroneneinfang, der mit dem β^+-Zerfall in Konkurrenz tritt und sogar für $0 \leqq Q_{EC} \leqq 2m_e c^2$ die einzig mögliche Zerfallsart ist, liefert keine neuen Informationen, da λ_{EC} durch das gleiche Matrixelement ausgedrückt wird wie λ_{β^+}. Für $Q_{EC} \geqq 2m_e c^2$ hängt das Verhältnis $\lambda_{EC}/\lambda_{\beta^+}$ nicht vom Matrixelement ab; da es proportional zu Z^3 ist, beobachtet man für schwere Kerne fast nur den EC-Prozeß. Vgl. auch §11.

Tabelle 50.2. *Zum β-Zerfall des Co^{60}*

Meßgröße	Ergebnis	Schlußfolgerung
Grundzustände:		
Spin Co^{60}	5	(u-u-Kerne haben ganzzahligen Spin)
Spin Ni^{60}	0	(g-g-Kerne haben stets den Spin Null)
Halbwertszeit Co^{60}	$5{,}2y$	
Zerfälle des Co^{60*}:		
Halbwertszeit	10,47 min	
$E_\gamma(IT)$	0,059 MeV	$M(3)$
α_K/α_L	4,55	
$(KE)_{\beta,\max}$ von β_1	1,56 MeV	$\log_{10} f\,T = 7{,}2$; β-Zerfall erlaubt oder einfach verboten
Form des β-Spektrums	erlaubt	
β-Zerfälle des Co^{60}:		
$(KE)_{\beta,\max}$ von β_2	0,312 MeV	$\log_{10} f\,T = 7{,}5$; β-Zerfall erlaubt oder einfach verboten
Form des β-Spektrums	erlaubt	
$(KE)_{\beta,\max}$ von β_3	1,48 MeV	
γ-Zerfälle der Ni^{60}-Zustände:		
$E_{\gamma 1}$	1,17 MeV	$E(2)$
α	$1{,}72 \cdot 10^{-4}$	
$E_{\gamma 2}$	1,33 MeV	$E(2)$
α	$1{,}24 \cdot 10^{-4}$	
Winkelkorrelation	$a_2 = \frac{1}{8}$	nach Tabelle 49.2 handelt es sich um die Kaskade 4(2) 2(2) 0
	$a_4 = \frac{1}{24}$	

Weitere mögliche Übergänge:
$Co^{60*} \to Ni^{60}$(Grundzustand): Häufigkeit $< 10^{-6}$
Ni^{60}, 2,5 MeV $\to Ni^{60}$(Grundzustand): Häufigkeit $< 2{,}5 \cdot 10^{-7}$

XV. Über Kernmodelle

Wir haben bisher zwei in den Grundzügen verschiedene Modelle für die Grundzustände von Kernen kennengelernt, nämlich das Tröpfchenmodell (Kapitel VI) und das Schalenmodell (Kapitel XI). Beim letzteren sind die Korrelationen der einzelnen Teilchen gering und werden nur durch das gemeinsame Potential aller Teilchen hervorgerufen. Zugeführte Energie kommt nur einem Teilchen zugute, das in ein höheres „Einteilchenniveau" übergeht. Beim Tröpfchenmodell sind die Teilchenkorrelationen stark, so daß eine Energiezufuhr den Kern als ganzes, also alle Nukleonen gemeinsam, anregt („kollektive" Anregung). Beide Modelle sind nur als Grenzfälle brauchbar.

Ein der Wirklichkeit näherkommendes Modell muß die Züge beider Extreme tragen. Man kann entweder vom Schalenmodell ausgehen und Restwechselwirkungen berücksichtigen, aufgrund deren die Nukleonen

stärker aneinander gekoppelt werden, oder man ändert das Tröpfchenmodell so ab, daß nur noch die abgeschlossenen Schalen (evtl. auch Unterschalen) als „Rumpf" wie ein Tröpfchen, die restlichen Nukleonen aber nach dem Schalenmodell im Potential dieses Rumpfes behandelt werden. Das so entstehende Modell hat den Namen „Unified model" erhalten; es ist mathematisch kompliziert und soll daher hier nicht ausführlich diskutiert werden.

Wie man aus der Tröpfchenvorstellung theoretische Voraussagen über die niedrigen angeregten Zustände gewinnen kann, wird in § 51 angedeutet. In § 52 werden alle Kernmodelle, auch die bei der Beschreibung der Kernreaktionen benutzten, einander gegenübergestellt.

§ 51. Grundzüge des Kollektivmodells der Atomkerne

a) Oberflächenschwingungen kugelsymmetrischer Kerne

Das Tröpfchenmodell des Atomkerns (s. § 13) beruht auf der Vorstellung, daß der Kern ein kugelförmiges Gebilde konstanter Dichte mit scharfem Rand sei. Dieses Bild ist einigermaßen sinnvoll für nicht deformierte *g-g*-Kerne, d.h. solche Kerne, deren Quadrupolmoment verschwindet. Aus Fig. 30.3 geht hervor, daß für derartige Kerne die Neutronen- oder Protonenzahl in der Nähe einer magischen Zahl liegt.

Um die möglichen Anregungsformen diskutieren zu können, betrachten wir ein kugelförmiges Tröpfchen aus einer inkompressiblen Flüssigkeit, für die nur wirbel- und reibungsfreie Bewegungen möglich sein sollen. Seine Oberfläche S, die im Ruhezustand durch $S_{(r)}=R$ (Kernradius) beschrieben wird, kann — bei konstanter Dichte — Deformationsschwingungen erleiden, wobei die Oberflächenspannung des Kerns als Rückstellkraft wirkt. S kann im schwingenden Zustand durch eine Entwicklung nach Kugelfunktionen dargestellt werden (diese Entwicklung wird dadurch nahegelegt, daß die angeregten Kernzustände feste Drehimpulse haben):

$$S_{(R,\vartheta,\varphi,t)}=R\left[1+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\alpha_{l,m(t)}\,Y_{l,m(\vartheta,\varphi)}\right], \tag{51.1}$$

dabei sind die $\alpha_{l,m}$ die Schwingungsamplituden. Da S reell sein soll und nach (21.10) gilt

$$Y_{l,-m}=(-1)^m\,Y_{l,m}^*,$$

muß man verlangen

$$\alpha_{l,-m}=(-1)^m\,\alpha_{l,m}^*.$$

Wir betrachten zunächst den Term mit $l=0$. Da $Y_{0,0}=(4\pi)^{-\frac{1}{2}}$ ist, also nicht von den Winkeln abhängt, stellt dieses Glied Kompressionsschwin-

gungen dar, die wegen der Voraussetzung der Inkompressibilität verschwinden müssen*. Also darf $\alpha_{0,0}$ nicht von der Zeit abhängen. Wegen der Volumkonstanz des Tröpfchens ist aber $\alpha_{0,0} \neq 0$, denn

$$V = \iint_{\Omega} \int_0^S r^2\, dr\, d\Omega = \frac{1}{3} \iint_{\Omega} S^3_{(\vartheta,\varphi)}\, d\Omega = \frac{R^3}{3} \iint_{\Omega} \Big(1 + \sum_{l,m} \alpha_{l,m} Y_{l,m}\Big)^3 d\Omega$$

muß gleich $\frac{4\pi}{3} R^3$ sein. Wenn die $\alpha_{l,m}$ als so klein angenommen werden, daß man nach quadratischen Gliedern abbrechen kann, folgt

$$\frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{4\pi}{3} R^3 + R^3 \sum_{l,m} \alpha_{l,m} \iint Y_{l,m}\, d\Omega + R^3 \sum_{l,m} \sum_{l',m'} \alpha^*_{l,m} \alpha_{l',m'} \iint Y^*_{l,m} Y_{l',m'}\, d\Omega,$$

also wegen der Orthonormalität der Kugelfunktionen

$$\alpha_{0,0} = -\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{l,m} |\alpha_{l,m}|^2.$$

Die $|\alpha_{l,m}|^2$ sind zeitunabhängig, da – wie unten gezeigt wird – die Schwingungen harmonisch sind.

Der Entwicklungsterm für $l=1$ beschreibt – abgesehen von einer Bewegung des Schwerpunktes des Tröpfchens im Laborsystem – die sogenannte „Dipolschwingung", die man sich so vorstellen kann, als bewege sich die Protonenflüssigkeit gegen die Neutronenflüssigkeit im Kern, wobei aber das Kernvolumen bzw. die Nukleonendichte konstant bleibt. Diese Schwingungen führen zur Riesenresonanz beim Kernphotoeffekt (s. §47) und haben Anregungsenergien von etwa 20 MeV, kommen also als Erklärung für die niedrigen Anregungsstufen der Kerne nicht in Frage. Die Rückstellkraft wird hier durch die Neutronen-Protonen-Asymmetrie hervorgerufen [vgl. den Symmetrieterm in der WEIZSÄCKER-Formel (13.12)].

Die niedrigen angeregten Zustände können erst durch Schwingungen mit $l \geqq 2$ verursacht werden. Für wachsende l wird aber die Wellenlänge der Schwingung immer kleiner und damit die Anregungsenergie größer, so daß die Schwingungen mit $l=2$ (und evtl. $l=3$) in unserem Zusammenhang die wichtigsten sind. Aus der (hier eigentlich modellfremden) Vorstellung, daß der Kern aus einer endlichen Zahl von Nukleonen besteht, zieht man den Schluß, daß die Reihe (51.1) spätestens dann abbrechen muß, wenn die

* Da in Wirklichkeit die „Kernflüssigkeit" nicht ganz inkompressibel ist, können bei höheren Anregungsenergien (ab etwa 6 bis 10 MeV) Kompressionsschwingungen auftreten. Dabei verändert das Tröpfchen unter Beibehaltung der Kugelgestalt periodisch den Radius. Der erste angeregte Zustand des doppelt magischen Kerns O^{16} bei 6,05 MeV (0^+-Zustand) wird zuweilen als eine solche Schwingung gedeutet.

Wellenlänge der Schwingung in die Nähe des mittleren Nukleonenabstandes kommt.

Inkompressibilität und Wirbelfreiheit der Kernflüssigkeit haben zur Folge, daß sich das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}_{(\vec{r})}$ der Flüssigkeit durch ein Geschwindigkeitspotential $\Phi_{(\vec{r})}$ darstellen läßt:

$$\vec{v} = \operatorname{grad} \Phi_{(\vec{r})}$$

mit

$$\operatorname{div} \vec{v} = \Delta \Phi = 0 .$$

Die Lösung der LAPLACE-Gleichung für Φ ist in Kugelkoordinaten (vgl. §21)

$$\Phi = \sum_{l,m} \beta_{l,m} r^l Y_{l,m(\vartheta,\varphi)} . \tag{51.2}$$

Dabei muß die Randbedingung erfüllt sein, daß die Geschwindigkeit an der Kugeloberfläche gleich der zeitlichen Änderung der Oberflächenfunktion S ist, also

$$(v_r)_{S(\vartheta,\varphi)} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_{S(\vartheta,\varphi)} = \frac{\partial S_{(\vartheta,\varphi,t)}}{\partial t} .$$

Mit (51.1) und (51.2) folgt

$$R \sum_{l,m} \dot{\alpha}_{l,m} Y_{l,m(\vartheta,\varphi)} = \sum_{l,m} l \beta_{l,m} S^{l-1} Y_{l,m(\vartheta,\varphi)} .$$

Verlangt man, daß neben $\alpha_{l,m}$ auch $\dot{\alpha}_{l,m}$ klein sein soll, so kann man näherungsweise die Größe S auf der rechten Seite durch R ersetzen und erhält durch Koeffizientenvergleich

$$\beta_{l,m} = \frac{\dot{\alpha}_{l,m}}{l R^{l-2}} . \tag{51.3}$$

Auch die $\beta_{l,m}$ sind kleine Größen.

Da das Glied für $l=0$ in (51.2) ein konstantes Potential ergibt, das uninteressant ist, kann man $\beta_{0,0}=0$ setzen. Dies bedeutet, daß das Geschwindigkeitspotential und damit die Strömung der Kernflüssigkeit bei $l=0$ verschwindet. Die Bewegung der Kernmaterie beruht dann auf den Deformationen.

Als nächstes berechnen wir die kinetische Energie der Kernmaterie aufgrund der Strömung im deformierten Zustand. Bei konstanter Dichte ρ ist

$$\begin{aligned} KE &= \frac{\rho}{2} \int v^2 \, dV = \frac{\rho}{2} \int |\operatorname{grad} \Phi|^2 \, dV \\ &= \frac{\rho}{2} \int \left[\left| \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|^2 + \frac{1}{r^2} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right|^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right|^2 \right] dV . \end{aligned}$$

Für Φ wird (51.2) eingesetzt. Dann ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} KE=\frac{\rho}{2}\sum_{l,m}\sum_{l',m'}\beta_{l,m}\beta_{l',m'}\iint\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{S} r^{l+l'-2}\Big[l\,l'\,Y_{l,m}Y^*_{l',m'}+\\ +\frac{\partial Y_{l,m}}{\partial\vartheta}\frac{\partial Y^*_{l',m'}}{\partial\vartheta}+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial Y_{l,m}}{\partial\varphi}\frac{\partial Y^*_{l',m'}}{\partial\varphi}\Big]r^2\,dr\,d\Omega. \end{aligned}\right\} \quad (51.4)$$

Im Radialintegral kann man näherungsweise die obere Grenze durch R ersetzen, da die Abweichungen $(S-R)$ von erster Ordnung klein sind. Die Integration liefert dann $R^{l+l'+1}/(l+l'+1)$.

Der Winkelanteil läßt sich mit Benutzung von (25.1), (25.20) und

$$\frac{\partial Y_{l,m}}{\partial\varphi}=i\,m\,Y_{l,m}$$

wie folgt umformen: Es ist

$$L^+=L_x+i\,L_y=\hbar\,e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}+i\operatorname{cotg}\vartheta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),$$

$$L^-=L_x-i\,L_y=-\hbar\,e^{-i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}-i\operatorname{cotg}\vartheta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right).$$

Daraus folgt bei Anwendung auf $Y_{l,m}$

$$\frac{1}{\hbar}e^{-i\varphi}L^+\,Y_{l,m}=\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}-m\operatorname{cotg}\vartheta\right)Y_{l,m},$$

$$-\frac{1}{\hbar}e^{i\varphi}L^-\,Y_{l,m}=\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}+m\operatorname{cotg}\vartheta\right)Y_{l,m}.$$

Addition bzw. Subtraktion der beiden Gleichungen führt auf

$$\frac{\partial Y_{l,m}}{\partial\vartheta}=\frac{1}{2\hbar}\left(e^{-i\varphi}L^+-e^{i\varphi}L^-\right)Y_{l,m},$$

$$m\operatorname{cotg}\vartheta\,Y_{l,m}=-\frac{1}{2\hbar}\left(e^{-i\varphi}L^++e^{i\varphi}L^-\right)Y_{l,m}.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{\partial Y_{l,m}}{\partial\vartheta}\frac{\partial Y^*_{l',m'}}{\partial\vartheta}=\frac{1}{4\hbar^2}\big[&(L^+Y_{l,m})(L^+Y_{l',m'})^*+(L^-Y_{l,m})(L^-Y_{l',m'})^*-\\ &-e^{2i\varphi}(L^-Y_{l,m})(L^+Y_{l',m'})^*-e^{-2i\varphi}(L^+Y_{l,m})(L^-Y_{l',m'})^*\big],\end{aligned}$$

$$\frac{m\,m'}{\sin^2\vartheta}\,Y_{l,m}Y^*_{l',m'}=m\,m'(1+\operatorname{cotg}^2\vartheta)\,Y_{l,m}Y^*_{l',m'}=$$

$$\begin{aligned}=m\,m'\,Y_{l,m}Y^*_{l',m'}+\frac{1}{4\hbar^2}\big[&(L^+Y_{l,m})(L^+Y_{l',m'})^*+(L^-Y_{l,m})(L^-Y_{l',m'})^*+\\ &+e^{2i\varphi}(L^-Y_{l,m})(L^+Y_{l',m'})^*+e^{-2i\varphi}(L^+Y_{l,m})(L^-Y_{l',m'})^*\big].\end{aligned}$$

Bei Einsetzen in (51.4) heben sich die gemischten Glieder heraus; unter Benutzung der Orthonormalität der Kugelfunktionen und (25.20) sowie (25.21) liefert das Winkelintegral

$$\delta_{m\,m'}\,\delta_{l\,l'}\left[l^2+\tfrac{1}{2}[l(l+1)-m(m+1)+l(l+1)-m(m-1)]+m^2\right]= \\ =\delta_{m\,m'}\,\delta_{l\,l'}\,l(2l+1)\,.$$

Setzt man die Ergebnisse in (51.4) ein, so folgt

$$KE=\frac{\rho}{2}\sum_{l,m}|\beta_{l,m}|^2\,l\,R^{2l+1}=\frac{1}{2}\sum_{l,m}B_l\,|\dot{\alpha}_{l,m}|^2 \tag{51.5}$$

mit

$$B_l=\frac{\rho R^5}{l};$$

dabei ist (51.3) benutzt. Die kinetische Energie ist also den Quadraten der Deformationsgeschwindigkeit proportional.

Die Dichte ρ läßt sich noch durch die Masse M des Kerns und das Volumen $V=\frac{4\pi}{3}R^3$ ausdrücken:

$$\rho=\frac{3M}{4\pi R^3},$$

damit ergibt sich

$$B_l=\frac{3MR^2}{4\pi l}.$$

Die potentielle Energie wird gegeben durch die Arbeit, die bei der Verformung gegen die Oberflächenspannung geleistet wird. Man erhält*

$$PE=\tfrac{1}{2}\sum_{l,m}C_l\,|\alpha_{l,m}|^2$$

mit

$$C_l=(l-1)\,(l+2)\,\gamma R^2.$$

Dabei ist γ die Konstante der Oberflächenspannung, die sich aus der Weizsäcker-Formel (13.12) als das Verhältnis von Oberflächenenergie und Fläche abschätzen läßt:

$$\gamma=\frac{a_2 A^{\frac{2}{3}}}{4\pi R^2}\approx\frac{a_2}{4\pi R_0^2}$$

(dabei ist $R=R_0 A^{\frac{1}{3}}$ gesetzt). Bei Berücksichtigung der Verkleinerung der Oberflächenspannung durch die Ladung der Protonen erhält man (hier ohne Beweis)

$$C=(l-1)\left[(l+2)\gamma R^2-\frac{3}{2\pi}\,\frac{e^2Z^2}{4\pi\varepsilon_0 R}\,\frac{1}{2l+1}\right].$$

---

* Ausführliche Herleitung s. G. Hertz, Lehrbuch der Kernphysik, Bd. II, Leipzig, 1961, § 116.

Die potentielle Energie ist also proportional zu den Quadraten der Deformationen. Dies ist physikalisch plausibel; da die Kugelgestalt eine Fläche minimaler Energie ist, müssen bei einer Entwicklung um dieses Extremum die linearen Glieder verschwinden, höhere als quadratische Terme werden aber vernachlässigt.

Die Gesamtenergie ist die Summe aus kinetischer und potentieller Energie, also

$$E=\frac{1}{2}\sum_{l,m} B_l\left(|\dot{\alpha}_{l,m}|^2+\frac{C_l}{B_l}|\alpha_{l,m}|^2\right). \tag{51.6}$$

Sie hat die Form einer Summe von Energien linearer, harmonischer Oszillatoren (vgl. das Beispiel am Ende von §23), deren Frequenzen durch

$$\omega_l=\sqrt{\frac{C_l}{B_l}}\approx\sqrt{l(l-1)(l+2)\frac{4\pi\gamma}{3M}}$$

gegeben sind. Die Vermutung, daß $l=0$ und $l=1$ nichts beitragen, findet sich hier bestätigt. Die $\alpha_{l,m}$ spielen die Rolle der „Koordinaten", die $\dot{\alpha}_{l,m}$ die der „Geschwindigkeiten" der Oszillatoren. B_l hat die Funktion der „Masse".

Um aus (51.6) den HAMILTON-Operator zu gewinnen, muß man die Energie durch die Koordinaten und die zugehörigen („kanonisch konjugierten") Impulse $\pi_{l,m}$ ausdrücken, die gegeben sind durch

$$\pi_{l,m}=\frac{\partial(KE)}{\partial\dot{\alpha}_{l,m}}=B_l\,\dot{\alpha}^*_{l,m}. \tag{51.7}$$

Man erhält

$$H=\sum_{l,m}\left(\frac{1}{2B_l}|\pi_{l,m}|^2+\frac{C_l}{2}|\alpha_{l,m}|^2\right). \tag{51.8}$$

In Analogie zu (23.18) sind die Energieeigenwerte

$$E_{n,l,m}=\hbar\,\omega_l(n_{l,m}+\tfrac{1}{2}),$$

wobei die $n_{l,m}$ ganze Zahlen $\geqq 0$ sind. Bezeichnet man mit n_l die Summe

$$n_l=\sum_m n_{l,m},$$

so folgt für die Gesamtenergie des Systems

$$E_n=\sum_{l,m}E_{n,l,m}=\sum_l\hbar\,\omega_l(n_l+\tfrac{1}{2}).$$

Die Energiedifferenz zweier Niveaus ist $\hbar\omega_l$. Das Modell liefert also für jedes l einen Satz äquidistanter Anregungsstufen; die „Nullpunkts-energie" des Grundzustandes (hier eigentlich uninteressant, wenn nur von

Anregungsenergien gesprochen wird) ist $\frac{1}{2}\hbar\sum_l \omega_l$, sie bleibt endlich, da es ein maximales l gibt (s. oben).

Der erste angeregte Zustand mit $n_l=1$ ist $(2l+1)$-fach entartet. Dies legt die Vermutung nahe, daß der Drehimpuls des Zustandes durch l beschrieben wird (hier nicht bewiesen). Die Spinfolge ist bei sogenannten „Quadrupolschwingungen“ mit Schwingungsquanten („Phononen“) von $l=2$, d.h. positiver Parität: 0^+ (Grundzustand, kein Phonon), 2^+ (erster angeregter Zustand, 1 Phonon), 0^+ oder 2^+ oder 4^+ (zweiter angeregter Zustand, Kopplung von zwei Phononen) usw.; es gilt 0^+, 3^- usw. für die „Oktupolschwingungen“ mit Phononen von $l=3$. Der 3^--Zustand sollte bei etwa der gleichen Anregungsenergie liegen wie der zweite angeregte Zustand der Quadrupolschwingungen.

Die Anregungsenergien des ersten angeregten 2^+-Zustandes haben die Größenordnung 1 MeV für leichte und 0,1 MeV für schwere Kerne.

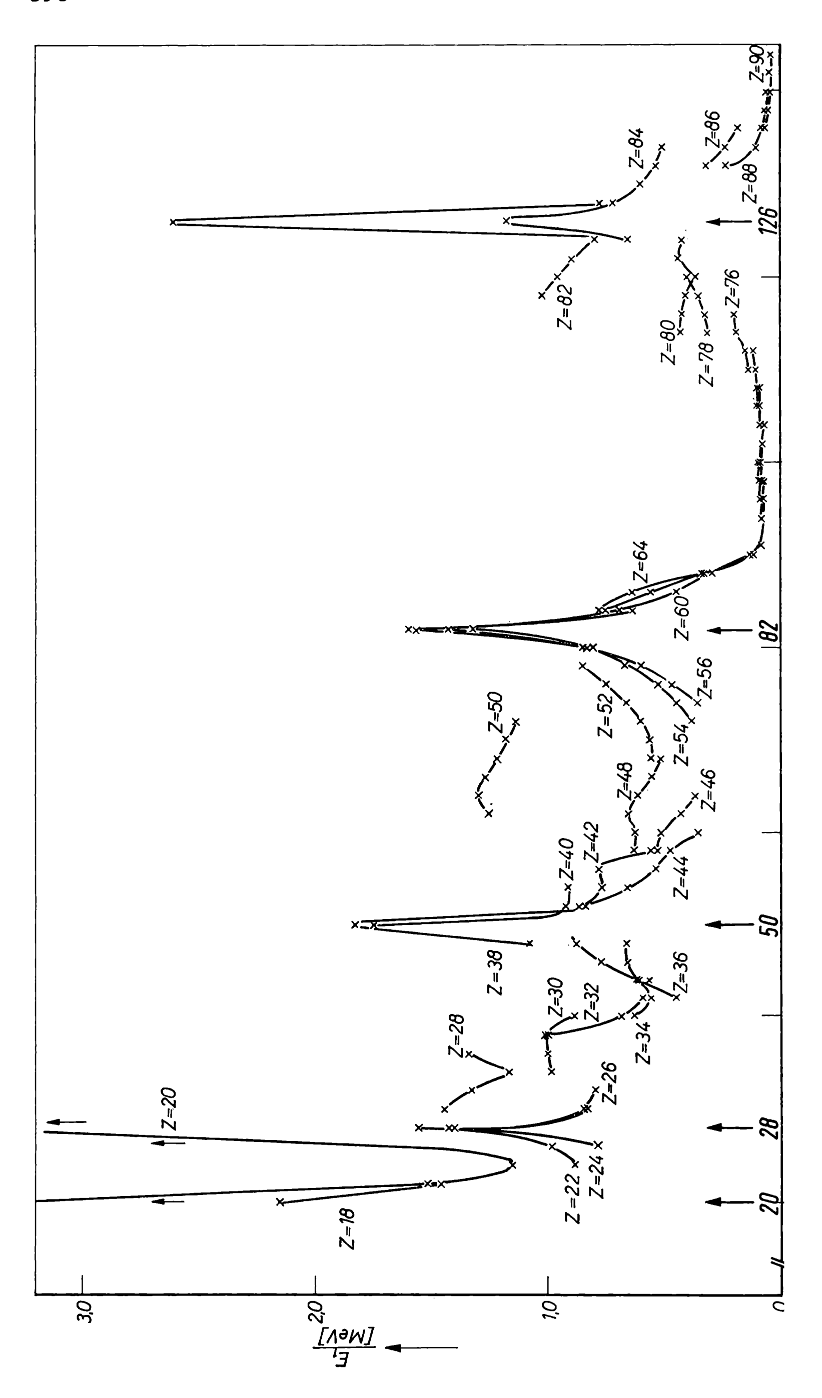
Der Vergleich zwischen dem Experiment (s. Fig. 51.1 und 51.2) und der Theorie ergibt, daß zwar für viele *g-g*-Kerne, insbesondere für solche in der Nachbarschaft der magischen Zahlen, Anregungsstufen mit dem Verhältnis $E_2:E_1\approx 2:1$ existieren, daß aber die Werte von E_1 von Kern zu Kern stark schwanken. Man muß daher die Modellparameter (konstante Dichte, scharfer Kernrand bei $r=R$, Oberflächenspannung) für jeden Kern neu anpassen. Dies weist daraufhin, daß offenbar die Form des HAMILTON-Operators richtig gewählt wurde, die Deutung der Parameter aus dem hydrodynamischen Verhalten eines Flüssigkeitstropfens aber zu quantitativen Unstimmigkeiten führt.

Weit weg von den magischen Zahlen stimmt das Modell überhaupt nicht mehr, da die Kerne dann nicht mehr als kugelförmig betrachtet werden dürfen.

b) Rotationen eines deformierten Kerns

Daß die Kerne im allgemeinen nicht kugelförmig sind, haben wir bei der Betrachtung der elektrischen Kernquadrupolmomente (§30) gesehen. Die Abweichungen von der Kugelgestalt kommen z.B. im Bild des Einteilchen-Schalenmodells durch die Bahnbewegung des unpaarigen Nukleons und die hierdurch verursachte Polarisation des Rumpfes zustande. Aber auch Kerne mit gerader Nukleonenzahl, soweit sie nicht „magisch“ sind oder genau halbvolle Schalen haben, sind im allgemeinen verformt. Dies ist eine Folge der Wechselwirkung zwischen dem kugelsymmetrischen „Rumpf“ und den äußeren Teilchen. Berechnet* man die zugehörigen Quadrupolmomente aus dem hydrodynamischen Modell, so erhält man zu große Werte, während das Schalenmodell zu kleine ergibt (vgl. §30).

* Siehe A. BOHR und B.R. MOTTELSON, Dan. Math.-fys. Medd. **27**, No. 16 (1953).



E_1 [MeV]
3,0
2,0
1,0
0
11
20
28
50
82
126
Z=18
Z=20
Z=22
Z=24
Z=26
Z=28
Z=30
Z=32
Z=34
Z=36
Z=38
Z=40
Z=42
Z=44
Z=46
Z=48
Z=50
Z=52
Z=54
Z=56
Z=60
Z=64
Z=76
Z=78
Z=80
Z=82
Z=84
Z=86
Z=88
Z=90

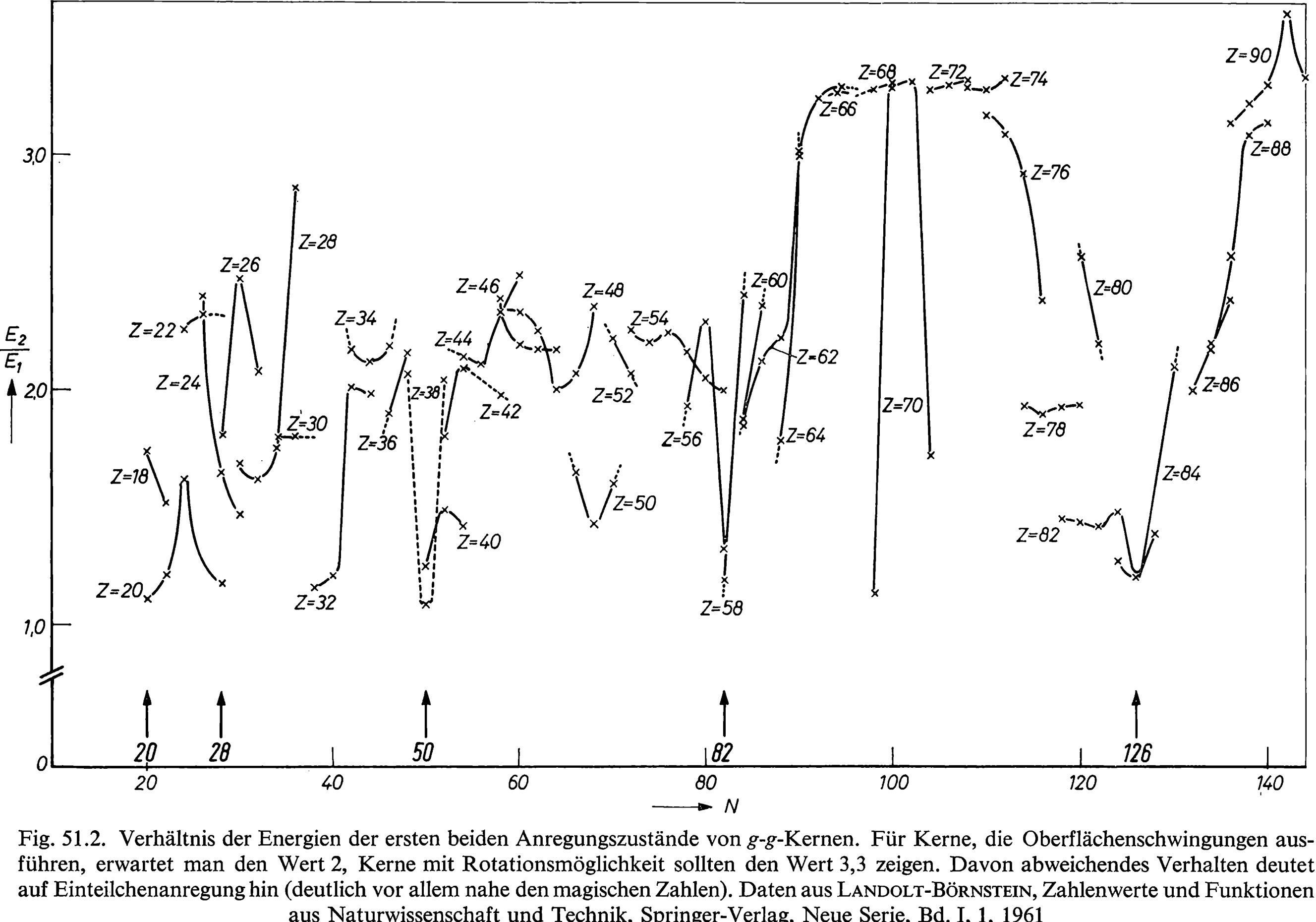


Fig. 51.2. Verhältnis der Energien der ersten beiden Anregungszustände von *g*-*g*-Kernen. Für Kerne, die Oberflächenschwingungen ausführen, erwartet man den Wert 2, Kerne mit Rotationsmöglichkeit sollten den Wert 3,3 zeigen. Davon abweichendes Verhalten deutet auf Einteilchenanregung hin (deutlich vor allem nahe den magischen Zahlen). Daten aus LANDOLT-BÖRNSTEIN, Zahlenwerte und Funktionen aus Naturwissenschaft und Technik, Springer-Verlag, Neue Serie, Bd. I, 1, 1961

Wir betrachten hier verformte g-g-Kerne. Während ein Kugeltröpfchen im Grundzustand der Oberflächenschwingungen stets den Drehimpuls $I=0$ hat, kann z.B. ein statisch ellipsoidförmig deformiertes Tröpfchen um seine freien Achsen rotieren; dabei bleibt seine Gestalt erhalten (formfeste Drehung). Eine stabile Rotation ist nur um eine zur Körperachse senkrechte Achse möglich (hier unbewiesen). Da das Tröpfchen kein starrer Körper ist, ist das Trägheitsmoment Θ vom Deformationsgrad abhängig. Für ein Rotationsellipsoid mit den Hauptachsen a und b gilt*

$$\Theta = \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right) \Theta_{\text{starr}} . \tag{51.9}$$

Da die Hauptachsen der Kerne fast gleichlang sind, sieht man aus (51.9), daß nur ein kleiner Teil der Kernmaterie an der Rotation teilnimmt. Es handelt sich also *nicht* um eine starre Drehung.

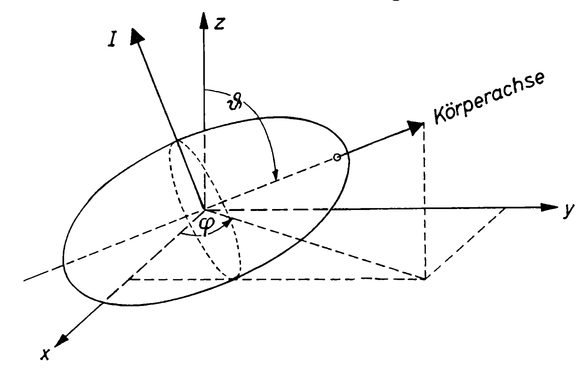


Fig. 51.3. Vektordiagramm eines deformierten Kerns im raumfesten Koordinatensystem

Die Energie einer Drehbewegung ist nach der elementaren Mechanik

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\,\Theta\,\omega^2 = \frac{1}{2}\,\frac{I^2}{\Theta},$$

wobei mit $\vec{I} = \Theta\,\vec{\omega}$ der Drehimpuls bezeichnet ist. Übersetzung in die Quantenmechanik liefert die Eigenfunktionen

$$\psi_{\text{rot}} = Y_{I,M\,(\vartheta,\varphi)}$$

und die Eigenwerte

$$E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2\Theta}\,I(I+1) . \tag{51.10}$$

Dabei ist ϑ der Winkel zwischen der körperfesten Achse (diese steht senkrecht auf der Richtung des Drehimpulsvektors) und der raumfesten z-Achse (s. Fig. 51.3).

* Begründung siehe z.B. G. Hertz, loc. cit., § 120.

Nun ist der Zustand des Tröpfchens invariant gegen den Richtungswechsel der Körperachse des Kernkreisels im Laborsystem, d.h. gegen die Transformation $\vartheta \to \pi - \vartheta$, $\varphi \to \varphi + \pi$. Also sollte gelten

$$\psi_{\text{rot}\,(\pi-\vartheta,\,\varphi+\pi)} = \psi_{\text{rot}\,(\vartheta,\,\varphi)}\,.$$

Mit (21.10) folgt aber

$$Y_{I,\,M\,(\pi-\vartheta,\,\varphi+\pi)} = (-1)^I\, Y_{I,\,M\,(\vartheta,\,\varphi)}\,.$$

Daher sind in (51.10) nur geradzahlige Werte von I möglich; die zugehörigen Eigenfunktionen haben gerade Parität.

Das Rotationsspektrum eines deformierten Kerns hat dann die Spinfolge 0^+, 2^+, 4^+, 6^+, ..., die zugehörigen Anregungsenergien verhalten sich wie $E_1 : E_2 : E_3 = 3 : 10 : 21$. Bei Kernen mit großer Verformung, d.h. nach (51.9) großem Trägheitsmoment, sollten die Rotationsstufen bei niedrigeren Energien liegen als bei wenig deformierten Kernen. Man erwartet daher weit weg von den magischen Zahlen als unterste angeregte Zustände derartige Rotationsniveaus. Dies wird tatsächlich beobachtet (s. Fig. 51.1 und 51.2); besonders im Gebiet der seltenen Erden gibt es viele Beispiele reiner Rotationsspektren. Wieder muß man allerdings empirische Werte für das Trägheitsmoment benutzen.

Es ist in einigen Fällen gelungen, die magnetischen Momente bzw. g_I-Faktoren von Rotationszuständen zu messen. Aufgrund der Kopplung von Massen- und Ladungsbewegung sollte ein klassisch mit dem mechanischen Drehimpuls

$$\vec{I} = \Theta\,\vec{\omega} = \vec{\omega} \int r^2 \rho\, M\, dV$$

($\vec{\omega}$ = Winkelgeschwindigkeit, ρ = Nukleonendichte, M = Nukleonenmasse) rotierendes Tröpfchen ein magnetisches Moment besitzen, das nach einer ganz primitiven Vorstellung auf der Überlagerung der magnetischen Momente der einzelnen Kreisströme beruht, die durch die Rotation der geladenen Massenelemente hervorgerufen werden. Nach §28 wäre anzusetzen

$$d\,i = \frac{e\,\omega}{2\pi}\,\rho_p\, dV,$$

wobei die Protonendichte $\rho_p = \frac{Z}{A}\rho$ ist. Damit folgt

$$\vec{\mu} = \mu_0 \frac{e}{2\pi}\,\vec{\omega} \int \frac{Z}{A}\,\rho\,\pi\, r^2\, dV;$$

nach (28.9) ergibt sich dann für den g_I-Faktor der angeregten Rotationszustände von g-g-Kernen die Vorhersage

$$g_I = -\frac{Z}{A}\,. \tag{51.11}$$

Die experimentellen Werte stimmen in vielen Fällen gut mit dieser Erwartung überein.

Die Rotationszustände sind durch COULOMB-Anregung (s. §46) leicht anzuregen; der Kern wird sozusagen durch das vorbeifliegende geladene Teilchen „angekurbelt". Ein großer Teil der experimentellen Daten stammt aus solchen Untersuchungen.

Solange die Energiestufen der Rotationsbewegung klein sind verglichen mit den Anregungsstufen der Oberflächenschwingungen des Kerns, kann man beide unabhängig voneinander betrachten. Auf jeden Schwingungszustand des Kerns baut sich dann eine Rotationsbande (mit jeweils verschiedenem Θ) auf. Die Behandlung des Rotations-Schwingungs-Spektrums eines Kerns ist kompliziert und verlangt ähnliche Verfahren wie die Berechnung der Molekülspektren *.

Die Tatsache, daß Kerne überhaupt Abweichungen von der Kugelsymmetrie zeigen, wird verständlich, wenn man (im Bild des Schalenmodells) die Kopplungen der Nukleonen der äußersten, nicht vollen Schale an den als kugelsymmetrisch angesehenen Rumpf betrachtet. Der Rumpf, der in dieser Vorstellung doppelt magisch ist, wird durch die „äußeren" Teilchen polarisiert und es ist möglich **, daß eine nicht kugelsymmetrische Anordnung der Nukleonen im ganzen Kern ein Energieminimum besitzt.

Für Kerne mit ungeradzahliger Nukleonenzahl kommt zur Rumpfbewegung die Bewegung des unpaarigen Nukleons hinzu. Da diese nunmehr in einem nicht kugelsymmetrischen Potential erfolgt, das sich seinerseits mit der Zeit ändert, sind beide Bewegungen in komplizierter Weise gekoppelt. Für schwache Kopplung ist die Rumpfdeformation gering, so daß man in nullter Näherung Kugelrumpf und Teilchen als unabhängig voneinander betrachten kann; für stärkere Kopplung darf man dies nur, wenn man einen statisch verformten Rumpf zugrunde legt. Diese Vereinfachungen werden nur gestattet sein, solange die Abstände der Rotations- bzw. Schwingungsniveaus klein sind gegen die der Einteilchenzustände. Dann umläuft das Teilchen den Rumpf so schnell, daß sich seine Bewegung „adiabatisch" der momentanen Form des Rumpfes anpaßt. Die Rechnung *** ist ziemlich umfangreich und zeigt, daß sich die untersten Anregungsstufen der Kerne mit ungerader Nukleonenzahl einigermaßen gut mit diesem Modell beschreiben lassen. Das Modell kann auch auf mehrere äußere Teilchen ausgedehnt werden („Unified model"), aber der nötige mathematische Aufwand nimmt schnell zu.

Die aus dem hier nur ganz grob beschriebenen Kollektivmodell folgenden Kernwellenfunktionen (man benötigt sie nicht im bewegten Hauptachsen-

* Siehe A. BOHR und B.R. MOTTELSON, loc. cit.

** Siehe B.R. MOTTELSON und S.G. NILSSON, K. Dan. Vid. Selsk. mat.-fys. Skr., **1**, No. 8 (1959).

*** S.G. NILSSON, Dan. Mat.-Fys. Medd. **29**, 16 (1955); Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk. **1**, No. 8 (1959). Dort eingehende Diskussion. Siehe auch M.A. PRESTON, Physics of the Nucleus, Addison-Wesley, 1962, Chap. 10.

system des Kerns sondern im ortsfesten Laborsystem!) kann man dazu benutzen, die γ-Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den Kernzuständen nach (49.22) zu berechnen. Es stellt sich heraus, daß die sowohl bei den Oberflächenschwingungen als auch im Rotationsgebiet auftretenden $E(2)$-Übergänge zwischen dem ersten Anregungs- und dem Grundzustand von g-g-Kernen eine bis zu einem Faktor 100 kürzere Lebensdauer haben als Einteilchenübergänge desselben Multipolcharakters. Die experimentellen Halbwertszeiten sind oft um etwa den gleichen Faktor kürzer als die mit der Einteilchenhypothese berechneten; dies ist ein weiterer Hinweis auf die Brauchbarkeit des Kollektivmodells.

§ 52. Zusammenfassung und Gegenüberstellung der Kernmodelle

Eine Theorie, die die Eigenschaften von Atomkernen aus wenigen Grundannahmen ohne Anleihe beim Experiment vorhersagt, gibt es noch nicht. Die Versuche, solche Grundannahmen aus feldtheoretischen Überlegungen aufzustellen, sind bisher nicht sehr erfolgreich. Daher kennt man die exakte Wechselwirkung nicht und ist zur Gewinnung von Näherungen auf halbphänomenologische Modellvorstellungen angewiesen.

Bei der Konstruktion eines jeden Kernmodelles muß man berücksichtigen, daß jedes Nukleon den Spin $\frac{1}{2}$ hat und der Kern sich daher wie ein FERMI-Gas verhält, das aber nur aus endlich vielen Teilchen besteht. Die exakte Beschreibung eines Systems von endlich vielen FERMI-Teilchen, die darüber hinaus eine nicht verschwindende Zweiteilchenwechselwirkung aufgrund der Kernkräfte haben (vgl. Kapitel XII) und bei denen möglicherweise auch Mehrkörperwechselwirkungen auftreten, ist jedoch bisher nicht gelungen. Wesentliche Eigenschaften eines FERMI-Gases wurden in §13 und §24 angegeben*. Als Grenzfälle haben wir das Einteilchenmodell und das Kollektivmodell diskutiert; diese sind in Tabelle 52.1 noch einmal schematisch einander gegenübergestellt. Als Versuch einer Synthese der beiden entgegengesetzten Vorstellungen kann das „Unified Model" angesehen werden, dessen Grundgedanken hier nur angedeutet wurden und das sich bei der Erklärung des Zustandekommens der niedrigen Anregungszustände der Kerne gut bewährt hat.

Da man von einem quantenmechanischen System weiß, daß es der HEISENBERGschen Unschärferelation unterliegt (s. §23), kann man nicht erwarten, daß es sich exakt durch ein *vorstellbares* Modell erfassen läßt. Das menschliche Vorstellungsvermögen kann nur mit makroskopischen Modellen umgehen, die der täglichen Erfahrung entliehen sind, z.B. Teil-

* Eine ausführliche Darstellung findet sich z.B. bei L.D. LANDAU und E.M. LIFSCHITZ, Statistical Physics, Pergamon Press, London-Paris 1958, Chap. V.

chen oder Wellen. Aber ein Teilchen, dessen „Bahn" ein unerlaubter Begriff ist, oder eine Welle, die sich plötzlich zu einem Quant „zusammenzieht", sind der Vorstellung unzugänglich; erst recht ein Objekt, das sowohl

Tabelle 52.1. *Schema der Kernmodelle*

Energiebereich	Ein Teilchen ist für das Verhalten des Kerns verantwortlich	Alle Teilchen zusammen bestimmen die Kerneigenschaften
Dynamik: Kernreaktionen (bis ca. 100 MeV)	*Optisches Modell* Das einfallende Teilchen bewegt sich im (komplexen) Potential der Nukleonen des Targetkerns. Erklärt die Abhängigkeit des gemittelten Wirkungsquerschnitts aus der endlichen freien Weglänge des Nukleons im Kern. Eine Möglichkeit direkter Prozesse bleibt offen.	*Compoundkernmodell* Das einfallende Teilchen heizt den ganzen Kern auf. Erklärt die Form der Wirkungsquerschnitte bei kleinen und mittleren Energien (z.B. Resonanzen). Das Spektrum der Sekundärteilchen wird durch die Kernverdampfung gedeutet.
Statik: Anregungszustände bis zu ca. 1 MeV	*Einteilchenzustände* Die Zustände des Nukleons im Potentialtopf haben vorhersagbare Quantenzahlen für Spin und Parität in Übereinstimmung mit den experimentellen Werten. Inseln des Isomerismus verständlich. ↘	*Kollektivzustände* Ein Kugeltröpfchen kann Oberflächenschwingungen ausführen, ein deformierter Kern zusätzlich formfeste Rotationen. Die Riesenresonanz beim Kernphotoeffekt wird als Dipolschwingung gedeutet. ↙
	„Unified Model" Der Rumpf wird als Tröpfchen behandelt, die äußeren Nukleonen werden nach dem Schalenmodell angekoppelt	
Kerngrundzustände	↗ *Schalenmodell* Die Spins, Paritäten und magnetischen Momente werden systematisch geordnet. Modellwellenfunktionen deuten die „Kerngröße". Die magischen Zahlen werden richtig vorhergesagt.	↖ *Tröpfchenmodell* Die Kernbindungsenergien werden modellmäßig gedeutet. Isotopenkarte und Kernspaltung werden qualitativ interpretiert.
	↖ Fermi-Gas-Modell ↗	

Teilchen- als auch Welleneigenschaften hat. Ein der Quantenmechanik gehorchender Atomkern darf also prinzipiell nicht als klassisch-mechanisches Gebilde aufgefaßt werden. Somit weiß man von vornherein, daß alle Schritte in dieser Richtung (z.B. die Vorstellung eines Tröpfchens oder einer Schalenstruktur im Sinne einer Zwiebel) dem wahren Sachverhalt nicht gerecht werden können. So umgeht man z.B. beim Schalenmodell das

Problem der Vielkörperwechselwirkung, indem man alle Nukleonen außer dem betrachteten durch ein pauschales Potential ersetzt; die Lösung des Einteilchenproblems ist dann dem SCHRÖDINGER-Formalismus zugänglich.

Wie abstrakt und vorstellungsfern das Gebäude der Kernphysik ist, geht schon daraus hervor, daß es nur eine kleine Zahl von meßbaren und damit physikalisch sinnvollen Eigenschaften gibt, die einen Kernzustand vollständig charakterisieren. Diese sollen im folgenden aufgezählt und damit der Inhalt des Buches zusammengefaßt werden:

1. Kerngrundzustände

a) Ladung. Experimentelle Bestimmungsmethoden s. §4 und §5. Ladungsträger im Kern sind nur die Protonen (s. §27). Die Protonenzahl Z, für die ein Erhaltungssatz gilt (s. §39), bestimmt den chemischen Charakter des Atoms.

b) Masse, Bindungsenergie. Experimentell wird die Masse mit dem Massenspektrometer oder aus Kernreaktionen (s. §9) bestimmt. Der Zusammenhang mit der Bindungsenergie wird in §6 und §7 aufgezeigt. Aus der Vorstellung des Tröpfchenmodells (Kugeltröpfchen, dessen Materie ein FERMI-Gas ist) ergibt sich die summarische WEIZSÄCKER-Formel (s. §13) zur Berechnung der Bindungsenergien der Kerngrundzustände, die allerdings der Verfeinerung bedarf: Es fehlt eine Berücksichtigung der Schalenstruktur und eine Erklärung für die Existenz der magischen Zahlen (s. §16). Diese Effekte werden durch das Schalenmodell (§32 und §33) quantitativ verständlich. Die Baryonenzahl A ist eine Erhaltungsgröße (s. §39). Der Kern besteht nur aus Protonen und Neutronen (s. §6 und §27).

c) Spin. Jedes Nukleon hat den Spin $\frac{1}{2}$, daher ist der Kern ein System aus FERMI-Teilchen (s. §24). Der Kernspin setzt sich aus den Spin- und Bahndrehimpulsen der Nukleonen zusammen (s. §27). Experimentelle Bestimmungsmethoden werden in §29 diskutiert. Alle *g-g*-Kerne haben im Grundzustand den Kernspin 0; dies ist aus dem Tröpfchenmodell verständlich (s. §51) und folgt auch aus dem Schalenmodell, wenn man eine starke *j-j*-Kopplung (s. §26) der Nukleonen im Kern annimmt. Alle *u-g*- und *g-u*-Kerne haben halbzahligen Spin; eine Systematisierung gelingt mit Hilfe des Einteilchen-Schalenmodells (s. §32 und §33). *u-u*-Kerne haben ganzzahligen Spin; solche Kerne sind – bis auf die leichtesten – instabil gegen β-Zerfall (Grund s. §13).

d) Parität. Die Nukleonen haben positive Parität, ebenso alle Grundzustände von *g-g*-Kernen (s. §51). Für die Grundzustände von *g-u*- und *u-g*-Kernen gelingt wieder eine Systematisierung mit dem Einteilchen-Schalenmodell (s. §32 und §33). Experimentell wird die Parität der Kerngrundzustände auf dem Umweg über das magnetische Moment bestimmt

(s. §28 und §29); der theoretische Zusammenhang zwischen magnetischem Moment und Bahndrehimpuls wird in §28 hergeleitet, zwischen Bahndrehimpuls und Parität in §24. Für die Parität gilt ein Erhaltungssatz (s. §24 und §39).

e) Magnetisches Kerndipolmoment. Die Definition und eine Berechnung des magnetischen Kerndipolmoments der Grundzustände von *g-u-* und *u-g-*Kernen nach dem Einteilchenmodell findet sich in §28, vom Grundzustand des Deuterons in §38. Experimentelle Bestimmungsmöglichkeiten aus der Hyperfeinstruktur der Spektrallinien werden in §29 behandelt. Eine Verringerung der Diskrepanz zwischen Meßwerten und theoretischen Voraussagen gelingt durch verfeinerte Kernmodelle, etwa mit dem „Unified Model" (hier nicht dargestellt).

f) Elektrisches Kernquadrupolmoment. Definition und experimentelle Bestimmungsmethoden s. §30. Eine Berechnung nach dem Schalenmodell ergibt zu kleine Werte (s. §30), nach dem hydrodynamischen Modell zu große (s. §51). Das „Unified Model" liefert Quadrupolmomente, die mit dem Experiment besser übereinstimmen. Das elektrische Quadrupolmoment des Deuterons wird in §38 diskutiert.

g) Kernpotential, räumliche Ausdehnung des Kerns. Beide Größen sind miteinander verknüpft. Es hat sich ergeben, daß die Reichweite der Kernkräfte mit der Ausdehnung der Ladungsverteilung des Kerns etwa übereinstimmt. Ansätze für das Kernpotential werden in §37 und §43, für die Ladungsverteilung in §34 angegeben. Die mit den Meßdaten verträglichen Ansätze können noch nicht aus einer konsequenten Feldtheorie hergeleitet werden, es ergibt sich aber relativ gute Übereinstimmung zwischen den aus verschiedenen Experimenten gewonnenen Modellparametern. Das Zweinukleonenproblem findet besondere Beachtung in §§35 bis 38 und §47.

h) Gegebenenfalls α- und β-Zerfallswahrscheinlichkeit. Die Grundzustände der meisten Kerne sind β-aktiv (aus dem Tröpfchenmodell verständlich, s. §13 und §14), die der sehr schweren Kerne α-aktiv. Energiebetrachtungen der Zerfälle s. §11. Elementare Ansätze zum theoretischen Verständnis der Lebensdauern von α- und β-Zerfall werden in §48 und §50 angegeben.

i) Isospin. Definition s. § 37, Erhaltungssatz s. § 39. Auf eine Diskussion dieses Begriffes wird in diesem Buch weitgehend verzichtet.

2. Angeregte Kernzustände

a) Anregungsenergie, Spin und Parität. Es gibt viele Möglichkeiten zur experimentellen Bestimmung dieser Größen, hauptsächlich aus β- und γ-Zerfallsdaten (s. §49 und §50) und aus Kernreaktionen (s. §§40,

41, 42, 44 und 46). Je nach der Modellvorstellung sagt die Theorie „Einteilchen"- und „kollektive" Anregungszustände voraus (s. §32, §33 bzw. §51). Das Zustandekommen und die Parameter der angeregten Kernniveaus sind bisher nicht ohne Bezug zum Experiment ableitbar, insbesondere kann man keine gültigen Voraussagen für Anregungsstufen oberhalb einiger MeV machen. Der beste Versuch zur Deutung der niedrig liegenden Niveaus ist das „Unified Model".

b) Kernmomente, Form von Potential und Ladungsverteilung. Über die elektromagnetischen Momente der angeregten Zustände ist noch nicht allzuviel bekannt, jedoch gibt es in der neuesten Zeit einige Bestimmungsmethoden (s. z.B. §49 für das magnetische Dipolmoment). Ebenso ist noch nicht klar, wie Potentialform und Ladungsdichte vom Anregungszustand abhängen.

c) Zerfall. Außer α- und β-Zerfall kommt für niedrige Anregungsstufen Zerfall durch γ-Emission (s. §49), für höher angeregte Zustände darüber hinaus Zerfall durch Emission weiterer Teilchen wie Protonen, Neutronen, Deuteronen usw. (s. §42, §44 und §45) in Frage. Die jeweiligen Lebensdauern lassen sich auch durch die Linienbreiten der Zustände ausdrücken. Zusammenhang beider Größen s. §41. Die Zerfallsmechanismen bei Anregungsenergien bis zu etwa 20 MeV sind gut verstanden (s. §44 und §45), bei den mit höheren Anregungsenergien auftretenden „direkten" Reaktionen sind noch manche Probleme offen.

d) Niveaudichte und Stärkefunktion. Die Anzahl der angeregten Niveaus pro Intervall der Anregungsenergie wächst stark mit der Anregungsenergie (s. §45); das Verhältnis von Linienbreite und Niveauabstand (die „Stärkefunktion") variiert in charakteristischer Weise mit der Nukleonenzahl (s. §43). Die quantitativen Voraussagen der Größe dieser Kerneigenschaften aus Kernmodellen sind schwierig und können bisher nicht gut nachgeprüft werden.

Zwar besteht selten wirklich quantitative Übereinstimmung zwischen den experimentellen Befunden und den Ergebnissen der Modellrechnungen, aber die Theorie liefert brauchbare Ordnungsprinzipien für das enorme Datenmaterial der Kernphysik.

Übungen zu Teil C

Zu Kapitel X:

1. Bestimme für den Grundzustand des Na^{23} ($I=\frac{3}{2}$) die Hyperfeinstrukturaufspaltung im schwachen und starken Magnetfeld bei gegebener Aufspaltungskonstanten A (die Quadrupolwechselwirkung entfällt wegen $J=\frac{1}{2}$). Trage die Termenergien gegen das Magnetfeld auf und bezeichne die Terme durch die Quantenzahlen m_F bzw. m_I und m_J.

2. Die Ablenkung eines Atomstrahls im STERN-GERLACH-Versuch wird hervorgerufen durch die Kraft, die senkrecht zur Bewegungsrichtung des Strahls auf diesen wirkt. Ihre Größe ist

$$K_z = \mu_z \frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{\partial W}{\partial z}.$$

a) Zeichne für einen Na-Atomstrahl (für Na^{23} ist $I = \frac{3}{2}$) μ_z als Funktion von H.

b) Hinter dem STERN-GERLACH-Feld stehe am Ort des unabgelenkten Strahls ein kleiner Auffänger. Die Atome im Strahl seien in einem Zustand mit $J = \frac{1}{2}$, ihr Kernspin sei unbekannt. Nimmt man den Ausschlag des Auffängers in Abhängigkeit von der magnetischen Feldstärke auf, so kann man aus der resultierenden Kurve den Kernspin I bestimmen. Wie?

3. Y^{89} hat als Elektronengrundzustand das Dublett ${}^2D_{\frac{3}{2},\frac{5}{2}}$ (Konfiguration $4d$, $5s^2$), der Kernspin ist $I = \frac{1}{2}$. Die Hfs-Aufspaltungsfaktoren („A-Faktoren") sind

$$A = -2{,}36 \cdot 10^{-7}\,\text{eV für den } {}^2D_{\frac{3}{2}}\text{-Zustand},$$

$$A = -1{,}19 \cdot 10^{-7}\,\text{eV für den } {}^2D_{\frac{5}{2}}\text{-Zustand}.$$

Die Kernquadrupolwechselwirkung entfällt wegen $I < 1$.

a) Bestimme die Hfs-Aufspaltung für beide Zustände ohne Magnetfeld, im schwachen äußeren Magnetfeld und im starken äußeren Magnetfeld. Zeichne den qualitativen Verlauf der Termlagen gegen das Magnetfeld auf und bezeichne die Terme durch m_F bzw. m_I und m_J.

b) In einer RABI-Apparatur seien die Inhomogenitäten der beiden ablenkenden Felder (A- und B-Feld) vor und hinter dem homogenen Magnetfeld (C-Feld) parallel gerichtet, so daß nur solche Atome in den Detektor gelangen können, deren m_J das Vorzeichen zwischen A- und B-Feld gewechselt hat („flop-in-Methode"). Die zur Induzierung von Termübergängen erforderliche Hochfrequenzmagnetfeldstärke stehe senkrecht zur C-Feldstärke. Dadurch werden nur Übergänge zwischen solchen Termen erzeugt, deren magnetische Quantenzahl um eine Einheit verschieden ist ($\Delta m = 1$). Zeichne die in dieser Anordnung möglichen Übergänge in die Diagramme ein.

Es gibt $\Delta F = 0$- und $\Delta F = 1$-Übergänge. Wieviele mögliche Übergänge gibt es im ganzen?

4. Beweise die Formel (30.9).

5. Ein Kern mit dem Spin I und dem Quadrupolmoment Q_0 befindet sich in einem äußeren Feldgradienten $\partial^2\varphi/\partial z^2$, der z.B. vom Kristallfeld in der Substanz herrühren kann. Wieviele Einstellmöglichkeiten hat der Kern und wie groß sind die Zusatzenergien auf Grund der Quadrupolwechselwirkung?

Zu Kapitel XI:

1. Bestimme aus dem Einteilchen-Schalenmodell den Kernspin, die Parität und das magnetische Moment der Grundzustände der Kerne Mg^{25} und Cu^{63}. Die experimentellen Werte sind:

$$Mg^{25}\colon \quad I = \tfrac{5}{2}; \quad \mu = -0{,}96\,\mu_K,$$

$$Cu^{63}\colon \quad I = \tfrac{3}{2}; \quad \mu = +2{,}22\,\mu_K.$$

Erkläre qualitativ etwaige Differenzen zwischen Theorie und Experiment.

2. Finde die energetische Lage der $s_{\frac{1}{2}}$-Zustände in einem Kastenpotential der Tiefe $V_0 = 45$ MeV als Funktion von $R = R_0 A^{\frac{1}{3}}$. Diskutiere das Ergebnis.

3. Beweise die Richtigkeit der Wellenfunktion (32.5) und berechne damit das Quadrupolmoment eines Kerns mit einem (drei) $p_{\frac{3}{2}}$-Nukleon(en); die $s_{\frac{1}{2}}$-Schale sei voll besetzt.

4. Berechne den Formfaktor F in der MOTTschen Streuformel für He^4 unter Zugrundelegung der Schalenmodell-Wellenfunktionen. In welchen Koordinaten muß man rechnen?

5. a) Wie groß ist der mittlere quadratische Radius der „Family-II-Verteilung" (34.19)? Wie groß ist die Hautdicke t, in der die Ladungsdichte von 90% auf 10% ihres Wertes bei $r = 0$ abfällt, ausgedrückt durch n und C?

b) Für Pb^{208} ist $n = 10$ und $C = 6{,}7 \cdot 10^{-13}$ cm. Zeichne $\rho_{(r)}$ unter Benutzung von (34.19). Wie groß ist $\sqrt{\overline{r_L^2}}$ und t für das Beispiel?

c) Wie groß muß man den Radius $R_{\text{Äq}}$ einer homogen geladenen Kugel wählen, damit diese denselben mittleren quadratischen Radius der Ladungsverteilung besitzt wie die „Family-II-Verteilung"?

d) Berechne den Radius einer homogen geladenen Kugel mit der gleichen Gesamtladung wie ein Kern nach der „Family-II-Verteilung" unter der Annahme, daß die Ladungsdichte der beiden Modelle für $r = 0$ dieselbe ist.

6. Die Bewegung eines Müons im Feld eines unabgeschirmten, Z-fach geladenen Kerns der Nukleonenzahl A ist zu untersuchen (Spin-Wechselwirkungen werden vernachlässigt).

a) Unter der Annahme, daß der Kern punktförmig ist, berechne den mittleren Radius $\bar{r}$ der Müonenbahn und die Bindungsenergie des Müons, wenn es sich im $1s$-Zustand befindet. Vergleiche $\bar{r}$ mit dem Kernradius $R = R_0 A^{\frac{1}{3}}$.

b) Wenn angenommen wird, daß der Kern eine homogen geladene Kugel vom Radius R ist, bestimme das Potential $V_{(r)}$ in der SCHRÖDINGER-Gleichung.

c) Durch das endliche Kernvolumen verschieben sich die Energieeigenwerte, die in a) berechnet wurden. Für kleine Werte der Kernladungszahl Z kann man die Abweichung vom COULOMB-Potential als Störung betrachten. Bis etwa zu welchen Kernladungszahlen Z ist das gestattet? Berechne für kleines Z die Energieverschiebung für den $1s$-Zustand des Müons (Störungsrechnung, 1. Näherung) als Funktion von Z und R.

Zu Kapitel XII:

1. Aus Streuexperimenten mit hochenergetischen Elektronen wurde der mittlere quadratische Radius für die Ladungsverteilung des Deuterons zu $\sqrt{\overline{r_L^2}} = 2{,}11 \cdot 10^{-13}$ cm bestimmt. Da das Proton ausgedehnt ist, ist der mittlere quadratische Abstand des Protons vom Schwerpunkt des Deuterons gegeben durch

$$\overline{r^2} = \overline{r_L^2} - \overline{r_p^2}.$$

Benutze den Meßwert, um mit (35.1) die Konstanten V_0 und b getrennt zu bestimmen.

Hilfe: Zur Vereinfachung der Rechnung kann die Wellenfunktion für $r \leq b$ ersetzt werden durch $u \sim \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{r}{b}\right)$. Würde die Rechnung mit der richtigen Eigenfunktion ein größeres oder kleineres b liefern? — Beachte den Unterschied zwischen Schwerpunkts- und Relativsystem.

Berechne mit der angenäherten Wellenfunktion die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Nukleonen sich innerhalb der Reichweite des Potentials aufhalten.

2. Untersuche die Wirkung eines abstoßenden Kastenpotentials der Höhe V_0 und der Reichweite d auf die Streuung eines Teilchens und zeige, daß die Wellenfunktion des

anfliegenden Teilchens vom Potential „abgestoßen“ wird. Zeichne dazu ein der Fig. 36.2 ähnliches Diagramm.

3. a) Zeige, daß sich $(\vec{s}^{(1)} \cdot \vec{s}^{(2)})^n$ für $n=2, 3, 4, \ldots$ auf die erste Potenz oder eine Konstante zurückführen läßt.

b) Beweise die Relationen

$$[\vec{s}^{(1)} \times \vec{s}^{(2)}] = \frac{2i}{\hbar} (\vec{s}^{(1)} \cdot \vec{s}^{(2)}) \vec{s}^{(1)} - \frac{i\hbar}{2} \vec{s}^{(2)}$$

$$([\vec{s}^{(1)} \times \vec{r}] \cdot [\vec{s}^{(2)} \times \vec{r}]) = r^2 (\vec{s}^{(1)} \cdot \vec{s}^{(2)}) - (\vec{s}^{(1)} \vec{r})(\vec{s}^{(2)} \vec{r})$$

und begründe, daß (37.2) die allgemeinste Form eines Zweiteilchenpotentials ist, das vom Abstand und den Spins der beiden Teilchen abhängt und symmetrisch gegen die Vertauschung der Teilchen ist.

4. Berechne den Zahlenwert des Quadrupolmoments des Deuterons unter Benutzung eines Kastenpotentials mit den in § 35 angegebenen Parametern und den a- und b-Koeffizienten aus § 38a. Vergleiche mit dem experimentellen Wert $Q_d = 2{,}738$ mb.

Zu Kapitel XIII:

1. Xe^{135} ist ein mit etwa 6% Ausbeute im Uranreaktor entstehendes Spaltprodukt mit 9,2 h Halbwertszeit, ist also in beträchtlichen Mengen im Reaktor vorhanden. Sein Spin im Grundzustand ist $\frac{3}{2}$. Es hat eine ausgeprägte Resonanz für Neutroneneinfang bei 0,084 eV (fast thermische Energien), wirkt also als Reaktorgift, indem es Neutronen wegfängt. Die Linienbreiten sind gemessen zu

$$\Gamma_\gamma = 0{,}090 \text{ eV}; \qquad \Gamma_n = 0{,}0257 \text{ eV}.$$

a) Wie groß ist der Einfangsquerschnitt $\sigma_{(n,\gamma)}$ an der Resonanzstelle?

b) Wie groß ist der totale Wirkungsquerschnitt σ_{tot} an der Resonanzstelle?

c) Wie groß ist der Einfangsquerschnitt $\sigma_{(n,\gamma)}$ für thermische Neutronen?

d) Wie groß ist der maximal mögliche Einfangsquerschnitt $\sigma_{(n,\gamma)}$ an der Resonanzstelle für eine Reaktion, die bei $E_R = 0{,}084$ eV eine Resonanz hat? Vergleiche mit dem geometrischen Kernquerschnitt.

2. Berechne die Wahrscheinlichkeit, daß ein Neutron der Anfangsenergie $E_0 = 40$ keV in Wasserstoffgas H_2 absorbiert wird, bevor es langsamer als 1 eV geworden ist.

Gegeben: Für thermische Energie ($v = 2200$ m/sec) ist

$$\sigma_{\text{str}} = 20{,}4 \text{ b}; \qquad \sigma_{\text{abs}} = 0{,}332 \text{ b}.$$

3. Zu lesen: R. O. Bondelid, J. W. Butler, C. A. Kennedy, and A. D. Callar, Absolute Measurement of the $T^3(p,n)\,He^3$ Reaction Threshold Energy and the Neutron-Hydrogen-Mass Difference, Phys. Rev. **120**, 887 (1960).

a) Wie kann man aus dem Q-Wert der $T^3(p,n)\,He^3$-Reaktion und der Endenergie des Tritium-β-Spektrums die Massendifferenz zwischen Neutron und Proton bestimmen? Ist die Massendifferenz zwischen Neutron und Proton oder die zwischen Neutron und Wasserstoffatom gemeint? Wie unterscheiden sich diese?

b) Zeichne ein Schema der apparativen Anordnung.

c) Begründe sauber, warum die Zahl der nachgewiesenen Neutronen mit $(\Delta E)^2$ wächst.

d) Wieso fallen nahe der Schwellenenergie (threshold) die Neutronen in einen begrenzten Winkelbereich? Was ist der Grenzwinkel für $\Delta E = 1{,}5$ keV?

4. Zu lesen: A. Sperduto and W. W. Buechner, (p, p') and (p, α) Reactions from K^{39}, Phys. Rev. **109**, 462 (1958). Beantworte dazu folgende Fragen:

a) Warum liegt die Linie K^{39} (0) in Fig. 1 nicht bei 7,45 MeV sondern bei 6,85 MeV Protonenenergie?

b) Leite eine Gleichung für die schräge Linie in den Figuren her (Excitation Energy in K^{39} als Funktion von Proton Energy).

c) Erkläre den letzten Absatz des Artikels. Wie kann man die Q-Werte der (p, α)-Reaktion bestimmen? Bei welchem Krümmungsradius des Analysators müßten die α-Teilchen in Fig. 1 erscheinen?

5. Zu lesen: R. D. EDGE, Cross Section for the Reaction $C^{13}(\gamma, n)$ at 6.4 MeV, Phys. Rev. **119**, 1643 (1960). Beantworte die folgenden Fragen:

a) Welcher Kern hat bei $E_p = 874$ keV ein Niveau? Was ist die entsprechende Anregungsenergie?

b) Was ist die maximale Anregungsenergie, die der in der Reaktion $F^{19}(p, \alpha)\, O^{16}$ entstehende O^{16}-Kern erhalten kann, wenn $E_p = 874$ keV ist?

c) Der niedrigste angeregte Zustand des O^{16} liegt bei 6,05 MeV (0^+-Zustand). Warum erhält man keine γ-Strahlung mit 6,05 MeV?

d) Wie groß sind die Q-Werte der Reaktionen $H^2(\gamma, n)\, H^1$ und $C^{13}(\gamma, n)\, C^{12}$?

e) Warum sind die BF_3-Zählrohre in Paraffin eingebettet?

6. Die Reaktion $N^{14}(\alpha, p)\, O^{17}$ hat Resonanzen bei α-Energien im Laborsystem von 2,87 MeV, 3,08 MeV, 3,72 MeV, 4,00 MeV. Der Spin des N^{14}-Kerns im Grundzustand ist $I = 1$, der des O^{17}-Kerns im Grundzustand $I = \frac{5}{2}$. Der Q-Wert der Reaktion $N^{14}(\alpha, p)$ ist $Q = -1{,}2$ MeV.

a) Bei welchen Protonenenergien im Laborsystem müssen Resonanzen in der Umkehrreaktion $O^{17}(p, \alpha)\, N^{14}$ auftreten, die den gleichen Anregungszuständen des Compoundkerns entsprechen?

b) Wie groß ist das Verhältnis des Wirkungsquerschnitts der Reaktion $N^{14}(\alpha, p)\, O^{17}$ zum Wirkungsquerschnitt der dem gleichen Compoundniveau entsprechenden Reaktion $O^{17}(p, \alpha)\, N^{14}$? Berechne den numerischen Wert dieses Verhältnisses für die vier angegebenen Resonanzen.

7. Zu lesen: W. L. IMHOF, R. G. JOHNSON, F. J. VAUGHN, and M. WALT, Cross Sections for the $B^{11}(n, \gamma)\, B^{12}$ Reaction, Phys. Rev. **125**, 1334 (1962).

a) Skizziere die experimentelle Anordnung für die Untersuchung der Reaktion $B^{11}(n, \gamma)\, B^{12}$.

b) Welche Protonenenergien aus dem VAN DE GRAAFF-Beschleuniger entsprechen den erhaltenen extremalen Neutronenenergien von 140, 1470, 1560 und 2325 keV unter $\theta = 0$?

c) Was bedeutet die Angabe der Dicke des Li-Targets von 40 keV?

d) Wieso erhält man den Wirkungsquerschnitt für thermische Neutronen aus der Differenz der Zählraten mit und ohne Cd-Umhüllung?

e) Warum werden die β-Teilchen des B^{12} durch *zwei* in Koinzidenz geschaltete Detektoren nachgewiesen?

f) Warum sind die gemessenen Linienbreiten (s. Fig. 1) breiter als $\Gamma_{tot} = \Gamma_n + \Gamma_\gamma$?

g) Die auf S. 1336 angegebenen Werte für Γ_γ kann man aus dem über die Resonanz integrierten Wirkungsquerschnitt $\int \sigma_{(E)}\, dE$ erhalten. Wie? Kontrolliere überschlagsmäßig den angegebenen Wert für $\Gamma_\gamma = 0{,}3$ eV der 1026 keV-Resonanz.

h) Zeichne ein Niveaudiagramm des B^{12}, das die Energien der gefundenen Niveaus sowie den Zustand $B^{11} + n$ enthält.

8. Ein hypothetischer Kern ${}_Z M_N^A$ zerfällt durch β^+-Emission mit einer Grenzenergie $(KE)_{\beta^+, \max} = 1$ MeV in den Grundzustand des Kerns ${}_{Z-1}M_{N+1}^A$. Der Wirkungsquerschnitt für den (p, n_0)-Prozeß (Grundzustandsübergang) am Kern ${}_{Z-1}M_{N+1}^A$ ist 0,1 b bei einer Protonenenergie von 1 MeV. Berechne den Wirkungsquerschnitt der (n, p_0)-

Reaktion am Kern ${}_ZM_N^A$ für thermische Neutronen unter der Annahme, daß der Wirkungsquerschnitt das $1/v$-Gesetz befolgt und keine Resonanzen existieren.

9. Zu lesen: R. G. ARNS, R. E. SUND, and M. L. WIEDENBECK, Nuclear Resonance Fluorescence in Mg^{24}, Phys. Rev. Letters **2**, 50 (1959).

a) Skizziere den benutzten experimentellen Aufbau und die elektronische Schaltung im Blockdiagramm.

b) Erkläre die dem Experiment zugrunde liegende Theorie (beachte, daß γ-Quanten relativistische Teilchen sind).

c) Ist eine Messung der γ-Resonanzfluoreszenz nach dem gleichen Prinzip nur am Mg^{24} möglich oder könnte sie auch an anderen Kernen durchgeführt werden? Welche Eigenschaft ist notwendig?

Zu Kapitel XIV:

1. Warum spaltet die RÖNTGEN-K_α-Linie, die z.B. beim K-Einfang emittiert wird, in genau zwei Komponenten K_{α_1} und K_{α_2} auf? Wie groß ist das Intensitätsverhältnis dieser Komponenten? Welchen Multipolcharakter hat die Strahlung?

2. Leite eine Formel für die Übergangswahrscheinlichkeit bei Emission magnetischer Multipolstrahlung ab.

3. Der Grundzustand des A^{41} zerfällt mit einer Halbwertszeit von 10 min, und zwar zu 99% durch β^--Emission in einen angeregten Zustand des K^{41} (der seinerseits durch γ-Emission in den Grundzustand übergeht) und zu 0,9% durch β^--Emission direkt in den Grundzustand. Gemessen wurde:

β_1: $(KE)_{\beta,\,\max}=1{,}196$ MeV; $\log_{10} fT=5{,}00$; Spektrum erlaubt;

β_2: $(KE)_{\beta,\,\max}=2{,}48$ MeV; $\log_{10} fT=8{,}50$; Spektrum charakteristisch für $\Delta I=2$ mit Paritätswechsel der Kernfunktion.

γ: $E_\gamma=1{,}29$ MeV; Halbwertszeit $6{,}6\cdot 10^{-9}$ sec. Daraus folgt, daß es sich wahrscheinlich um einen $M(2)$-Übergang handelt.

a) Zeichne das Zerfallsschema.

b) Bestimme aus dem Einteilchen-Schalenmodell die wahrscheinlichsten Zuordnungen von Spin und Parität für die Grundzustände von A^{41} und K^{41}.

c) Bestimme aus den Zerfallsdaten die Quantenzahlen von Spin und Parität vom angeregten K^{41}-Zustand.

4. Der Grundzustand des Se^{73} zerfällt mit einer Halbwertszeit von 7,1 h, und zwar zu 99% durch β^+-Emission und Elektroneneinfang in einen angeregten Zustand des As^{73}, der seinerseits durch γ-Emission zerfällt, und zu 1% durch β^+-Emission und Elektroneneinfang in einen anderen angeregten Zustand des As^{73}, der seinerseits durch γ-Emission in den Grundzustand des As^{73} zerfällt. Gemessen wurde:

β_1: $(KE)_{\beta,\,\max}=1{,}29$ MeV; $\log_{10} fT=5{,}3$;

β_2: $(KE)_{\beta,\,\max}=1{,}65$ MeV; $\log_{10} fT=8{,}0$;

γ_1: $E_\gamma=0{,}36$ MeV; Halbwertszeit $6\cdot 10^{-6}$ sec (daraus folgt, daß es sich wahrscheinlich um einen $M(2)$-Übergang handelt); Konversionskoeffizient $\alpha=0{,}011$ (daraus kann man auf $E(2)$ oder $M(2)$ schließen).

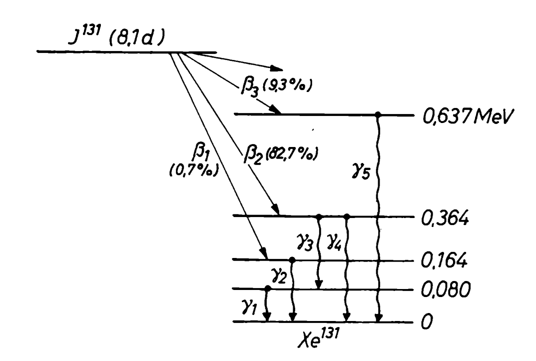
γ_2: $E_\gamma=0{,}066$ MeV; $\alpha=0{,}22$ (daraus kann man auf $M(1)$ schließen).

a) Zeichne das Zerfallsschema.

b) Bestimme aus dem Einteilchen-Schalenmodell die möglichen Zuordnungen von Spin und Parität für die Grundzustände von Se^{73} und As^{73}.

c) Zusammen mit den Zerfallsdaten ordne möglichst zwanglos allen beteiligten Niveaus Spins und Paritäten zu.

5. Der β^{-}-Zerfall des J^{131} ist im Energiediagramm schematisch dargestellt:



a) Welche Werte für Spin und Parität sagt das Einteilchen-Schalenmodell für die Grundzustände von J^{131} und Xe^{131} voraus?

b) Für den Grundzustand des Xe^{131} wurde der Spin zu $I=\frac{3}{2}$ und das magnetische Moment zu $\mu=+0{,}6868\,\mu_K$ gemessen. Welche Parität hat er?

c) Unter der Annahme, daß für J^{131} die in a) und für Xe^{131} die in b) gefundenen Werte richtig sind, bestimme mit den im Diagramm gegebenen und den folgenden Angaben die wahrscheinlichsten Werte für Spins und Paritäten der vier niedrigsten angeregten Zustände des Xe^{131}:

α) Aus der Messung des Konversionskoeffizienten folgt, daß γ_1 eine $M(1)$-Strahlung ist.

β) Konversionskoeffizient und Halbwertszeit (12,0 d) des 0,164 MeV-Niveaus klassifizieren γ_2 als $M(4)$.

γ) β_2 hat $\log_{10} fT=6{,}6$, β_3 hat $\log_{10} fT=6{,}8$.

δ) Aus dem Konversionskoeffizienten von γ_5 sieht man, daß diese Strahlung $M(1)$-oder $E(2)$-Charakter hat.

d) Wie groß ist die Massendifferenz der Grundzustände von Xe^{131} und J^{131} in MeV/c^2, wenn $(KE)_{\beta,\max}=0{,}81$ MeV für β_1, $(KE)_{\beta,\max}=0{,}606$ MeV für β_2 und $(KE)_{\beta,\max}=0{,}33$ MeV für β_3 ist? Welcher Kern ist schwerer?

6. Die niedrigsten Niveaus des Li^6-Kerns sind im Schema dargestellt:

Energie	Dreh-impuls	Parität	Linien-breite
4,52 MeV	2	+	600 keV
3,56 MeV	0	+	8 eV
2,18 MeV	3	+	21 keV
0	1	+	—

a) Welche Niveaus können durch Deuteronenbeschuß von He^4 angeregt werden?

b) Wie groß muß die kinetische Energie der Deuteronen im Laborsystem an den Resonanzstellen sein?

c) Welche Deuteronen-Partialwellen sind an den Reaktionen beteiligt?

d) Welche Multipolarität haben γ_1 und γ_2?

e) Warum wird vom 4,52 MeV-Niveau keine γ-Strahlung beobachtet?

f) Wie groß sind der Isospin T und seine Komponente T_3 im Grundzustand des Li^6-Kerns und wie kann man das verstehen?

Zu Kapitel XV:

1. Nach (30.9) und (51.9) bzw. (51.10) hängt die Rotationsenergie mit dem Kernquadrupolmoment zusammen. Wie groß sollte die Energie des ersten angeregten Zustandes eines Kerns mit $Q=5\,\mathrm{b}$ sein? Vergleiche mit experimentellen Werten und diskutiere das Ergebnis.

2. Wie bei der Behandlung des linearen, harmonischen Oszillators (Beispiel § 23) kann man auch zum HAMILTON-Operator (51.8) Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $B_{l,m}^+$ bzw. $B_{l,m}$ einführen mit den Eigenschaften

$$B_{l,m} B_{l,m}^+ - B_{l',m'}^+ B_{l',m'} = \delta_{l,l'}\, \delta_{m,m'}$$
$$B_{l,m}^+ B_{l,m} = n_{l,m}\,.$$

Wie sehen diese aus? Was erzeugen bzw. vernichten sie?

3. Die z-Komponente des Drehimpulses der Schwingung eines Kugeltröpfchens ist definiert als

$$L_z = \int \rho\, [\vec{r} \times \vec{v}]_z\, d\tau\,.$$

Berechne dieses Integral mit $\vec{v} = \operatorname{grad} \Phi$ unter Benutzung von (51.2) und der Annahme $\rho = \rho_0$. Zeige, daß gilt

$$L_z = \hbar \sum_{l,m} m\, n_{l,m}\,.$$

4. Berechne die Übergangswahrscheinlichkeit für $E(2)$-Strahlung unter Benutzung der Wellenfunktionen des Tröpfchenmodells; siehe dazu J. D. WALECKA, Phys. Rev. **126**, 653 (1962). Vergleiche mit der WEISSKOPFschen Näherung (49.24) und diskutiere die Unterschiede.

Anhang

Zur quantenmechanischen Störungsrechnung

Die Verfahren zur quantenmechanischen Störungsrechnung sind in den Lehrbüchern über Quantentheorie (s. Literaturzusammenstellung am Ende des Buches) ausführlich abgeleitet. Hier sollen nur die wichtigsten Formeln ohne exakte Beweise zusammengestellt werden.

Ein Problem kann immer dann durch eine Störungsrechnung näherungsweise gelöst werden, wenn der HAMILTON-Operator H aus zwei Summanden H_0 und H_1 besteht, wobei $|H_1| \ll |H_0|$ ist und man die Lösungen $\Psi^{(0)}$ und $E^{(0)}$ des „ungestörten" Problems

$$H_0 \Psi^{(0)} = E^{(0)} \Psi^{(0)}$$

kennt. Gesucht sind die Eigenfunktionen und Eigenwerte des SCHRÖDINGER-Problems

$$H\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

a) Zeitunabhängiger Störoperator H_1.

Es ist zweckmäßig, zunächst zu untersuchen, ob H_1 und H_0 kommutieren oder nicht.

Wenn H_1 und H_0 kommutieren, gibt es einen Satz von Funktionen, die Eigenfunktionen zu beiden Operatoren sind (vgl. §23 d 3). Man wird dann die Funktionen $\Psi_n^{(0)}$ des ungestörten Problems so wählen, daß sie auch Eigenfunktionen zu H_1 sind; die Eigenwerte der Gesamtenergie sind gegeben durch

$$E_n = E_n^{(0)} + \int \Psi_n^{(0)*} H_1 \Psi_n^{(0)} \, d\tau .$$

Die Matrix des Störoperators ist dann von vornherein auf Diagonalform. Eine Störungsrechnung erübrigt sich, da das Problem exakt lösbar ist. Im Text wurde $\int \Psi_n^{(0)*} H_1 \Psi_n^{(0)} d\tau$ als „Zusatzenergie" bezeichnet.

Wenn H_1 und H_0 nicht kommutieren, ergibt sich für die Energieeigenwerte in zweiter Näherung

$$E_n = E_n^{(0)} + \int \Psi_n^{(0)*} H_1 \Psi_n^{(0)} \, d\tau + \mathrm{S}_k' \frac{|\int \Psi_n^{(0)*} H_1 \Psi_k^{(0)} \, d\tau|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}$$

und für die Wellenfunktionen in erster Näherung

$$\Psi_n = \Psi_n^{(0)} + \mathrm{S}_k' \frac{\int \Psi_k^{(0)*} H_1 \Psi_n^{(0)} \, d\tau}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} \Psi_k^{(0)}.$$

Dabei bedeutet das Symbol S'_k: Summe über alle k außer $k=n$ des diskreten Spektrums und Integration über das kontinuierliche Spektrum.

Höhere Näherungen werden im allgemeinen nicht benötigt.

b) Zeitabhängiger Störoperator H_1.

Wenn H_0 zeitunabhängig ist, sind die Lösungen des Problems

$$H_0\,\Psi^{(0)} = i\hbar\,\frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial t}$$

gegeben durch [vgl. (21.3)]

$$\Psi^{(0)} = \sum c_n\,\Psi_n^{(0)}\,e^{-\frac{i}{\hbar}E_n^{(0)}t},$$

dabei bilden die $\Psi_n^{(0)}$ ein vollständiges System orthonormaler Funktionen.

Für die unbekannte Funktion $\Psi_{(x,y,z,t)}$ macht man nun den Ansatz

$$\Psi = \sum_m a_{m\,(t)}\,\Psi_m^{(0)}\,e^{-\frac{i}{\hbar}E_m^{(0)}t}$$

(im allgemeinen Fall ist eine Summe über die diskreten und ein Integral über die kontinuierlichen Quatenzahlen zu berechnen), d.h. man entwickelt Ψ nach dem „ungestörten" Funktionensystem. Die zeitabhängige SCHRÖDINGER-Gleichung (20.9) liefert

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = i\hbar\sum_m\left(\dot a_{m\,(t)}\,\Psi_m^{(0)}\,e^{-\frac{i}{\hbar}E_m^{(0)}t} - \frac{i}{\hbar}E_m^{(0)}\,a_{m\,(t)}\,\Psi_m^{(0)}\,e^{-\frac{i}{\hbar}E_m^{(0)}t}\right)$$
$$= H\Psi = (H_0 + H_{1\,(t)})\sum_m a_{m\,(t)}\,\Psi_m^{(0)}\,e^{-\frac{i}{\hbar}E_m^{(0)}t}.$$

Der Anteil des ungestörten Systems fällt heraus. Nach Multiplikation mit $\Psi_k^{(0)*}$ folgt unter Benutzung der Orthonormalität der $\Psi_n^{(0)}$

$$i\hbar\,\dot a_{k\,(t)}\,e^{-\frac{i}{\hbar}E_k^{(0)}t} = \sum_m a_{m\,(t)}\,e^{-\frac{i}{\hbar}E_m^{(0)}t}\int \Psi_k^{(0)*}\,H_{1\,(t)}\,\Psi_m^{(0)}\,d\tau.$$

Bis hierher wurde exakt gerechnet. Eine strenge Lösung dieses Systems aus unendlich vielen Differentialgleichungen ist aber nicht möglich.

Wir machen nun die Annahme, daß $H_1 = 0$ für $-\infty < t' < 0$ ist und daß sich das System zur Zeit $t' = 0$ im Zustand i befindet, d.h.

$$a_{i\,(t'=0)} = 1; \qquad a_{j\neq i\,(t'=0)} = 0.$$

Zur Zeit $t' = 0$ werde die Störung H_1 „angeschaltet".

Dies ist ein mathematischer Trick. Physikalisch kann die Störung schon zu Zeiten $t' < 0$ gewirkt haben; die Zeit $t' = 0$ muß nur so gewählt werden, daß das System zu diesem Zeitpunkt mit Sicherheit den Zustand i innehat.

Wir fragen nach der Wahrscheinlichkeit, daß das System zur Zeit $t > 0$ im Zustand k ist. Für die Störungsrechnung in erster Näherung verlangen wir, daß $|a_{k\,(t)}| \ll 1$ ist für $k \neq i$; $|a_{i\,(t)}| \approx 1$. Integration über die Zeit ergibt dann

$$a_{i\to k\,(t)} = \frac{1}{i\hbar}\int_0^t e^{\frac{i}{\hbar}(E_k^{(0)} - E_i^{(0)})t'}\int \Psi_k^{(0)*}\,H_{1\,(t')}\,\Psi_i^{(0)}\,d\tau\,dt'.$$

Führt man zur Abkürzung ein

$$\omega = \frac{1}{\hbar}(E_k^{(0)} - E_i^{(0)}),$$

so erhält man die *1. Goldene Regel* für die Übergangsamplitude vom Zustand i in den Zustand k:

$$\boxed{a_{i\to k\,(t)} = \frac{1}{i\hbar}\int_0^t e^{i\omega t'}\int \Psi_k^{(0)*} H_{1\,(t')}\,\Psi_i^{(0)}\,d\tau\,dt'.}$$

Die Wahl des Zeitnullpunktes ist dabei dem Störproblem anzupassen.

Ist die Störung H_1 nach ihrem „Einschalten" *zeitlich konstant* (zeitliche Stufenfunktion), so ergibt sich für die Übergangswahrscheinlichkeit w, d.h. die Wahrscheinlichkeit, daß pro Sekunde ein Übergang vom Ausgangszustand i in den Endzustand k im Intervall dE_{End} der Endenergie des Gesamtsystems stattfindet, zu

$$w = \frac{1}{t}\,|a_{i\to k\,(t)}|^2.$$

Liegen die Endzustände kontinuierlich, so erhält man

$$\boxed{w = \frac{2\pi}{\hbar}\,\left|\int \Psi_k^{(0)*} H_1\,\Psi_i^{(0)}\,d\tau\right|^2 \rho_{(E_{\text{End}})}.}$$

Dabei ist $\rho_{(E_{\text{End}})}$ die Zahl der möglichen Zustände des Systems zwischen den Energiewerten E_{End} und $E_{\text{End}} + dE_{\text{End}}$. Dies ist die *2. Goldene Regel* für zeitlich „stufenförmige" Störung.

Ist die Störung H_1 nach ihrem Einschalten *zeitlich periodisch*, also von der Form

$$H_1 = A\,e^{-i\omega' t} + A^*\,e^{i\omega' t},$$

so ergibt die Ausführung der Zeitintegration (s. 1. Goldene Regel)

$$a_{i\to k} = \frac{1}{i\hbar}\left[\frac{e^{2i\hbar(\omega-\omega')t} - 1}{2i\hbar(\omega-\omega')}\int \Psi_k^{(0)*} A\,\Psi_i^{(0)}\,d\tau + \right.$$
$$\left. + \frac{e^{2i\hbar(\omega+\omega')t} - 1}{2i\hbar(\omega+\omega')}\int \Psi_k^{(0)*} A^*\,\Psi_i^{(0)}\,d\tau\right].$$

Da

$$\left|\frac{e^{2i\delta t} - 1}{2i\delta}\right|^2 = \frac{\sin^2 \delta t}{\delta^2}$$

nur bei $\delta \approx 0$ wesentlich von Null verschieden ist, liefert der vom Operator $A\,e^{-i\omega' t}$ herrührende erste Term nur einen Beitrag für

$$\omega' = \omega = \frac{1}{\hbar}(E_k^{(0)} - E_i^{(0)}).$$

Da ω' notwendig positiv ist, beschreibt dieser Operator also den Absorptionsprozeß ($E_k^{(0)} > E_i^{(0)}$, der Endzustand liegt energetisch höher als der Ausgangszustand). Der

Operator $A^* e^{i\omega' t}$ beschreibt die Emission (vgl. § 49), denn jetzt muß gelten

$$\omega' = -\omega = \frac{1}{\hbar}(E_i^{(0)} - E_k^{(0)}),$$

also $E_i^{(0)} > E_k^{(0)}$. Dabei entspricht die Frequenz der Störung nach der BOHRschen Regel (5.2) jeweils dem Energieabstand der Zustände. Der Energiesatz wird damit automatisch erfüllt.

Aus der Übergangsamplitude $a_{i\to k}$ kann man wieder die Übergangswahrscheinlichkeit $w = \frac{1}{t}\,|a_{i\to k}|^2$ berechnen. Diese ist nur dann zeitunabhängig, wenn der Störoperator in einem gewissen Frequenzband um ω' von Null verschieden ist, dessen Breite im Energiemaß größer ist als die natürliche Linienbreite der beteiligten Zustände; außerdem müssen die zu verschiedenen ω' gehörigen Beiträge inkohärent sein. Dies ist im allgemeinen bei physikalischen Strahlungsquellen erfüllt*.

Durch Integration über alle Zustände im Intervall $\Delta\omega'$ erhält man im Kontinuum von Endzuständen

$$w = \frac{2\pi}{\hbar}\,\left|\int \Psi_k^{(0)*} A\, \Psi_i^{(0)}\, d\tau\right|^2 \rho_{(E_{\mathrm{End}})}$$

mit $E_{\mathrm{End}} = E_k^{(0)}$ für Absorptionsprozesse und

$$w = \frac{2\pi}{\hbar}\,\left|\int \Psi_k^{(0)*} A^*\, \Psi_i^{(0)}\, d\tau\right|^2 \rho_{(E_{\mathrm{End}})}$$

mit $E_{\mathrm{End}} = E_i^{(0)} + \hbar\omega$ für Emissionsprozesse. Für diskrete Endzustände ergibt sich dieselbe Formel, wenn $\rho_{(E_{\mathrm{End}})} = 1$ gesetzt wird.

Die Ausdrücke haben wieder die Form der 2. Goldenen Regel. Diese gilt also sowohl für zeitlich konstante (z.B. β-Zerfall) als auch für zeitlich periodische Störoperatoren (z.B. γ-Zerfall); im letzteren Fall enthalten die Matrixelemente den Operator ohne den Faktor $e^{-i\omega' t}$ bzw. $e^{i\omega' t}$.

Weiterführende Literatur

Ohne Anspruch auf Vollständigkeit sind hier einige im allgemeinen für den Studierenden verständliche und auch zugängliche Bücher sowie zusammenfassende Originalarbeiten angegeben. Sie wurden — soweit möglich — der Gliederung dieses Buches entsprechend sortiert. Es wurden nur deutsch- und englischsprachige Titel aufgeführt. Innerhalb der Untergruppen sollte aus der Reihenfolge keine Wertabstufung konstruiert werden.

Tabellenwerke

1. Nuclear Data Sheets, periodisch herausgegeben vom National Research Council, Washington, D.C.
2. LANDOLT-BÖRNSTEIN, Zahlenwerte und Funktionen aus Naturwissenschaft und Technik, Neue Serie, Gruppe I, Band 1, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1961.

* Wichtige Ausnahme: LASER-Strahlung. Hier hat man ein sehr schmales Frequenzband.

3. B. S. Dzhelepov und L. K. Peker, Decay Schemes of Radioactive Nuclei, Pergamon Press, Oxford-London-New York-Paris 1961.
4. 1960 Nuclear Data Tables, Part 1—4, USAEC, U.S. Gov. Printing Office 1960.
5. Hughes und Schwartz, Neutron Cross Sections, Report BNL-325, 1958.
6. W. Kunz und J. Schintlmeister, Nuclear Tables Part 1, Vol. 1 und 2, Akademie-Verlag, Berlin 1958.

Zu Teil A

Allgemein

7. W. Finkelnburg, Einführung in die Atomphysik, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1956.
8. R. B. Leighton, Principles of Modern Physics, MacGraw-Hill Book Co., New York-London 1959.
9. R. L. Sproull, Modern Physics: The Quantum Physics of Atoms, Solids and Nuclei, John Wiley and Sons, Inc., New York 1963.
10. O. Oldenberg, Introduction to Atomic and Nuclear Physics, MacGraw-Hill Book Co., New York-London 1961.
11. R. S. Shankland, Atomic and Nuclear Physics, MacMillan Co., New York 1960.
12. R. M. Eisberg, Fundamentals of Modern Physics, John Wiley and Sons, Inc., New York 1961.
13. E.W. Schpolski, Atomphysik, Bd. 1 und 2 (Übersetzung aus dem Russischen, 1951), Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1958.

Speziell zu Kapitel I und II

14. H. Goldstein, Klassische Mechanik [Übersetzung aus dem Englischen (1950)], Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt a. M. 1963.
15. R. W. Pohl, Optik und Atomphysik, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1956.
16. H. Teichmann, Einführung in die Atomphysik, B.I. Hochschultaschenbücher, Bd. 12, Bibliographisches Institut, Mannheim 1959.
17. U. Fano und L. Fano, Basic Physics of Atoms and Molecules, John Wiley and Sons, Inc., New York 1959.
18. M. Born, Atomic Physics, Blackie and Son, London-Glasgow 1957.

Speziell zu Kapitel III bis VI

Siehe Hinweise zu Teil C (allgemein).

Speziell zu Kapitel VI

19. R. B. Leachman, The Fission Process-Mechanism and Data, Progr. Nucl. Energy: Phys. and Math. **3**, 144 (1959).
20. I. Halpern, Nuclear Fission, Ann. Rev. Nucl. Sci. **9**, 245 (1959).

Speziell zu Kapitel VII

21. R. Schulten und W. Güth, Reaktorphysik I und II, B. I. Hochschultaschenbücher Bd. 6 und 11, Mannheim 1960 und 1962.
23. K. Wirtz und K. H. Beckurts, Elementare Neutronenphysik, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1958.
24. S. Glasstone und M. C. Edlund, The Elements of Nuclear Reactor Theorie, ins Deutsche übersetzt mit dem Titel: Kernreaktortheorie, Springer-Verlag, Wien 1961.
25. A. M. Weinberg und E. P. Wigner, The Physical Theory of Neutron Chain Reactors, University of Chicago Press, Chicago 1958.
26. H. S. Isbin, Introductory Nuclear Reactor Theory, Reinhold Publ. Co., New York; Chapman and Hall, London 1963.

Zu Teil B

Allgemein (Auswahl aus dem umfangreichen Schrifttum über Quantentheorie)

27. D. J. Blochinzew, Grundlagen der Quantenmechanik (Übersetzt aus dem Russischen), Harri Deutsch, Frankfurt a. M. 1962.
28. L. I. Schiff, Quantum Mechanics, MacGraw-Hill Book Co., New York-London 1955.
29. W. Macke, Quanten, Akademische Verlagsgesellschaft 1959.
30. L. D. Landau und E. M. Lifshitz, Quantum Mechanics (Übersetzung aus dem Russischen), Pergamon Press, Oxford-London-New York-Paris 1958.
31. A. Messiah, Quantum Mechanics, Vol. I und II, North-Holand Publ. Co., Amsterdam 1961.
32. S. Flügge und H. Marschall, Rechenmethoden der Quantentheorie, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1952.
33. T. Kahan, Quantentheorie, Akademie-Verlag, Berlin 1963.
34. E. Corinaldesi und F. Strocchi, Relativistic Wave Mechanics, North-Holland Publ. Co., Amsterdam 1963.

Speziell zu Kapitel IX

35. M. E. Rose, Elementary Theory of Angular Momentum, John Wiley and Sons, Inc. 1957.
36. A. R. Edmonds, Angular Momentum in Quantum Mechanics, Princeton University Press, Princeton 1957.
37. E. U. Condon and G. H. Shortley, The Theory of Atomic Spectra, Cambridge University Press, London 1957.

Zu Teil C

Allgemein

38. R. D. Evans, The Atomic Nucleus, MacGraw-Hill Book Co., New York-London 1955.
39. J. M. Blatt und V. F. Weisskopf, Theoretical Nuclear Physics, Addison-Wesley Publ. Co., Inc., Cambridge, Mass. 1953.
40. A. M. Preston, Physics of the Nucleus, Addison-Wesley Publ. Co., Inc., Reading, Mass., Palo Alto, London 1962.
41. R. G. Sachs, Nuclear Theory, Addison-Wesley Publ. Co., Inc., Cambridge, Mass. 1953.
42. M. Goeppert-Mayer und J. H. D. Jensen, Elementary Theory of Shell Structure, John Wiley and Sons, Inc., New York 1955.
43. A. de Shalit und I. Talmi, Nuclear Shell Theory, Academic Press, New York-London 1963.
44. G. Hertz, Lehrbuch der Kernphysik, 3 Bde., W. Dausien, Hanau a. M. 1961.
45. L. R. B. Elton, Introductory Nuclear Theory, Pitman, London 1959.
46. A. S. Dawydow, Theorie des Atomkerns (Übersetzung aus dem Russischen, 1958), Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1963.
47. H. A. Bethe und P. Morrison, Elementary Nuclear Theory, John Wiley and Sons, Inc., New York 1956.
48. L. Eisenbud und E. P. Wigner, Nuclear Structure, Princeton University Press, Princeton 1958.
49. I. Kaplan, Nuclear Physics, Addison-Wesley Publ. Co., Inc., Cambridge, Mass. 1955.
50. E. Segré (Editor), Experimental Nuclear Physics, 3 Bde., John Wiley and Sons, Inc., New York 1952.
51. E. Fermi, Nuclear Physics, University of Chicago Press, Chicago 1950.
52. S. Flügge (Herausgeber), Handbuch der Physik, Bände **38** bis **46**, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg.

Speziell zu Kapitel X

53. H. KOPFERMANN, Kernmomente, Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt a.M. 1956.
54. N. F. RAMSEY, Nuclear Moments, John Wiley and Sons, Inc., New York 1953.
55. J. RANFT, Die Feinstruktur von Kerninduktionssignalen, Fortschr. Phys. **9**, 149 (1961).
56. J. A. POPLE, W. G. SCHNEIDER und H. J. BERNSTEIN, High-Resolution Nuclear Magnetic Resonance, MacGraw-Hill Book Co., New York-London 1959.
57. K. F. SMITH, Nuclear Moments and Spins, Progr. Nucl. Phys. **6**, 108 (1957).

Speziell zu Kapitel XI

58. E. FEENBERG, Shell Theory of the Nucleus, Princeton University Press, Princeton 1955.
59. L. R. B. ELTON, Nuclear Sizes, Oxford University Press, London 1961.
60. R. HOFSTADTER, Nuclear and Nucleon Structure, W. A. Benjamin, Inc., New York 1963.
61. M. I. KORUNSKI, Isomerie der Atomkerne, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1957.

Speziell zu Kapitel XII

62. R. WILSON, The Nucleon-Nucleon Interaction, Interscience Publishers, Inc., New York-London 1963.
63. M. J. MORAVCSIK und H. P. NOYES, Theories of Nucleon-Nucleon Elastic Scattering, Ann. Rev. Nucl. Sci. **11**, 95 (1961).
64. H. P. STAPP, M. H. MACGREGOR und M. J. MORAVCSIK, Nucleon-Nucleon Scattering Experiments and their phenomenological analysis, Ann. Rev. Nucl. Sci. **10**, 291 (1960).
65. J. L. GAMMEL und R. M. THALER, Phenomenology of the Nucleon-Nucleon Interaction, Progr. Elem. Particle and Cosm. Ray Phys. **5**, 97 (1960).
66. G. C. WICK, Invariance Principles of Nuclear Physics, Ann. Rev. Nucl. Sci. **8**, 1 (1958).

Speziell zu Kapitel XIII

67. P. M. ENDT und M. DEMEUR, Nuclear Reactions I, North-Holland Publ. Co., Amsterdam 1959.
68. P. M. ENDT und P. B. SMITH, Nuclear Reactions II, North-Holland Publ. Co., Amsterdam 1962.
69. R. G. MOORE, jr., Nuclear Reaction Cross-Section Theory, Rev. Mod. Phys. **32**, 101 (1960).
70. J. M. MILLER and J. HUDIES, High-Energy Nuclear Reactions, Ann. Rev. Nucl. Sci. **9**, 159 (1959).
71. H. FESHBACH, The Optical Model and its Justification, Ann. Rev. Nucl. Sci. **8**, 49 (1958).
72. P. B. JONES, The Optical Model in Nuclear and Particle Physics, Interscience Publishers, Inc., John Wiley and Sons, New York-London 1963.
73. M. BORMANN und H. NEUERT, Compoundkernreaktionen und statistische Theorie, Fortschr. Phys. **11**, 277 (1963).
74. T. ERICSON, The Statistical Model and Nuclear Level Densities, Adv. in Physics **9**, 425 (1960).
75. D. BODANSKY, Compound Statistical Features in Nuclear Reactions, Ann. Rev. Nucl. Sci. **12**, 79 (1962).
76. L. C. BIEDENHARN und P. J. BRUSSAARD, Coulomb Excitation, Duke University Press, Durham N.C. 1963.

77. P. H. STELSON und F. K. MCGOWAN, Coulomb Excitation, Ann. Rev. Nucl. Sci. **13**, 163 (1963).
78. S. T. BUTLER, Nuclear Stripping Reactions, Horwitz-Wiley-Pitman (Sydney, New York, London) 1957.
79. N. H. GLENDENNING, Nuclear Stripping Reactions, Ann. Rev. Nucl. Sci. **13**, 191 (1963).
80. M. H. MACFARLANE und J. B. FRENCH, Stripping Reactions and the Structure of Light and Intermediate Nuclei, Rev. Mod. Phys. **32**, 567 (1960).
81. J. S. LEVINGER, Nuclear Photo-Disintegration, Oxford University Press, London 1960.
82. D. H. WILKINSON, Nuclear Photodisintegration, Ann. Rev. Nucl. Sci. **9**, 1 (1959).

Speziell zu Kapitel XIV

83. F. AJZENBERG-SELOVE, Nuclear Spectroscopy, North-Holland Publ. Co., Amsterdam 1955.
84. I. PERLMAN und J. M. HOLLANDER, Radioactivity and Nuclear Structure, Ann. Rev. Phys. Chem. **5**, 119 (1954).
85. H. J. MANG und J. O. RASMUSSEN, Shell Model Calculations of Alpha Decay Rates of Even-Even Spheroidal Nuclei, Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk. **2**, No. 3 (1962).
86. K. SIEGBAHN, Beta- and Gamma-Ray Spectroscopy, North-Holland Publ. Co., Amsterdam 1955.
87. M. GOLDHABER und J. WENESER, Ann. Rev. Nucl. Sci. **5**, 1 (1955).
88. W. HEITLER, The Quantum Theory of Radiation, Clarendon Press, Oxford 1954.
89. H. J. LIPKIN, Beta Decay for Pedestrians, North-Holland Publ. Co., Amsterdam 1962.
90. H. SCHOPPER, Der β-Zerfall, Fortschr. Phys. **8**, 327 (1960).
91. JA. SMORODINSKIJ, Der gegenwärtige Stand der Theorie des β-Zerfalls, Fortschr. Phys. **8**, 426 (1960).
92. E. J. KONOPINSKI, The Experimental Clarification of the Laws of β-Radioactivity, Ann. Rev. Nucl. Sci. **9**, 99 (1959).
93. R. M. STERNHEIMER, Partiy Nonconservation in Weak Interactions, Adv. in Electronics and Electr. Phys. **11**, 31 (1959).

Speziell zu Kapitel XV

94. P. E. NEMIROVSKII, Nuclear Models (Übersetzung der russischen Ausgabe 1960 ins Englische), Spon Ltd., London 1963.
95. R. J. EDEN, Nuclear Models, Progr. Nucl. Phys. **6**, 26 (1957).
96. A. BOHR und Mitarbeiter, Dan. Mat.-Fys. Medd., **26** bis **33**, mehrere Arbeiten.
97. D. M. BRINK, Collective Motion of Nuclei, Progr. Nucl. Phys. **8**, 97 (1960).
98. I. TALMI und I. UNNA, Theoretical Interpretation of the Energy Levels of Light Nuclei, Ann. Rev. Nucl. Sci. **10**, 353 (1960).
99. G.E. BROWN, Unified Theory of Nuclear Models, North-Holland Publ. Co., Amsterdam 1964.

Sachverzeichnis

α-Teilchen, Bindungsenergie 34, 46
——, Reaktionen 316, 337
——, Streuung 22, 337
—— im Kern 352
α-Zerfall 58, 86, 131, 350, 351 ff., 406, 407
A-Faktor der Hyperfeinstruktur 190
Absorptionslänge 24
— von Neutronen 100
Absorptionsquerschnitt s. Wirkungsquerschnitt f. Absorption
Additionstheorem d. Kugelfunktionen s. Kugelfunktionen
Adjungierter Operator 141, 142
Aktivität 64, 66
Altersbestimmung 61
Antineutrino 53, 380 ff.
Antisymmetrischer Zustand 155, 259
Antisymmetrische Wellenfunktion 156
Antiteilchen 30, 56, 269
Äquivalentradius 223, 231
Atomare Masseneinheit 23, 31
Atommassen 23, 31
—-diagramm s. Energiediagramm
Atommodell (Bohr-Sommerfeld) 25 ff.
Aufenthaltswahrscheinlichkeit 119, 141, 217, 355
Auger-Strahlung 53, 57, 376
Ausgangskanal 268
Austauschkräfte 261, 342
Austauschsymmetrie 154, 255, 259
Auswahlregeln für Multipolstrahlung 197, 371, 373, 374
— für β-Zerfall 381, 387, 388

β-Zerfall 53 ff., 74, 180, 255, 351, 380 ff., 406, 407
——, doppelter 74
——, *fT*-Wert 74, 351, 387 ff.
——, Spektrum 55, 384, 385
—— von Spiegelkernen 78, 387
——, verbotener 387, 388
—— des Neutrons 33, 53, 387
—— des H^3 34, 55, 387
β-Zerfall des O^{14} 381, 387
—— des Na^{22} 57
—— des K^{40} 61, 76
—— des Co^{60} 55, 381, 383, 389
—— des Cu^{64} 385, 386
—— des Br^{87} 82
—— des Sr^{90} 63
—— des Cs^{137} 388, 389
B-Faktor der Hyperfeinstruktur 204
Bahndrehimpuls 2, 3, 12, 158 ff., 181, 277, 325, 334, 394
—, Eigenfunktionen 142, 159
—, Eigenwerte 142
—, Erhaltungssatz 15, 121, 153
—, Operator 140, 153, 359
—, Quantelung 25, 28, 122, 124, 178
Barn 23
Baryonen 56
—-Zahl (Erhaltungssatz) 56, 84, 269, 405
Beschleuniger 46, 329, 337
Bessel-Funktionen 133, 247, 361, 365, 368
Bethe-Levinger-Summenregel 342
Bethe-Weizsäcker-Formel s. Weizsäcker-Formel
Bindungsenergie 19, 27, 30 ff., 67 ff., 84, 85, 261, 404, 405
— des letzten Neutrons 35, 83, 86
— pro Nukleon 32
Bohrsches Atommodell 25 ff., 239
Bohrsche Frequenzbedingung 26, 117
Bohrsches Magneton 185
Bornsche Deutung der Ψ-Funktion 119
————, Näherung 233
Boson 155
Breit-Rabi-Formel 192, 195
Breit-Wigner-Formel 291 ff., 299, 303, 310, 317
Brems-dichte 108
—-spektrum von Neutronen 95
—-strahlung 343, 345
Bremsung von Neutronen 89 ff.
Brüten 99
Buckling s. Materielle Flußwölbung

CASIMIR-Formel 207
Cd-Verhältnis 297
CLEBSCH-GORDAN-Koeffizienten 170ff., 193, 194, 228, 265, 370
Cross section s. Wirkungsquerschnitt
Compoundkern 251, 267, 271, 278ff., 337, 404
COMPTON-Streuung 47ff.
—-Wellenlänge 48, 130
COULOMB-Anregung 329, 330ff., 333, 337, 402
—-Eichung 366
—-Korrektur beim β-Zerfall 381, 383, 385
—-Schwelle 313, 314
—-Wall 291, 313, 317, 324, 328, 343, 350, 383
COULOMBsches Kraftgesetz 16, 25, 211, 232, 331
Curie 64

DE-BROGLIE-Wellen 117
Detailed balance s. Reziprozitätstheorem
Deuteron, Bindungsenergie 33, 243, 333
—, angeregte Zustände 251, 253
—, Elektrisches Quadrupolmoment 243, 258, 264ff., 406
—, Magnetisches Moment 188, 243, 258, 262ff., 406
—, Masse 33
—, Spaltung 33, 83, 345ff.
—, Spin 242, 245
—, Theorie 243ff.
—, Wellenfunktion 243ff., 250, 259, 264, 346
Deuteronenreaktionen 253, 333ff.
Diagonalisierung (von Matrizen) 147, 150, 194
Diffusion im Abbremsbereich 107
— thermischer Neutronen 101
Dipol s. elektrischer Dipol, magnetischer Dipol
Dipoloperator 229, 345, 370
Diproton, Dineutron 243, 254, 259, 260
Direkte Kernreaktion 267, 329ff., 338, 407
DOPPLER-Effekt 52, 292, 293, 300
Drehimpuls s. Bahndrehimpuls, Gesamtdrehimpuls, Spin, Kopplung von Drehimpulsen
Dreiteilchenzerfall 51, 53, 56, 380
Dualer Zerfall 61
Durchdringung von Potentialschwellen s. Tunneleffekt
Durchlässigkeitskoeffizient s. GAMOW-Faktor

Ebene Welle, Entwicklung nach Kugelfunktionen 247, 273
EC s. Elektroneneinfang
Effektive Ladung der Nukleonen im Kern 339, 372
Effektiver Multiplikationsfaktor 98, 110
Effektives Resonanzintegral 299
Eigen-funktionen eines Operators 142ff.
—-werte eines Operators 142ff.
Einfangs-breite 292, 293, 311
—-querschnitt s. Wirkungsquerschnitt f. Einfang
Eingangskanal 268
EINSTEIN-Beziehung zwischen Masse und Energie 30, 38
Einteilchen-Anregungszustände s. Kernzustände
—-Schalenmodell s. Schalenmodell
Elastische Streuung 42, s. auch Streuprozeß
— — von Neutronen 87
Elastischer Stoß 7
Elektrische Abstoßung der Protonen 68, 78, 222, 260
— Dipolstrahlung 197, 338ff., 371
— —, Winkelverteilung 377
— Multipolfelder 364ff.
— —, HAMILTON-Operator für — 367
Elektrisches Kerndipolmoment 201, 338
— Kernpotential 69, 239, 242
— Kernquadrupolmoment 181, 198ff., 208, 219, 222, 238, 242, 262, 397, 406
— Potential am Kernort 198, 337
Elektron, Masse 31
—, Radius (klassisch) 48, 162
—, Magnetisches Moment 182
Elektronen im Atomverband 25
— im Kern 54, 178
—-einfang (capture) 57, 61, 78, 389ff.
—-streuung 49, 218, 230, 232ff., 345
Element 30, 84
Ellipsenbahn 17, 19, 27
Energie von angeregten Kernzuständen 292, 317, 397ff.
—-diagramm 33ff., 55, 57, 326

Energie eines Dipols im Feld 184, 196, 338, 345, 350
—-eigenfunktionen 121, 126
—-eigenwerte 121, 126, 180
— der elektrischen Abstoßung 68
— des elektromagnetischen Feldes 364
—-entartung 19, 28, 139, 173, 178, 189, 215
—-gewinn bei Spaltung 83, 269
—, harmonisch gemittelte 345
—, kinetische s. Kinetische Energie
—, komplexe 290, 353ff.
—, Kondensations- 67
— einer Ladungsverteilung im Feld 199
—, Oberflächen- 67, 80, 395
—-operator 118, 140
—, Paarungs- 72
— eines Quadrupols im Feld 198ff., 202
—, relativistische 37ff.
—, Rotations- 400
—, Symmetrie- 70
—-tal 73, 85
Energieerhaltungssatz 18, 40, 151, 180, 269
Epithermische Neutronen s. Neutronen
Erhaltungssätze 5, 7, 37ff., 151ff., 177, 268ff., 329
Erwartungswert 141, 145, 151
Extrapolationslänge 103
Exzentrizität der Kegelschnitte 17, 18
— — Kerne s. elektr. Kernquadrupolmoment

Family-II-Verteilung 232
Feinstrukturaufspaltung 28, 173, 211
Feinstrukturkonstante 28
FERMI-Alter 108
—-Auswahlregeln beim β-Zerfall 381, 387
—-Gas 70, 403, 404
—-Teilchen s. Fermion
—-Verteilung 231, 239, 261
Fermion 155, 403
Fission s. Spaltung
Flächensatz 15, 181
Fluoreszenzausbeute 376
Formfaktor 236
Freie Weglänge 24, 25, 95
— — im Kern 302, 305, 404
fT-Wert beim β-Zerfall s. β-Zerfall

γ-Quanten s. Photonen
—-kaskade 291, 377
γ-Zerfall 51ff., 332, 350, 357, 367ff., 407 (Beispiele s. auch β-Zerfall)
g-Faktor 183
GAMOW-Faktor 133, 312, 351
—-Theorie des α-Zerfalls 351ff.
GAMOW-TELLER-Auswahlregel beim β-Zerfall 381
GAUSS-Potential 260
—-Verteilung 65, 108, 217
GEIGER-NUTTALL-Gesetz 352
Geometrische Flußwölbung 106
Gesamtdrehimpuls 158, 159ff., 167, 174, 180, 188
—, Erhaltungssatz 167, 178, 260, 270
— des elektromagnetischen Feldes 359ff.
Goldene Regel I 332, 417
— — II 233, 309, 321, 340, 368, 380, 417, 418
Grenzenergie der β-Spektren 54, 384, 385
Gyromagnetisches Verhältnis 182

Halbwertszeit 59, 180, 332, 353, 374, 387 (s. auch Lebensdauer)
—, partielle 63
HAMILTON-Operator 119, 140, 142, 150, 151ff., 178, 192, 206, 232, 254, 309, 331, 339, 367, 382, 396, 415
Hard core 261
Harmonischer Oszillator s. Oszillator
Häufigkeitsverteilung der Isotopen 84, 85
Hauptquantenzahl 27
Hautdicke des Kerns 223, 231, 240
HEISENBERGsche Unschärferelation 52, 144ff., 180, 269, 291, 403
Helizität 382
Hermitischer Operator 141, 142, 321, 340
Hydrodynamisches Kernmodell 344, 391ff., 397
Hyperbelbahn 19, 330
Hyperfeinstruktur 188ff., 206, 241

Impuls 2, 3, 10
—-abhängigkeit des Kernpotentials 254
—-dreieck 40, 234
—-erhaltung 40, 151, 269
—-operator 118, 140, 143
—, relativistischer 38
Inelastische Streuung s. Streuprozeß
Innere Konversion s. Konversion

Innere Paarbildung 374
Inneres Quadrupolmoment 202
Intervallregel der Hyperfeinstruktur 190, 206
Inverser Prozeß s. Umkehrreaktion
Ionisierungsenergie 27
Isobare 30
Isomerer Zustand 374, 404 (s. auch *IT*)
Isospin 181, 254ff., 273, 406
—, Erhaltungssatz 255, 273
Isotone 30, 84
Isotopen 30, 85
—-karte 73, 404
Isotopieverschiebung 198, 232, 241 ff.
IT= isomeric transition 374, 388

j-j-Kopplung 158, 174, 178, 209, 405

K-Einfang s. Elektroneneinfang
K-Strahlung s. RÖNTGEN-Strahlung
Kanal bei Kernreaktionen s. Eingangskanal, Ausgangskanal
—-spin 270
Kastenpotential s. Potential
KEPLERsche Gesetze 14ff., 181
Kernbindungsenergie s. Bindungsenergie
Kern-*g*-Faktor 180, 183, 262, 406
——— von angeregten Zuständen 380, 401, 407
Kernisomer s. Isomerer Zustand
Kernladung 30, 405
—, Bestimmung 21, 29
—, Erhaltungssatz 30, 269
—, Verteilung s. Ladungsverteilung im Kern
Kernmagneton 180, 185
Kernmassen 30ff., 405
—-diagramm s. Energiediagramm
—-formel 73
—, Geschwindigkeitsabhängigkeit 38
Kernmittbewegungseffekt der Isotopieverschiebung 241
Kernmomente 185, 202, s. auch Magnetisches Kerndipolmoment, Elektrisches Kernquadrupolmoment
Kernphotoeffekt 321, 338ff., 345ff., 368
Kernpotential s. Potential
Kernradius 67, 213, 222ff., 242, 277, 307, 337, 344, 352
Kernreaktionen s. auch α-Teilchen-Reaktionen, Compoundkern, COULOMB-Anregung, Deuteronenreaktionen, Kernphotoeffekt, Neutronenreaktionen, Protonenreaktionen, Wirkungsquerschnitt
—, direkte 267, 329ff., 338, 404
—, endoenergetische 44, 316
—, exoenergetische 44, 316
—, Kinematik 37ff., 334
—, Sekundärteilchenspektrum bei — 323ff., 404
—, Theorie 266ff., 404
—, Untersuchungsmethoden 320
Beispiele:
$H^1(n,\gamma)H^2$ 349, 350
$H^2(\gamma,n)H^1$ 33, 83, 345ff.
$H^3(p,\gamma)He^4$ 322
$H^3(p,n)He^3$ 45
$H^3(d,n)He^4$ 46
$He^4(\gamma,p)H^3$ 322
$Li^7(p,\alpha)He^4$ 272
$Be^9(\gamma,n)Be^8$ 36, 83
$Be^9(\alpha,n)C^{12}$ 37
$B^{10}(n,\alpha)Li^7$ 282
$B^{10}(\alpha,p)C^{13}$ 269, 270, 317
$C^{12}(\gamma,n)C^{11}$ 343
Reaktionen über $(N^{14})^*$ 317, 320, 321
(d,α)-Reaktionen 76
$Zr^{90}(d,p)Zr^{91}$ 336
$Cd^{113}(n,\gamma)Cd^{114}$ 297
$In^{115}(n,\gamma)In^{116}$ 294
$U^{238}(n,\gamma)U^{239}$ 298
$U^{238}(n,f)$ 79ff.
Kernreaktor s. Reaktor
Kernrumpf 209, 212, 219, 391, 397
Kernschwerpunkt 224
Kernspaltung s. Spaltung
Kernspin 178, 188ff., 209, 214, 216, 405
Kerntemperatur 328
Kernverdampfung 268, 323ff., 404
Kernvolumeneffekt der Isotopieverschiebung 242
Kernzerfall 50ff., 59, 350ff., s. auch α-, β-, γ-Zerfall, Konversion, Elektroneneinfang
Kernzustände, angeregte 35, 51, 251, 288, 292, 320, 330
—, Einteilchen— 216, 372, 374, 404, 407
—, kollektive 76, 216, 333, 344, 375, 390ff., 404, 407, s. auch Spin, Parität, Kern-*g*-Faktor, α-, β-, γ-Zerfall

Kettenreaktion 96ff.
Kinematik s. Kernreaktionen
Kinetische Energie 2, 3, 4
— — im FERMI-Gas-Modell 71
— — im hydrodynamischen Modell 393ff.
— —, quantenmechanisch 125, 129
— —, relativistische 38
— — im Relativsystem 10
— — im Schwerpunktssystem 7
KLEIN-NISHINA-Formel 49, 113
Kollektivmodell s. Kernzustände, kollektive
Kommutation von Operatoren 140, 144ff., 341, 359
— des Drehimpulses 158, 159
Kompressibilität der Kernmaterie 392
Kondensationsenergie 67
Konfluente hypergeometrische Funktionen 139
Kontinuitätsgleichung 274
Kontinuumstheorie der Kernreaktionen 282, 302, 324
Konversion (innere) 52, 357, 375
Konversionskoeffizient 53, 375, 379
Koordinatensysteme 1ff.
Kopplung von Drehimpulsen 158, 167ff., 174, 191
Kopplungskonstante der Wechselwirkungen 381
Kraftpotential 18, s. auch Potential
Kritische Reaktorgröße 101ff.
KRONECKER-Symbol 143
Krümmungsfaktor s. Materielle Flußwölbung
Kugelfunktionen 123, 228, 265, 394
—, Additionstheorem der — 199, 203, 228, 332, 347
—, Vektor- 363
Kugelkoordinaten 4, 121, 154, 158
Kugelwellen 127, 246, 273, 281, 355
KURIE-Plot 385

L-Einfang s. Elektroneneinfang
Ladungsabhängigkeit des Kernpotentials 181, 253, 254ff.
Ladungsvariable 254
Ladungsverteilung im Kern 181, 209, 216, 222ff., 231, 238, 406, s. auch Protonendichte

LANDÉ-Faktor s. *g*-Faktor
LAPLACE-Operator 12
— - — in Kugelkoordinaten 121
Lebensdauer 52, 60, 290, 352, 356, 372, 403, 407
Leckfaktor 98, 99, 101, 105, 109
LEGENDRE-Polynome 123, 154, 198, 247, 331
Leptonen 56, 232, 380
— -zahl (Erhaltungssatz) 56, 269
Lethargie 93
Lichtquanten s. Photonen
Linienbreite 52, 180, 268, 285, 288, 290, 311, 324, 407
LORENTZ-Form von Spektrallinien 285
Lowering operator 160

Magische Zahlen 84, 209, 214, 242, 397, 398, 404, 405
Magnetfeld am Kernort 189
Magnetische Dipolstrahlung 197, 350
— Multipolfelder 364ff., 373
Magnetisches Kerndipolmoment 180, 181ff., 188ff., 262, 401, 406
Magneton s. BOHRsches Magneton, Kernmagneton
MAJORANA-Operator 261
Massen-defekt 31, 85
— -diagramm s. Energiediagramm
— -einheit, atomare 23, 31
— -formel s. Kernmassenformel
Materielle Flußwölbung 106, 109
Materiewellen 118
Matrixdarstellung von Operatoren 146ff.
— des Drehimpulses 163
MAXWELL-Theorie des elektromagnetischen Feldes 118, 358
— -Verteilung 96, 328
Moderator 96, 99
MOSELEYS Gesetz 29
MOTTsche Streuformel 236
Müonen 56, 232, 239
— -atome 239ff.
Multiplikationsfaktor, effektiver 98, 110
—, unendlicher 98, 100, 301
Multipol-entwicklung 350, 357ff., 381
— -momente 370
— -operator 370
— -ordnung 333, 373ff., 376
— -übergang 368ff., 374, 380

Nebenquantenzahl 27, 28
NEUMANN-Funktionen 133
Neutrino 39, 56, 380ff., 385
Neutron 29, 30
—, effektive Ladung im Kern 339, 372
—, Formfaktor 239
—, magnetisches Moment 182, 185
—, Masse 31
—, Parität 292
—, Spin 70, 253
—, Zerfall 33, 53, 387
Neutronen im Abbremsbereich 107ff.
—-absorption 101
—-bremsung 89ff., 94, 299
—-diffusion 101ff.
—-einfang 24, 80, 96, 100, 291ff., 350
—, epithermische 107, 297
—-fluß 94ff., 101, 104
—-physik 86ff.
—, prompte 81
—-punktquelle 104
—-quellen 35, 329
—-reaktionen 278ff., 301, 316
—, schnelle 46, 82, 96
—, Spaltung durch — 80, 96
—-streuung 87ff., 100, 245ff., 283ff., 291ff., 315
—-— am Proton 89, 250ff.
—, thermische 96, 101
—-vervielfachung 98
—, verzögerte 82, 86
Nichtausflußfaktor s. Leckfaktor
Niveau-abstand, Niveaudichte 289, 291, 303, 323, 325ff., 407
—-breite s. Linienbreite
Normierung der Wellenfunktion 119, 143
Nukleonen 30, 183, 253
—-dichte 216, 223, 240
—-zahl, Erhaltungssatz 30, 178

Oberflächen-energie 67, 80, 395
—-schwingungen des Kerns 391ff., 402, 404
Operatoren 118, 139ff.
Optisches Modell 268, 283, 302, 304ff., 404
Orthogonales Funktionssystem 143
Orthonormierung 143
Ortsabhängigkeit des Kernpotentials 258ff.
Ortsoperator 140
Oszillator, harmonischer 136ff., 147ff., 213, 396
—, Potential (Schalenmodell) 212ff., 367, s. auch Potential

Paarungsenergie 72, 76, 80, 178, 216, 327
Paarvernichtung s. Vernichtungsstrahlung
Parität 153, 180, 187, 209, 216, 259, 379, 405
— von angeregten Kernzuständen 216, 292, 317, 333, 337, 350, 374, 389, 397, 401, 404
—, Erhaltungssatz 153, 180, 270
— der Multipolfelder 366
—, Nichterhaltung 381ff.
Paritätskoeffizient 371
Partialwellen 248, 276
PASCHEN-BACK-Effekt 196
PAULI-Prinzip 155, 157, 212, 259, 267, 308
—-Spinmatrizen 164
Phasen-raum 71, 235, 346
—-verschiebung s. Streuphase
Phononen 397
Photo-disintegration s. Kernphotoeffekt
—-effekt 49, 376, s. auch Kernphotoeffekt
Photonen 26, 117
—-absorption 49, 338ff.
—-drehimpuls 366
—-streuung 47
Pick-up-Reaktion 330, 333
PLACZEK-Funktion 94
PLANCKsches Wirkungsquantum 25, 118
POISSON-Klammer s. Kommutation von Operatoren
—-Verteilung 64
Polarisation 376ff., 380
Polarkoordinaten 3, 4, 16
Positronen 56
—, Spektrum 385, 386
Potential, elektrisches 69, 198, 242
—, Hard core- 261
—, Kasten- 128, 129ff., 136, 213, 219, 243, 258, 304, 312
—, Kern- 222, 250, 253ff., 307, 308, 349, 406
—, kugelsymmetrisches 121ff., 144, 153, 178
—, optisches 302, 304ff., 404
—, Parabel- 136ff., 212, 260, 367
—-schwelle 80, 128, 130ff., 312
—-streuung 280, 302

Potentialtopf s. Kasten-
— der Zentrifugalkraft 124, 325, 353
Potentielle Energie 119, 126
— — im COULOMB-Feld 18
— — im hydrodynamischen Modell 395
POYNTING-Vektor 339, 378
Principle of detailed balance s. Reziprozitätstheorem
Prompte Neutronenausbeute 81, 98
Proton 25, 30
—, Ausdehnung 230
—, effektive Ladung im Kern 339, 372
—, Formfaktor 239
—-impuls im Deuteron 334
—, magnetisches Moment 182, 185
—-masse 31
—, Parität 272
—-spin 70, 253
Protonen-abstoßung 68, 78, 222, 260
—-dichte 198, 217, 223, 238
—-einfang 321, 330
—-reaktionen 309, 316, 329ff.
—-streuung 253, 260
Punktquelle thermischer Neutronen 104

Q-Gleichung 41, 270, 335
Q-Wert 41, 54, 56, 76, 330, 351
Quadrupolmoment des Kerns s. Elektrisches Kernquadrupolmoment, Inneres Quadrupolmoment
Quadrupol-Kopplungskonstante 204
—-operator 370
—-schwingungen 397

RABI-Formel s. BREIT-RABI-Formel
RACAH-Algebra 175
Radioaktives Zerfallsgesetz 59ff.
Radius des Kerns s. Kernradius
Raising operator 160
Raumwinkel im Schwerpunktssystem 24
Reaktionsquerschnitt s. Wirkungsquerschnitt f. Kernreaktionen
Reaktor, Energiebilanz 83
—, heterogener 99, 300, 301
—, homogener 99, 105, 110
—, Konstanten 98ff., 301
—, kritische Bedingung 106
—, kritische Größe 101ff., 110
—, Leistung 84
Reaktor, Neutronenbilanz 96, 329
—-physik 86ff., 300
Rechteckpotential s. Kastenpotential
Reduzierte Masse 10
Reichweite der Kernkräfte 243, 258ff., 308, 406
Relativsystem 9ff.
Relativistische Energie-Impuls-Beziehung 37ff.
Resonanz-Entkommwahrscheinlichkeit 97, 99, 268, 297ff.
—-fluoreszenz 412
—-integral 299
—-streuung 280, 283ff., 330
—-— mit Reaktionen 286ff.
Reziprozitätstheorem 321, 323, 330
RICHARDSON-Gesetz 328
Riesenresonanz 307, 343, 392, 404
RÖNTGEN-Strahlung 29, 53, 57, 376
Rotationszustände der Kerne 397ff., 404
Rückstreuung 22, 89
Ruhmasse 30, 37
Rumpf s. Kernrumpf
RUSSELL-SAUNDERS-Kopplung 158, 174
RUTHERFORDsche Streuformel 19ff., 235, 236, 330
— —, Abweichungen von der — 22, 337
RYDBERG-Konstante 27

s-Wellen 249, 261, 279
Säkulares Gleichgewicht 63
Schalenmodell 84, 188, 208, 209ff., 221, 222, 226, 267, 308, 333, 353, 372, 374, 375, 390, 402, 404
SCHMIDT-SCHÜLER-Modell 177, 183ff.
Schnellspaltfaktor 97, 99, 301
SCHRÖDINGER-Gleichung, Asymptotische Lösungen der — 127ff.
—-—, ortsabhängige 124ff.
—-—, Separation der — 12, 120
—-— mit Spin 157ff.
—-— ohne Spin 116ff., 151, 250, 354
—-— im Relativsystem 12
Schwellenenergie 43, 44, 45, 330, 343
—, scheinbare 81, s. auch COULOMB-Schwelle
Schwere Ionen 337
Schwerpunktssystem 5ff., 224
Schwingungszustände der Kerne 391ff.

Semiempirische Massenformel s. WEIZSÄCKER-Formel
SERBER-Potential 261, 342
Singulett-Zustand 251, 253, 256ff.
SOMMERFELD-Korrektur 28
—-Modell 25, 28
Spaltung 59, 79ff., 86, 96, 404
— des Deuterons 33, 83, 345ff.
—, spontane 80
—, Wirkungsquerschnitt für — 100
Spalt-neutronenausbeute 81, 97, 98
—-produkte 81, 84, 301
Spektrallinien, Feinstruktur s. Feinstrukturaufspaltung, Spin-Bahn-Kopplung
—, Grobstruktur 27
—, Hyperfeinstruktur s. Hyperfeinstruktur
—, Linienform 52, 285
Sphärische BESSEL-Funktionen s. BESSEL-Funktionen
— Koordinaten s. Kugelkoordinaten
Spiegelkerne 78, 387
Spiegelung s. Parität
Spin 28, 70, 157, 162, 164ff., 182, 245, 383, 405
—, Abhängigkeit des Kernpotentials 256ff.
— von angeregten Kernzuständen 271, 292, 317, 333, 350ff., 374, 379, 389, 397, 401, 404
—, Eigenfunktionen 165
— des elektromagnetischen Feldes 359ff.
— bei Kernreaktionen 288
—, Matrizen 164
—, Zusammensetzung zweier —s 168
Spin-Bahn-Kopplung 171, 173, 209ff., 213, 219, 245, 254, 308
Stärkefunktion (strength function) 304, 307, 407
Stationäre Zustände 120
Statistik 64, 141
Statistische Theorie der Kernreaktionen 323ff.
Statistischer Fehler 66
Statistisches Gewicht 173, 189, 289, 310
Störungstheorie 167, 175, 192, 207, 232, 415ff.
Stoß, elastischer 7, 87
—-parameter 20, 87, 127, 249, 278, 337
—, plastischer 6
—-zahl bei Neutronenbremsung 93
Streu-amplitude 250
—-breite 292, 293, 311
Streuformel 232ff., s. RUTHERFORDsche Streuformel, MOTTsche Streuformel
—-phase 249, 251, 273, 279
— —, gemittelte 302
—-prozeß 19
— —, elastischer 42, 49, 245, 320
— —, inelastischer 43, 50, 320, 330
—-querschnitt s. Wirkungsquerschnitt f. Streuung
—-weglänge 25, 95
Stripping-Reaktion 271, 330, 333ff.
Stromdichte 246, 274, 355
Summenregeln beim Kernphotoeffekt 338ff.
Symmetrie der Wellenfunktion des Zweiteilchensystems 259
—-energie 70, 392
Symmetrischer Zustand 155

Tal der stabilen Kerne 73
Teilchenstrom 275, s. auch Stromdichte
Tensorpotential 256, 260
Thermische Neutronen 96, 101
— —, Nutzung 98, 99, 301
Termsymbole 211, 214, 215
THOMAS-Korrektur 210
Trägheitsmoment des Kerns 400
Triplett-Zustand 251, 253, 256ff.
Triton, Bindungsenergie 34
—, β-Zerfall des —s 34, 55, 387
Tröpfchenmodell des Kerns 67ff., 80, 209, 222, 241, 267, 390, 404, 405
— — —, Grenzen des — 84ff.
Tunneleffekt 80, 129, 130ff., 350, 385

Übergangswahrscheinlichkeit s. Goldene Regel
Umkehrreaktion 321
Unelastische Streuung s. Streuprozeß, inelastischer
Unendlicher Multiplikationsfaktor 98, 100, 301
Ungerade-Gerade-Effekte 72, 178, 327, 405
Unified model 391, 402, 403ff.
Unschärferelation 52, 144ff., 180, 269, 291, 403

Vektor-additionskoeffizienten s. CLEBSCH-GORDAN-Koeffizienten

Vektor-kugelfunktionen 363
—-potential 366
Verbotene Übergänge s. Auswahlregeln
Verdampfungstheorie s. Kernverdampfung
Vertauschungs-relationen s. Kommutation von Operatoren
—-symmetrie s. Austauschsymmetrie
Vernichtungsstrahlung 57
Virtueller Zustand des Deuterons 34, 253, 260

Wanderungslänge 110
Wasserstoffatom 25, 172, 205, 209, 211, 239
—, Streuung von Neutronen am — 89
Weglänge, freie s. Freie Weglänge
WEISSKOPF-Einheit 372
WEIZSÄCKER-Formel 67ff., 76ff., 79ff., 392, 405
Wellen s. auch Kugelwellen
—, elektromagnetische 117, 339
—, Materie- 118
Winkelkorrelationen bei Kernreaktionen 271, 335
— beim γ-Zerfall 374, 376ff.
Wirkungsquerschnitt für Absorption 24, 98
— außerhalb der Resonanzen 312ff.
— für Compoundkernbildung 303ff., 324
—, Definition 21, 246, 274, 309ff.
—, differentieller 21, 23, 247, 275
— für Einfang 24, 96, 98, 252, 291ff.
— für elastische Neutronenstreuung 87, 100, 245ff., 291ff., 315
— für Elektronenstreuung 232ff.
—, gemittelter 301ff., 404
—, integraler 21, 88, 247, 249, 276
—, integrierter 293, 340ff.
—, Ladungsabhängigkeit des —s 312ff.
Wirkungsquerschnitt, makroskopischer 24
— für Photospaltung des Deuterons 340, 345ff.
— für Potentialstreuung 303
— für Quantenabsorption 339ff.
—, Resonanzen im — 251, 283ff., 317ff., 404
— für Spaltung 98
— für Streuung an harter Kugel 280
— für Streuung und Kernreaktionen 266ff., 273ff., 309ff., 315, 316, 324
—, totaler 252, 274, 289, 317
WOOD-SAXON-Potential 261

YUKAWA-Potential 261, 349

Zählstatistik 64
ZEEMAN-Effekt 190ff., 197, 212
Zentralkraft 14ff., 121ff.
Zentrifugalwall s. Potential der Zentrifugalkraft
Zerfall, dualer s. dualer Zerfall
—, radioaktiver 59ff., 350ff.
Zerfallskette 64
Zerfallskonstante 60, 350ff., 406, 407
— für α-Zerfall 352
— — β-Zerfall 386
— — γ-Zerfall 372, 373
— — Elektroneneinfang 389
— — innere Konversion 376
Zusatzenergie 184, 189, 195, 206, 210, 415
Zustands-dichte 235, 309, 323, 340, 346, 368, 374
—-mischung 260, 262
Zweinukleonensystem 242ff., 253

KLASSISCHE MECHANIK

Hochschullehrbuch

H. GOLDSTEIN, Columbia University, New York

Übersetzt aus dem Englischen von G. GLIEMANN, Frankfurt am Main
1963, XIV+443 Seiten, 72 Abbildungen, Gr.-8°, Leinen, Preis: 45,— DM.

Die ersten fünf Kapitel sind dem *Hamilton*schen Prinzip und der *Lagrange*schen Methode gewidmet. Diese Methode wird ausführlich auf das Zentralkräfteproblem (einschließlich der Teilchenstreuung durch Zentralkräfte) und die Dynamik der starren Körper angewendet. Dabei finden die mathematischen Verfahren besondere Beachtung, die in der Quantenmechanik, der statistischen Mechanik und der Feldtheorie gebräuchlich sind: z. B. die Variationsrechnung, die Matrizenalgebra und die *Cayley-Klein*schen Parameter. Ein weiteres Kapitel gibt eine Einführung in die spezielle Relativitätstheorie der klassischen Mechanik. In den drei nächsten Kapiteln wird die *Hamilton*sche Theorie dargestellt: kanonische Transformationen, *Poisson*sche Klammern, Winkel- und Wirkungsvariable, die *Hamilton-Jacobi*schen Gleichungen, die Wirkungsfunktion. Daran schließt sich die Theorie kleiner Schwingungen mechanischer Systeme um ihre Gleichgewichtslage an. Den Abschluß des Buches bildet die Anwendung der *Lagrange*schen und *Hamilton*schen Verfahren auf kontinuierliche Systeme und Felder.

Am Ende jedes Kapitels sind (insgesamt 119) Übungsaufgaben zusammengestellt. Sie vertiefen und erweitern den Inhalt der Kapitel. Ausführliche Referenzen über entsprechende Lehr- und Handbücher findet man am Ende jedes Kapitels und am Schluß des Buches.

Aus dem Inhalt:

1. Überblick über die elementaren Prinzipien — 2. Variationsprinzipien und *Lagrange*sche Gleichungen — 3. Das Zweikörper-Zentralkräfteproblem — 4. Die Kinematik starrer Körper — 5. Die Bewegungsgleichungen des Körpers — 6. Die spezielle Relativitätstheorie in der klassischen Mechanik — 7. Die *Hamilton*schen Bewegungsgleichungen — 8. Kanonische Transformationen — 9. Die *Hamilton-Jacobi*sche Theorie — 10. Kleine Schwingungen — 11. Einführung in die *Lagrange*sche und *Hamilton*sche Formulierung für kontinuierliche Systeme und Felder.

Interessentenkreis:

Dozenten und Studenten der Physik, Mathematik und physikalischen Chemie an Universitäten und Technischen Hochschulen.

AKADEMISCHE VERLAGSGESELLSCHAFT
FRANKFURT AM MAIN